Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Wintersemester 2014/15

Aufgabenblatt 1

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 31. Oktober 2014, 10:15 Uhr; Besprechung: 7. November 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P und k eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit $Y_n = X_{nk}$ ist eine Markov-Kette mit Anfangsverteilung λ und Übergangsmatrix P^k.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jede Übergangsmatrix besitzt mindestens eine geschlossene kommunizierende Klasse.
b) Jede Übergangsmatrix *auf einem endlichen Zustandsraum* besitzt mindestens eine geschlossene kommunizierende Klasse.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation aus Präsenzaufgabe 1.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht der Spieler am Ende 10 EUR?
b) Wie viele Runden dauert es durchschnittlich, bis der Spieler entweder 10 EUR erreicht oder seinen Einsatz komplett verloren hat?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette bzgl. (λ, P) auf dem Zustandsraum I und $J \subset I$. Definiere

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n \in J\} \text{ und } T_{m+1} = \inf\{n > T_m : X_n \in J\} \text{ für } m \geq 1$$

und setze dann $Y_m = X_{T_m}$. Zeigen Sie, dass unter der Annahme $P(T_m < \infty) = 1$ für alle m gilt:

a) Die Folge $(T_m)_{m\geq 0}$ ist eine Folge von Stoppzeiten.
b) $(Y_m)_{m\geq 0}$ ist eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ wie folgt: $\bar{p}_{ij} = h_i^j$, wobei für $j \in J$ der Vektor $(h_i^j : i \in I)$ die minimale nicht-negative Lösung von

$$h_i^j = p_{ij} + \sum_{k \notin J} p_{ik} h_k^j$$

ist.

Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabenteil b) eine zum Beweis von Satz 1.20 analoge Argumentation.