Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Wintersemester 2013/14

Aufgabenblatt 5

zur Vorlesung Zeitreihenanalyse

(Besprechung der Lösungen: 20. November 2013, 14:15 Uhr)

Aufgabe 10.

a) Es seien N_1 und N_2 zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1/2 und $\omega \in [0, \pi]$. Zeigen Sie, dass

$$Z(\lambda) = N_1 1_{\{\lambda \geq -\omega\}} + N_2 1_{\{\lambda \geq \omega\}}$$

ein (rechtsstetiger) Prozess mit orthogonalen Zuwächsen ist und bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F.

b) Es sei

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + Y_t,$$

wobei A, B, Y_t jeweils unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind und $\omega \in [0, \pi]$ ist. Bestimmen Sie einen (rechtsstetigen) Prozess $Z(\lambda)$ mit orthogonalen Zuwächsen, so dass dessen zugehörige Verteilungsfunktion mit der spektralen Verteilungsfunktion von X_t übereinstimmt.

Hinweis: Zusammenhänge bestehen zu Teil a), zu Beispiel 3.13 und zu Aufgabe 9.

Aufgabe 11.

Es sei $Z(\lambda)$ ein (rechtsstetiger) Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und F dessen zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: Ist $\psi \in \mathcal{L}^2(F)$, so definiert

$$W(v) = \int_{(-\pi, v]} \psi(\lambda) dZ(\lambda), \quad -\pi \leq v \leq \pi,$$

einen (rechtsstetigen) Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und zugehöriger Verteilungsfunktion

$$G(v) = \int_{(-\pi, v]} |\psi(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$