

Präsenzaufgabenblatt 6

zur Vorlesung Markov-Ketten

(Diskussion im Tutorium am 23. Januar 2015, 10:15 Uhr)

Aufgabe 11.

Betrachten Sie die stochastischen Matrizen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In welchen Fällen existieren Q -Matrizen Q_i , $i = 1, 2, 3$, so dass $P_i = \exp(Q_i)$ gilt? Geben Sie eine formale und eine heuristische Begründung an.

Aufgabe 12.

Es existieren äquivalente Charakterisierungen eines Poisson-Prozesses. Eine davon lautet (vgl. Satz 7.11): Ein rechtsstetiger Prozess X ist genau dann ein Poisson-Prozess mit Rate λ , wenn er

- unabhängige Zuwächse besitzt, d.h. $X_{t_1} - X_{s_1}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$ sind für disjunkte Intervalle $[s_1, t_1], \dots, [s_n, t_n)$ unabhängig, und
- Poisson-verteilte Zuwächse besitzt, d.h. $X_t - X_s \sim Po(\lambda(t-s))$ für alle $s < t$.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung: Sind X und Y unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten λ und μ , so ist $Z = X + Y$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda + \mu$.