Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2014/15**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Präsenzaufgabenblatt 1

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Diskussion im Tutorium am 24. Oktober 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 1.

Ein Spieler besitzt 2 EUR und möchte mit Hilfe der folgenden Strategie 10 EUR daraus machen: Sofern er 5 EUR oder weniger besitzt, setzt er bei einem fairen Münzwurf seinen kompletten Einsatz und bekommt entweder das Doppelte zurück oder verliert alles. Andernfalls setzt er genau so viel Geld, wie ihm zum Erreichen von 10 EUR fehlen, und erhält wieder das Doppelte des Einsatzes oder verliert ihn. Das Spiel wird beendet, sofern der Spieler entweder alles verloren oder die 10 EUR erreicht hat.

a) Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum für diese Markov-Kette an. Was ist die Anfangsverteilung λ?
b) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P und zeichnen Sie auch das zugehörige Diagramm.
c) Bestimmen Sie die kommunizierenden Klassen der Markov-Kette. Welche Klassen sind geschlossen? Gibt es absorbierende Zustände?
d) Bestimmen Sie $p_{22}^{(n)}$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Lässt sich eine allgemeine Formel für beliebiges n angeben? Was passiert bei den anderen Zuständen?

Aufgabe 2.

Es seien $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette bzgl. (λ, P). Definiere

$$S_0 = 0 \text{ und } S_{m+1} = \inf\{n > S_m : X_n \neq X_{S_m}\} \text{ für } m \geq 0$$

und setze dann $Z_m = X_{S_m}$. Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass kein Zustand absorbierend ist, gilt:

a) Die Folge $(S_m)_{m\geq 0}$ ist eine Folge von Stoppzeiten.
b) $(Z_m)_{m\geq 0}$ ist eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ wie folgt: Es ist $\tilde{p}_{ii} = 0$ für alle i, und für $i \neq j$ gilt
$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij} / \sum_{k\neq i} p_{ik}.$$