Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2014/15**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Aufgabenblatt 6

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Abgabe der Lösungen: 30. Januar 2015, 10:15 Uhr; Besprechung: 4. Februar 2015, 14:15 Uhr)

Aufgabe 20. (4 Punkte)

Es sei P eine stochastische Matrix.

Zeigen Sie: Existiert eine Q-Matrix Q mit $P = \exp(Q)$, so ist $\det P > 0$.

Aufgabe 21. (4 Punkte)

Es seien $S \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ und $T \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ unabhängig.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\min(S, T)$.
b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{\min(S,T) \geq x\}$ und $\{S < T\}$ unabhängig sind.

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Eine radioaktive Quelle emittiert Teilchen gemäß einem Poisson-Prozess mit Parameter λ. Da die Partikel zusätzlich auch eine Richtung besitzen, mit der sie ausgesendet werden, kann ein neben der Quelle platzierter Geigerzähler nur jeweils mit Wahrscheinlichkeit p ein emittiertes Teilchen erkennen.

Bestimmen Sie die Verteilung der bis zur Zeit t vom Geigerzähler registrierten Partikel.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

Es existieren äquivalente Charakterisierungen eines Poisson-Prozesses. Eine davon lautet (vgl. Satz 7.11): Ein rechtsstetiger Prozess X ist genau dann ein Poisson-Prozess mit Rate λ, wenn er unabhängige Zuwächse besitzt und gleichmäßig in t

$$P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h) \qquad \text{und} \qquad P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h)$$

erfüllt.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung: Sind X und Y unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten λ und μ, so ist $Z = X + Y$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda + \mu$.