**Fachbereich Mathematik und Informatik** **Wintersemester 2014/15**
**Philipps-Universität Marburg**
**Prof. Dr. M. Vetter**

# Präsenzaufgabenblatt 7

**zur Vorlesung Markov-Ketten**

(Diskussion im Tutorium am 4. Februar 2015, 14:15 Uhr)

**Aufgabe 13.**

Es sei $X$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann heißt die Funktion

$$z \mapsto \psi(z) := \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X = z)$$

die erzeugende Funktion von $X$.

a) Beweisen Sie, dass $\psi$ die Verteilung von $X$ eindeutig bestimmt, indem Sie $n!P(X = n) = \psi^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen.
b) Zeigen Sie: Für eine geometrische Verteilung, d.h. falls $P(X = n) = q^{n-1}(1 - q)$ für $n \geq 1$ und $0 < q < 1$ gilt, ist
$$\psi(z) = \frac{z(1-q)}{1-zq}.$$
c) Setzen Sie konkret $q = 1-e^{-\lambda t}$ für $\lambda > 0$ und $t \geq 0$. Zeigen Sie dann: Die Funktion $\phi(t, z) = \psi(z)$ mit $\psi$ aus Teil b) erfüllt für jedes $z$ die Differentialgleichung
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, z) = \lambda(\phi(t, z)^2 - \phi(t, z)).$$

**Aufgabe 14.**

Ein Bakterium teile sich nach einer exponentialverteilten Zeit (mit Paramter $\lambda$) in zwei Bakterien, die sich ihrerseits unabhängig nach demselben Muster teilen. Die Anzahl der Bakterien werde mit $X_t$ bezeichnet, und zur Zeit $t = 0$ gelte $X_0 = 1$.

a) Zeigen Sie wie in Beispiel 7.17: Es gilt
$$\phi(t, z) = \mathbb{E}[z^{X_t}] = ze^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\mathbb{E}[z^{X_t}|J_1 = s]ds,$$
wenn $J_1$ den Zeitpunkt der ersten Teilung bezeichnet.
b) Begründen Sie, warum $\mathbb{E}[z^{X_t}|J_1 = s] = \phi(t - s, z)^2$ gilt.
c) Folgern Sie wieder wie in Beispiel 7.17, dass gilt:
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, z) = \lambda(\phi(t, z)^2 - \phi(t, z)).$$

d) Begründen Sie, warum also $P(X_t = n) = q^{n-1}(1-q)$ mit $q = 1 - e^{-\lambda t}$ gilt.

e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$ und stellen Sie den inhaltlichen Zusammenhang zu Beispiel 7.17 her.