Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter **Wintersemester 2014/15**

Aufgabenblatt 2

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 14. November 2014, 10:15 Uhr; Besprechung: 21. November 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Es sei

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die transienten und rekurrenten Zustände des Systems.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Wir betrachten den symmetrischen Random Walk auf $\mathbb{Z}^3$ aus Präsenzaufgabe 1.

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(6m)} < \infty.$$

b) Folgern Sie daraus die Transienz des symmetrischen Random Walks auf $\mathbb{Z}^3$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich auf den acht Ecken eines Würfels wie folgt: Mit Wahrscheinlichkeit 1/3 wechselt es von Schritt zu Schritt zu einer der drei durch Kanten benachbarten Ecke. Es seien dann i eine beliebige Startecke des Systems und o (also eigentlich $o(i)$ in Abhängigkeit von i) die gegenüberliegende Ecke. Berechnen Sie:

a) die erwartete Anzahl der Schritte, die das Teilchen benötigt, um zu i zurückzukehren,

b) die erwartete Anzahl der Besuche in o, bevor das Teilchen zum ersten Mal nach i zurückkehrt,

c) die erwartete Anzahl der Schritte bis zum ersten Besuch in o.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Es sei P eine stochastische Matrix auf einem endlichen Zustandsraum I. Zusätzlich seien $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ und $a = (a_i)_{i\in I}$ die Matrix und der [Zeilen]vektor, die jeweils ausschließlich aus Einsen bestehen.

a) Zeigen Sie: Eine Verteilung π ist genau dann invariant für P, wenn $\pi(Id - P + A) = a$ gilt, wobei Id die Identitätsmatrix auf I bezeichnet.

b) Es sei P zusätzlich irreduzibel. Zeigen Sie, dass $(Id - P + A)$ dann invertierbar ist (und man die invariante Verteilung π also mit Methoden der Linearen Algebra bestimmen kann).

Hinweis: Verwenden Sie im Beweis von Aufgabenteil b) die Eindeutigkeit der invarianten Verteilung sowie die Tatsache, dass P eine stochastische Matrix ist.