

Aufgabenblatt 5

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 16. Januar 2015, 10:15 Uhr; Besprechung: 23. Januar 2015, 10:15 Uhr)

Aufgabe 17.

(5 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\lambda, P)$. Konstruieren Sie eine *mind map*, in der Sie die folgenden 25 Begriffe sinnvoll durch verbindende Pfeile und kurze Kommentare miteinander verknüpfen:

1. absorbierend
2. Absorptionswahrscheinlichkeit
3. balanciert
4. Ergodensatz
5. geschlossene Klasse
6. Green-Matrix
7. harmonische Funktion
8. invariante Verteilung
9. irreduzibel
10. kommunizierende Klasse
11. Langzeitverhalten
12. lineares Gleichungssystem
13. Markov-Eigenschaft
14. Martingal
15. nullrekurrent
16. Optional-Stopping-Theorem
17. Periode
18. positiv rekurrent
19. Potential
20. rekurrent
21. Resolvente
22. starke Markov-Eigenschaft
23. Stoppzeit
24. transient
25. Zeitumkehrung

Aufgabe 18.

(4 Punkte)

Betrachten Sie $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\lambda, P)$ und das Potential ϕ mit Kosten $(c_i; i \in D)$ und Randwerten $(f_i; i \in \partial D)$. Wir setzen

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & n \leq T, \\ \partial, & n > T, \end{cases}$$

wobei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\}$ gilt und ∂ ein neuer Zustand ist.

- Zeigen Sie, dass $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie deren Übergangsmatrix $\tilde{P}$.
- Zeigen Sie, dass mit $\tilde{T} = T + 1$ und $c_i = f_i$ auf ∂D sowie $c_\partial = 0$

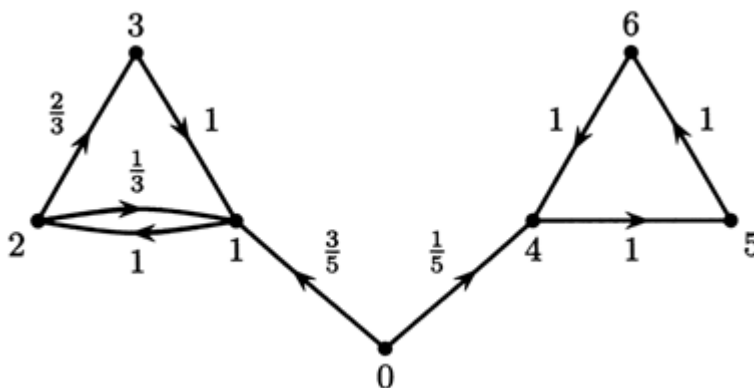
$$\phi_i = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n < \tilde{T}} c(\tilde{X}_n) \right] = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} c(\tilde{X}_n) \right]$$

gilt. Jedes Potential lässt sich also auf ein Potential ohne Randwerte zurückführen.

Aufgabe 19.

(7 Punkte)

Untersuchen Sie die Markov-Kette mit dem folgenden Diagramm:



Bestimmen Sie zunächst die Klassen, in die die Markov-Kette zerfällt, und untersuchen Sie diese auf Geschlossenheit, Rekurrenz/Transienz und Periodizität. Berechnen Sie außerdem

- die Wahrscheinlichkeit, bei Start in 0 den Punkt 6 zu erreichen,
- die Wahrscheinlichkeit, bei Start in 1 den Punkt 3 zu erreichen,
- die erwartete Anzahl an Schritten, um bei Start in 1 den Punkt 3 zu erreichen,
- die bei Start in 1 langfristig in Zustand 2 verbrachte Zeit,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{01}^{(n)}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{04}^{(3n)}$.