Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Wintersemester 2014/15

Präsenzaufgabenblatt 2

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Diskussion im Tutorium am 7. November 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 3.

Wir betrachten den symmetrischen Random Walk auf $\mathbb{Z}^3$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/6, & \text{falls } ||i-j|| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$p_{00}^{(6m)} = \sum_{i+j+k=3m} \frac{(6m)!}{(i!j!k!)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{6m},$$

wobei wir nur über solche Indizes mit $i, j, k \geq 0$ summieren.

b) Es ist

$$\sum_{i+j+k=3m} \frac{(3m)!}{i!j!k!} \left(\frac{1}{3}\right)^{3m} = 1.$$

c) Für Indizes $i, j, k \geq 0$ mit $i + j + k = 3m$ gilt

$$\frac{(3m)!}{i!j!k!} \leq \frac{(3m)!}{(m!)^3}.$$

Aufgabe 4.

Es seien I ein endlicher Zustandsraum und P irreduzibel.

a) Zeigen Sie, dass jeder Zustand positiv rekurrent ist.

b) Folgern Sie, dass es genau eine invariante Verteilung gibt.