

## Aufgabenblatt 4

### zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 12. Dezember 2014, 10:15 Uhr; Besprechung: 17. Dezember 2014, 14:15 Uhr)

#### Aufgabe 13.

(4 Punkte)

Ein Promoter hat eine divenhafte Sängerin unter Vertrag. Einerseits ist sie hoch erfolgreich und bringt ihrem Promoter pro Abend 750 EUR Gewinn ein. Andererseits sorgt ihr Temperament dafür, dass sie mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  nach jedem Konzert aufs Neue ihren Rücktritt aus dem Showgeschäft verkündet. Um sie zu besänftigen, schickt ihr Agent ihr dann täglich Blumen im Wert von  $x \cdot 1000$  EUR,  $0 < x \leq 1$ , bis sie seine Bitten erhört und am nächsten Tag wieder auftritt. Dies passiert mit Wahrscheinlichkeit  $\sqrt{x}$ .

- Für welche Werte von  $x$  macht der Promoter langfristig Gewinn?
- Welcher Wert von  $x$  ist für den Promoter langfristig optimal?
- Mit welchem mittleren Gewinn pro Tag kann der Promoter im Optimalfall rechnen?

#### Aufgabe 14.

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation aus Präsenzaufgabe 1. An wie vielen Tagen wird die Professorin im Mittel nass? Beantworten Sie die Frage, indem Sie eines der beiden in der Präsenzaufgabe aufgestellten Modelle verwenden.

#### Aufgabe 15.

(4 Punkte)

Es sei  $(X_n)_{n \geq 0}$  eine Markov-Kette auf  $I$  und  $A$  eine absorbierende Menge. Wir setzen

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

und

$$h_i = P_i(X_n \in A \text{ für irgendein } n \geq 0) = P_i(T < \infty).$$

Zeigen Sie, dass  $h(X_n)$  ein Martingal ist.

**Aufgabe 16.**

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation aus Präsenzaufgabe 2. Bestimmen Sie die optimale Wahl von  $p$  und den optimalen Langzeitprofit in den Fällen

a)  $c(p) = \alpha p$ ,  $\alpha \geq 0$ .

b)  $c(p) = c$ .