

## Präsenzaufgabenblatt 4

### zur Vorlesung Markov-Ketten

(Diskussion im Tutorium am 5. Dezember 2014, 10:15 Uhr)

#### Aufgabe 7.

Eine Professorin besitzt  $N$  Regenschirme. Jeden Morgen geht sie zur Universität und kehrt jeden Abend von dort zurück. Auf jedem Weg nimmt sie einen Regenschirm mit, falls es gerade regnet, und keinen, falls es aktuell trocken ist. Wir nehmen an, dass es unabhängig auf jedem Weg mit Wahrscheinlichkeit  $p$  regnet.

Ziel der Analyse ist die Beantwortung der folgenden Frage: An wie vielen Tagen wird die Professorin im Mittel nass?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um die obige Situation mit Markov-Ketten zu erfassen. Stellen Sie die beiden folgenden Modelle auf:

- a) Zustandsraum ist die Anzahl der Regenschirme, die die Professorin an jedem Morgen daheim vorfindet. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten finden Übergänge statt?
- b) Zustandsraum ist die Anzahl der Regenschirme, die die Professorin aktuell zur Verfügung hat. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten finden Übergänge statt?

#### Aufgabe 8.

Betrachte eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum  $I = \{1, 2\}$  mit Übergangswahrscheinlichkeiten  $p = p_{12}$  und  $q = p_{21}$ . Während  $q$  fest vorgegeben ist, sei  $p$  frei wählbar. Außerdem erhält man bei jedem Besuch in Zustand 2 einen Betrag  $r$ , während man bei jedem Besuch in Zustand 1 Kosten von  $c(p)$  zu zahlen hat, wobei  $c$  eine stetige Funktion sei.

Berechnen Sie den Langzeitprofit pro Schritt als Funktion von  $p$ .