Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Wintersemester 2014/15

Präsenzaufgabenblatt 3

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Diskussion im Tutorium am 21. November 2014, 10:15 Uhr)

Aufgabe 5.

Es seien $n_1, n_2 \in \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ gegeben. Für sie existiert eine Darstellung als $n_1 = rm_1$ und $n_2 = rm_2$, wobei r ihr größter gemeinsamer Teiler ist und m_1 und m_2 teilerfremd sind. Unser Ziel ist die folgende Aussage:

Es existiert eine natürliche Zahl b mit $ar \in \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ für alle $a \geq b$.

a) Warum genügt es, die Aussage im Fall $r = 1$ zu zeigen?
b) Betrachten Sie also den Fall $r = 1$. Zeigen Sie: Es existiert eine natürliche Zahl t, so dass $t + c \in \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ für alle $c = 0, \ldots, n_1 - 1$.
c) Warum impliziert b) die Aussage im Fall $r = 1$?

Hinweis: Verwenden Sie in Aufgabenteil b) das Lemma von Bézout: Sind zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 teilerfremd, so existieren ganze Zahlen s_1 und s_2 mit $s_1 n_1 + s_2 n_2 = 1$.

Aufgabe 6.

Es seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Außerdem gelte: Für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $n > m$ mit $P(Y_1 = n) > 0$.

Zeigen Sie: $(X_n)_{n \geq 0}$ mit $X_0 = 0$ und

$$X_n = \inf\{m \geq n : m = Y_1 + \ldots + Y_k \text{ für ein } k \geq 0\} - n$$

ist eine Markov-Kette, und bestimmen Sie den Zustandsraum I sowie die Übergangsmatrix P.