Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2014/15**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Aufgabenblatt 3

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 28. November 2014, 10:15 Uhr; Besprechung: 5. Dezember 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 9. (6 Punkte)

Unser Ziel ist ein Beweis der Aussage aus Bemerkung 3.4:

Ein Zustand i ist genau dann aperiodisch, wenn $\mathrm{ggT}\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$ gilt.

Gehen Sie diesbezüglich wie folgt vor:

a) Beweisen Sie die Hinrichtung: Ist i aperiodisch, so gilt: $\mathrm{ggT}\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$.

b) Sei nun $\mathrm{ggT}\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$. Zeigen Sie: $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ enthält teilerfremde Elemente.

c) Zeigen Sie: Enthält $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ teilerfremde Elemente, so ist i aperiodisch.

Hinweis: Sie können in den Aufgabenteilen b) und c) jeweils Präsenzaufgabe 5 verwenden.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Wir bezeichnen mit X_n die Summe der Augenzahlen nach n Würfen eines fairen Würfels. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \text{ ist ein Vielfaches von } 13).$$

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Wir betrachten die Situation aus Präsenzaufgabe 6. Außerdem gelte: $\mathrm{ggT}\{n : P(Y_1 = n) > 0\} = 1$ und $\mu = \mathbb{E}[Y_1]$.

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} P(n = Y_1 + \ldots + Y_k \text{ für ein } k \geq 0) = 1/\mu.$$

Hinweis: Übersetzen Sie das Resultat in eine Aussage über die Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass aus $\mathrm{ggT}\{n : P(Y_1 = n) > 0\} = 1$ die Aperiodizität der Markov-Kette folgt. Unterscheiden Sie die beiden Fälle $\mu < \infty$ und $\mu = \infty$.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Ein Graph ist eine endliche Menge von Knoten i, die zum Teil durch Kanten (i, j) verbunden sind. Auf einem Graph lässt sich natürlicherweise eine Markov-Kette wie folgt definieren: Es sei v_i die Anzahl der Kanten, die vom Knoten i ausgehen. Dann setzt man

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/v_i, & \text{falls } (i,j) \text{ eine Kante ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass es von jedem Knoten einen Weg zu jedem anderen gibt. In diesem Fall ist die Markov-Kette irreduzibel.

a) Bestimmen Sie die invariante Verteilung der Markov-Kette.

b) Zeigen Sie, dass die Markov-Kette reversibel ist.