



# Multivariate Archimedische Copulas

Bachelorarbeit  
im Studiengang Wirtschaftsmathematik  
am Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg

eingereicht von  
Daniel Aschenbach  
Marburg, September 2011  
betreut durch  
Prof. Dr. Hajo Holzmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Theoretische Grundlagen von Copula Funktionen</b>	<b>4</b>
1.1 Definitionen und Eigenschaften . . . . .	5
1.2 Fréchet Hoeffding Schranken und Konkordanzordnung . . . . .	12
1.3 Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	19
1.4 Copula Dichte . . . . .	21
1.5 Bedingte Copulas . . . . .	22
<b>2 Bivariate Archimedische Copulas</b>	<b>25</b>
2.1 Archimedische Erzeuger und Konstruktion . . . . .	25
2.2 Einparametrische Archimedische Copula Familien . . . . .	29
2.3 Analytische Eigenschaften . . . . .	36
<b>3 Multivariate Archimedische Copulas</b>	<b>39</b>
3.1 Archimedische Copulas in höheren Dimensionen . . . . .	40
3.2 $d$ -Monotonie . . . . .	42
3.3 Notwendige und hinreichende Bedingung an Archimedische Erzeuger .	50
<b>4 Simulation</b>	<b>56</b>
4.1 Allgemeine und bedingte Inversionsmethode . . . . .	56
4.2 Simulation für Archimedische Copulas . . . . .	58
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>61</b>

# Einleitung

Die Modellierung von Abhängigkeiten gehört heutzutage zu den grundlegendsten Aufgaben im quantitativen Risikomanagement. Der lineare Pearsonsche Korrelationskoeffizient beispielsweise,

$$\text{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}},$$

ist seit Jahren ein Standardwerkzeug um den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  zu modellieren. Mit Werten aus dem Intervall  $[-1, 1]$  bestimmt er den Grad der linearen Abhängigkeit beider Zufallsvariablen, wobei ein Wert von -1 einen vollständig negativen linearen Zusammenhang und der Wert 1 einen vollständig positiven linearen Zusammenhang wiedergibt. Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen weisen dabei stets einen Korrelationskoeffizienten von 0 auf. An dieser Stelle können noch weitere andere bekannte Abhängigkeitsmaße wie der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient oder Kendall's Tau angeführt werden, jedoch ist ein gemeinsamer Nachteil dieser Abhängigkeitsmaße, dass die Stärke des Zusammenhangs über alle Beobachtungen hinweg konstant bleibt. Zufallsrealisationen die stark vom Mittelwert abweichen, wird hierbei eine ebenso starke Abhängigkeit unterstellt wie bei regulären Realisationen, was bei empirischen Beobachtungen jedoch häufig nicht zutrifft. Es verstärkt sich im Gegenteil sogar die Abhängigkeit von Ausreißern, was dazu führt, dass diese Art der Abhängigkeit nicht mehr durch klassische Korrelationsmaße erklärt werden kann. Da desweiteren die genannten Abhängigkeitsmaße symmetrisch sind und daher in den Beobachtungen positive und negative Ausreißer die gleiche Abhängigkeitsstärke besitzen, ergeben sich weitere Probleme. Diese Erfahrungen zeigten daher die Notwendigkeit einer präziseren Beschreibung von Abhängigkeiten auf.

An diesem Punkt bietet das Konzept der Copulas eine mächtige Alternative. Copulas sind mathematische Funktionen, die häufig in der modernen Finanzmarkttheorie und dem Versicherungswesen genutzt werden, um mehrdimensionale Zusammenhänge zu modellieren und Rückschlüsse auf die Art der stochastischen Abhängigkeit von Zufallsvariablen zu bekommen. Zu nennen sind hier beispielsweise das Portfoliomanagement, wo sich die Möglichkeit bietet Abhängigkeitsstrukturen zwischen Assets beliebig zu modellieren, oder die Kreditrisikoanalyse, um Aussagen über einen gehäuftem Bankrott mehrerer Schuldner innerhalb eines Anlagenportfolios zu machen. Eine der interessantesten und auch bekanntesten Copula Familien dabei ist die der Archimedischen Copulas, diese sollen im Vordergrund der Arbeit stehen. Diese erfreuen sich einer großen Popularität, da sie beispielsweise im Gegensatz zu anderen Copulas nicht symmetrisch sind, in dem Sinne, dass sie jeweils die gleiche untere und obere Abhängigkeitsstruktur in den Rändern besitzen. Gerade in der Finanzwelt wird dies benötigt, wenn größere Verluste eine stärkere Abhängigkeit aufweisen als große Gewinne oder umgekehrt. Desweiteren besitzen Archimedische Copulas viele praktische Eigenschaften, zum Beispiel können für Archimedische Copulas geschlossene Darstellungen innerhalb ihrer Klassen angegeben werden, ebenso ist die Anzahl an freien Parametern vergleichsweise gering.

Im ersten Kapitel wollen wir uns einfürend mit den theoretischen Grundlagen von Copulas beschäftigen, indem wir die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften angeben, die den Grundbaustein für die weitere Arbeit mit Archimedischen Copulas bildet.

Das zweite Kapitel wird das Konzept der Archimedischen Copulas für den bivariaten Fall einführen. Wir werden in diesem Kapitel die wichtigsten Eigenschaften dieser Klasse von Copulas kennenlernen und unter anderem sehen, warum ihnen eine so wichtige Bedeutung zukommt.

In Kapitel 3 werden wir den Begriff der Archimedischen Copulas auf den mehrdimensionalen Fall erweitern. Im Vordergrund steht hierbei eine hinreichende und notwendige Bedingung an sogenannte Archimedische Erzeugerfunktionen zu finden, die es uns ermöglichen multivariate Copulas zu konstruieren.

Das abschließende vierte Kapitel wird noch einen kurzen Bezug zu der praktischen Anwendung darstellen, indem wir eine Inversionsmethode vorstellen, um Zufallsrealisationen speziell aus Archimedischen Copulas heraus zu simulieren.

# 1 Theoretische Grundlagen von Copula Funktionen

Im ersten Kapitel wollen wir uns den wichtigsten Grundlagen der Copula-Theorie widmen, dabei werden wir nicht nur Copulas definieren, sondern uns auch mit den wichtigsten Eigenschaften beschäftigen. Desweiteren zeigen wir, dass für Copulas Schranken existieren, in denen sie sich bewegen, und auch eine partielle Ordnung für bestimmte Copulas definiert werden kann. Der Satz von Sklar wird danach im Vordergrund stehen, der letztendlich den Ausgangspunkt für sämtliche statistischen Anwendungen darstellt. Abschließend im Kapitel werden wir noch kurz die Begriffe der Copula Dichte und der bedingten Copulas anführen und definieren.

Das allgemeine Konzept der Copulas und ihrer Anwendungen ist in der Statistik ein noch sehr junges und modernes Phänomen, welches jedoch im Zeitverlauf immer mehr an Bedeutung gewonnen hat. Der Begriff „Copula“ wurde durch Abe Sklar [13] geprägt, dem es nach Forschungen Anfang der 1950er Jahren unter anderem von Maurice René Fréchet [4] und Giorgio Dall’Aglia [3] im Jahr 1959 erstmals gelang, einen Zugang zu der Beziehung zwischen multivariaten Verteilungsfunktionen und ihren univariaten Randverteilungen zu finden, indem er eine neue Klasse von Funktionen, den Copulas, begründete.

Das Wort Copula (*Pl. Copulas oder auch Copulae*) leitet sich ab aus dem Englischen „*to couple - verbinden*“, beziehungsweise aus dem Lateinischen „*Copula - Band*“. Grob gesprochen versteht man unter einer Copula eine Funktion, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Randverteilungsfunktionen verschiedener Zufallsvariablen und ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben kann. Sie sind demnach in der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Sta-

tistik ein beliebtes Instrument, um die Abhängigkeitsstruktur zwischen Zufallsvariablen zu beschreiben, da sie es auf einfache Art und Weise erlauben, bei separater Schätzung von Marginalverteilungen und Copula, die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors zu modellieren und zu schätzen. Es existiert eine Vielzahl von parametrischen Copula Familien, welche durch geeignete Wahl des Parameters die Art und Stärke der Abhängigkeit bestimmen können.

## 1.1 Definitionen und Eigenschaften

Bevor wir uns dem Begriff der Copula und ihren Eigenschaften genauer nähern, bedarf es der Definition der Differenzoperatoren, ein weiteres Hilfsmittel, das wir nicht nur für die Definition von  $d$ -dimensionalen Copulas nutzen, sondern auf die wir auch später bei der Konstruktion von multivariaten Archimedisches Copulas zurückkommen werden.

### **Definition 1.1.1** (*Differenzoperator*)

Sei  $f$  eine  $d$ -dimensionale, reelle Funktion,  $x \in \mathbb{R}$  und  $h = (h_1, \dots, h_d)^T \in \mathbb{R}^d$  mit  $h_i > 0$  für  $i = 1, \dots, d$ . Dann bezeichnen wir mit  $\Delta_h$  den durch

$$\Delta_h f(x) = \Delta_{h_d}^d \dots \Delta_{h_1}^1 f(x)$$

definierten *Differenzoperator*, wobei hier  $\Delta_{h_i}^i$  den durch

$$\Delta_{h_i}^i f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d)$$

gegebenen Differenzoperator erster Ordnung bezeichnet.

Um uns den Umgang mit dem Differenzoperator zu verdeutlichen, betrachten wir kurz das folgende Beispiel für eine bivariate, reelle Funktion.

**Beispiel 1.1.2**

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige, reelle Funktion, dann ist

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} f(x_1, x_2) &= \Delta_{h_2}^2 \Delta_{h_1}^1 f(x_1, x_2) \\
 &= \Delta_{h_2}^2 \left( \underbrace{f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)}_{\tilde{f}(x_1, x_2)} \right) \\
 &= \tilde{f}(x_1, x_2 + h_2) - \tilde{f}(x_1, x_2) \\
 &= \left( f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) \right) - \left( f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) \right) \\
 &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

Es lässt sich nun leicht folgern, dass in Hinsicht auf eine Verteilungsfunktion  $H$ , das Volumen des Intervalls  $(x, x + h] = (x_1, x_1 + h_1] \times \dots \times (x_d, x_d + h_d]$  bezüglich  $H$  auch mit dem Differenzoperator durch  $\Delta_h H(x)$  ausgedrückt werden kann.

$$V_H((x, x + h]) = \Delta_{h_d}^d \dots \Delta_{h_1}^1 H(x_1, \dots, x_d)$$

Ähnlich wie für univariate, monoton steigende Funktionen, sind wir nun in der Lage für  $d$ -dimensionale Funktionen analog die zugehörige dimensionserweiternde Eigenschaft zu definieren.

**Definition 1.1.3** (*d-steigend / quasi-monoton*)

Eine  $d$ -dimensionale reelle Funktion  $H$  heißt *d-steigend / quasi-monoton* (engl. *d-increasing*), falls für alle Hyperrechtecke  $A$ , deren Ecken im Definitionsbereich von  $H$  liegen,  $V_H(A) \geq 0$  gilt.

**Bemerkung:** Die bivariate Funktion  $f$  aus Beispiel 1.1.2, wäre also in unserem Fall 2-steigend / quasi-monoton, wenn für alle  $(x_1, x_1 + h_1] \times (x_2, x_2 + h_2] \in \text{Dom}(f)$  gilt:

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1, x_2) \geq 0$$

An dieser Stelle wollen wir jedoch noch einmal festhalten, dass wenn  $H$  eine quasi-monotone Funktion ist, daraus nicht folgt, dass  $H$  monoton steigend in jedem Argument ist. Ebenso wenig gilt die Umkehrung, dass Funktionen die in jedem Argument monoton steigend sind notwendigerweise quasi-monoton sein müssen. Diesen Sachverhalt wollen wir uns in den zwei folgenden Gegenbeispielen verdeutlichen.

**Beispiel 1.1.4**

Sei  $H$  eine bivariate Funktion auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$ , gegeben durch  $H(x, y) = \max\{x, y\}$ , so ist  $H$  monoton steigend in jedem Argument, da für  $x_1 \leq x_2$  gilt  $\max\{x_1, y\} \leq \max\{x_2, y\}$  für alle  $y \in [0, 1]$ , beziehungsweise, weil für  $y_1 \leq y_2$  gilt  $\max\{x, y_1\} \leq \max\{x, y_2\}$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Allerdings ist  $H$  nicht quasi-monoton, da

$$V_H([0, 1]^2) = H(1, 1) - H(0, 1) - H(1, 0) + H(0, 0) = -1 \not\geq 0.$$

**Beispiel 1.1.5**

Sei  $H$  wieder eine bivariate Funktion auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$ , gegeben durch  $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$ . Dann ist  $H$  quasi-monoton, denn es gilt

$$\begin{aligned} V_H((x_1, y_1] \times (x_2, y_2]) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= 4x_2y_2 - 2x_2 - 2y_2 + 1 - 4x_2y_1 + 2x_2 + 2y_1 - 1 \\ &\quad - 4x_1y_2 + 2x_1 + 2y_2 - 1 + 4x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 1 \\ &= 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Allerdings ist  $H$  nicht monoton steigend in jedem Argument, denn für  $x < \frac{1}{2}$  ist  $H$  monoton fallend für  $y \in (\frac{1}{2}, 1]$ , sowie analog für  $y < \frac{1}{2}$  ist  $H$  monoton fallend für  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

Fügen wir jedoch einer quasi-monotonen Funktion noch die Eigenschaft der sogenannten *Wohlfundiertheit* (engl. *groundedness*) hinzu, so können wir noch ein Argument dafür liefern, dass zumindest die Allgemeingültigkeit der Hinrichtung der

obigen Argumentation stützt.

Eine Funktion heißt im folgenden Sinne wohlfundiert, wenn sie in nur einem beliebigen Argument den kleinsten Wert ihres jeweiligen Definitionsbereiches annimmt, und in diesem Fall immer auf den Funktionswert 0 abbildet.

Um bereits auf die Definition von unserer  $d$ -dimensionalen Copula vorzubereiten, nehmen wir in der folgenden Aussage für die Wohlfundiertheitseigenschaft an, dass unsere Funktion  $H$  von  $[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  abbildet, jedoch könnten wir für die folgende Aussage auch beliebig andere Definitions- und Bildbereiche annehmen.

**Satz 1.1.6** (siehe Nelsen [9])

Sei  $H(u_1, \dots, u_d) : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion für die gilt:

- (i)  $H(u_1, \dots, u_d) = 0$ , falls für mindestens ein  $1 \leq i \leq d$  gilt  $u_i = 0$
- (ii)  $H$  ist quasi-monoton auf  $[0, 1]^d$

Dann ist  $H$  monoton steigend in allen Argumenten  $u_1, \dots, u_d$ .

Da wir nun mit der Eigenschaft der Quasi-Monotonie und Wohlfundiertheit für multivariate Funktionen vertraut sind, können wir im Folgenden eine Definition für  $d$ -dimensionale Copulas angeben.

**Definition 1.1.7** ( *$d$ -dimensionale Copula*)

Als eine  *$d$ -dimensionalen Copula* bezeichnen wir eine Funktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , die folgende Eigenschaften besitzt:

- (i)  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ , falls für mindestens ein  $1 \leq i \leq d$  gilt  $u_i = 0$
- (ii)  $C(u_1, \dots, u_d) = u_j$ , falls für alle  $1 \leq i \leq d$  gilt  $u_i = 1$ , bis auf genau eine Komponente  $1 \leq j \leq d$  mit  $u_j \in [0, 1]$

(iii)  $C$  ist quasi-monoton auf  $[0, 1]^d$ , das heißt für jedes Hyperrechteck

$A = \prod_{i=1}^d [u_i, v_i] \subseteq [0, 1]^d$  gilt:

$$V_C(A) := \Delta_{(v-u)} C(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k \in \prod_{i=1}^d \{u_i, v_i\}} (-1)^{N(k)} C(k) \geq 0$$

wobei  $N(k) := |\{j | k_j = u_j\}|$  und  $(v - u) = (v_1 - u_1, \dots, v_d - u_d)^T$  ist.

Anders ausgedrückt verstehen wir also unter einer Copula eine multivariate Verteilungsfunktion, deren eindimensionale Randverteilungen gleichverteilt auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  sind.

**Bemerkung:** Zusammen mit den Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 1.1.7 und Satz 1.1.6 können wir schlussfolgern, dass die Copula wiederum nur Werte auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  annimmt. Für alle  $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$  gilt also  $0 \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq 1$ .

Da Copulas eine Verteilungsfunktion von  $[0, 1]^d$  nach  $[0, 1]$  darstellen, induziert eine Copula ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $[0, 1]^d$  gegeben durch

$$V_C([0, u_1] \times \dots \times [0, u_d]) = C(u_1, \dots, u_d).$$

Dieses Maß wird als  $C$ -Maß bezeichnet.

**Bemerkung:** Ist  $C$  eine  $d$ -dimensionale Copula, so ist für  $k < d$  jede  $k$ -dimensionale Randverteilung wiederum eine  $k$ -dimensionale Copula.

Erfüllt eine Funktion  $\mathcal{C}$  die Bedingungen (i) bis (iii) von Definition 1.1.7, jedoch mit Definitionsbereich  $\text{Dom}(\mathcal{C}) \subset [0, 1]^d$ , der aber in jedem Argument die Werte 0 und 1 enthält, so bezeichnen wir diese als *Teilcopula* (engl. *subcopula*). Die Teilcopula  $\mathcal{C}$  übernimmt größtenteils die selben Eigenschaften wie die Copula  $C$ .

Da Copulas am häufigsten im zweidimensionalen Fall Anwendung finden und wir einen Großteil unserer Betrachtungen der Eigenschaften und Anwendungen auf diesen Fall reduzieren werden, übertragen wir unsere Bedingungen aus Definition 1.1.7 nochmals auf bivariate Copulas.

**Definition 1.1.8** (*Bivariate Copula*)

Als eine bivariate Copula bezeichnen wir eine Funktion  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  die folgende Eigenschaften besitzt:

- (i)  $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$  für alle  $u, v \in [0, 1]$
- (ii)  $C(u, 1) = u$  und  $C(1, v) = v$  für alle  $u, v \in [0, 1]$
- (iii)  $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$  für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$

Um uns diese Eigenschaften etwas näher zu verdeutlichen, betrachten wir eines der einfachsten Beispiele für eine bivariate Copula, der Produktcopula  $\Pi(u, v) = uv$ , und weisen nach, dass diese alle Bedingungen für eine Copula erfüllt. Es handelt sich dabei um die wohl bekannteste Copula, die wir kennenlernen werden. Man findet sie häufig auch unter dem Namen Unabhängigkeitscopula, da sie genau dann Anwendung findet, wenn die gemeinsame Verteilung zweier unabhängiger Zufallsvariablen als Produkt aus den marginalen Verteilungen dargestellt werden kann.

**Beispiel 1.1.9**

Der Nachweis der beiden ersten Bedingungen von Definition 1.1.8 sind trivial. Betrachten wir daher nur die Quasi-Monotonie. Nach der dritten Bedingung von Definition 1.1.8 folgt also

$$\begin{aligned} u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_1v_1 \geq 0 &\iff u_1v_1 - u_1v_2 \geq u_2v_1 - u_2v_2 \\ &\iff u_1(v_1 - v_2) \geq u_2(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

Da  $u_1 \leq u_2$  und  $v_1 \leq v_2$  gilt und somit  $v_1 - v_2 \leq 0$  ist, ist auch die Ungleichung für alle  $(u_1, v_1)^T, (u_2, v_2)^T \in [0, 1]^2$  erfüllt.

Betrachten wir weiterhin den bivariaten Fall, so können wir weiter Aussagen über die Differenzierbarkeit der Copula machen und durch eine Lipschitz-Bedingung auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  die Stetigkeit einer Copula  $C$  begründen.

**Satz 1.1.10** (siehe Cherubini et al. [2])

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial C}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial C}{\partial u_d}$  der  $d$ -dimensionalen Copula  $C(u_1, \dots, u_d)$  existieren auf  $(0, 1)^d$  fast überall und nehmen Werte auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  an.

**Satz 1.1.11** (siehe Cherubini et al. [2])

Sei  $C$  eine Copula, dann gilt für alle  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$  mit  $u_1 \neq u_2$  und  $v_1 \neq v_2$ ,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

Somit ist die Copula  $C$  gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich  $[0, 1]^2$ .

Wollen wir uns schließlich noch den sogenannten horizontalen, vertikalen und diagonalen Schnitten einer Copula zuwenden. Diese werden unter anderem genutzt, um Copulas zu konstruieren oder gewissen Abhängigkeitseigenschaften auszuwerten.

**Definition 1.1.12** (*horizontale, vertikale und diagonale Schnitt*)

Sei  $C$  eine Copula und  $a$  eine beliebige, reelle Zahl auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$ . Dann bezeichnet der *horizontale Schnitt* von  $C$  in  $a$  die Funktion  $C_{h,a} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch  $C_{h,a}(x) = C(x, a)$ , der *vertikale Schnitt* von  $C$  in  $a$  die Funktion  $C_{v,a} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch  $C_{v,a} = C(a, x)$  und der *diagonale Schnitt* die Funktion  $\delta_C(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch  $\delta_C(x) = C(x, x)$ .

**Korollar 1.1.13** (siehe Nelsen [9])

Die horizontalen, vertikalen und diagonalen Schnitte einer Copula  $C$  sind monoton steigend und gleichmäßig stetig auf dem Intervall  $[0, 1]$ .

## 1.2 Fréchet Hoeffding Schranken und Konkordanzordnung

Im folgenden Abschnitt wollen wir zeigen, dass Schranken existieren, in denen sich die Copulas bewegen. Wie wir sehen werden, sind diese Schranken unter bestimmten Bedingungen selbst wieder Copulas, was uns desweiteren dazu motivieren wird, eine partielle Ordnung für gewisse Copulas zu definieren.

**Satz 1.2.1** (*Fréchet-Hoeffding Schranken*, siehe Cherubini et al. [2])

Für jede  $d$ -dimensionale Copula  $C$  gilt die *untere Fréchet-Hoeffding Schranke*

$$C(u_1, \dots, u_d) \geq \max\left\{\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right\} =: W(u_1, \dots, u_d)$$

und die *obere Fréchet-Hoeffding Schranke*

$$C(u_1, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\} =: M(u_1, \dots, u_d).$$

Die Grenzen selbst stellen für den bivariaten Fall wiederum Copulas dar. Die untere Fréchet-Hoeffding Schranke ist jedoch lediglich für den Fall  $d = 2$  eine Copula, sie wird als *Maximumscopula*  $W(u, v) = \max\{u + v - 1\}$  bezeichnet und gibt die perfekte negative stochastischen Abhängigkeit an. Die obere Grenze ist die sogenannte *Minimumscopula*  $M(u, v) = \min\{u, v\}$ . Sie entspricht der perfekten positiven stochastischen Abhängigkeit und ist auch für Dimensionen  $d \geq 2$  wieder eine Copula. Mit perfekter positiver / negativer stochastischen Abhängigkeit, ist hierbei nichts anderes als die totale positive / negative Korrelation gemeint.

Somit können wir für den bivariaten Fall sehen, dass sich jede Copula  $C$  zwischen der sogenannten Maximums- und Minimumscopula bewegt:

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v), \quad \text{für alle } (u, v)^T \in [0, 1]^2$$

**Bemerkung:** Mit dem obigen Satz lässt sich nun auch folgern, dass die Wohlfundiertheitseigenschaft für Copulas  $C(u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_d) = 0$  für alle  $j \in$

$\{1, \dots, d\}$  stets erfüllt ist, denn nimmt die Minimumscopula  $M$  in einem Argument  $u_j$  den Wert 0 an, so gilt

$$M(u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_d\} = 0$$

und wir wissen, dass stets  $0 \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq M(u_1, \dots, u_d)$  gilt.

Dass die Maximumscopula  $W$  für  $d > 2$  keine Copula darstellt, lässt sich durch ein allgemeines Gegenbeispiel demonstrieren.

### Beispiel 1.2.2

Betrachten wir beispielsweise das Volumen des  $d$ -dimensionalen Hyperrechtecks  $[\frac{1}{2}, 1]^d \subset [0, 1]^d$  bezüglich  $W^d$ , so sehen wir dass

$$\begin{aligned} V_{W^d} \left( \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]^d \right) &= \underbrace{\max\{1 + \dots + 1 - d + 1, 0\}}_{=1} \\ &\quad - d \underbrace{\max\{\frac{1}{2} + 1 + \dots + 1 - d + 1\}}_{=\frac{1}{2}} \\ &\quad + \binom{d}{2} \underbrace{\max\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \dots + 1 - d + 1, 0\}}_{=0} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \underbrace{\max\{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - d + 1, 0\}}_{=0} \\ &= 1 - \frac{d}{2} \not\geq 0 \end{aligned}$$

für  $d > 2$  ist. Demnach ist die Quasi-Monotonie im Allgemeinen für  $d > 2$  nicht erfüllt.

Auch wenn die Maximumscopula für  $d > 2$  keine Copula darstellt, wollen wir dennoch im Folgenden eine Aussage darüber machen, dass für alle  $d$ -dimensionalen Tupel  $(u_1, \dots, u_d)$  eine Copula  $C$  gefunden werden kann, so dass  $C(u_1, \dots, u_d) = W^d(u_1, \dots, u_d)$  gilt, was wiederum bedeutet, dass auch die untere Fréchet-Hoeffding

Schranke nicht weiter verbessert werden kann.

**Satz 1.2.3** (siehe Nelsen [9])

Für jedes  $u = (u_1, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$  existiert eine Copula  $C_u$ , so dass die Gleichung  $C_u(u_1, \dots, u_d) = W^d(u_1, \dots, u_d)$  erfüllt ist.

Um einen besseren, intuitiven Zugriff auf die formale Charakterisierung der Fréchet-Hoeffding Grenzen zu erhalten, wollen wir die dreidimensionalen Graphen der Minimumscopula  $M$  in Abbildung 1.1 und Maximumscopula  $W$  in Abbildung 1.2 visuell darstellen.

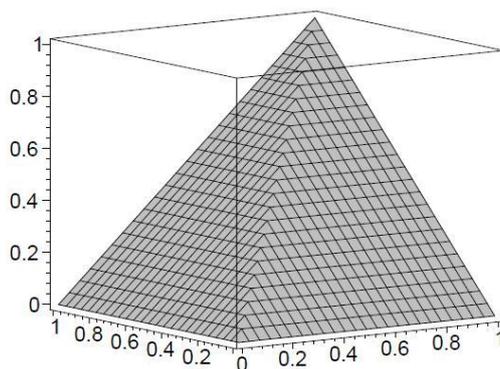


Abbildung 1.1: Obere Fréchet-Hoeffding Schranke  $M(u, v)$

Um das Beispiel 1.1.9 aufzugreifen, betrachten wir in Abbildung 1.3 auch den Graphen der Produktcopula  $\Pi(u, v) = uv$ , um zu verdeutlichen, dass diese sich innerhalb dieser beiden Grenzen bewegt.

Der Graph einer bivariaten Copula stellt somit eine stetige Fläche innerhalb des Einheitswürfels  $[0, 1]^3$  dar, welche durch das Viereck mit den Eckpunkten  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  und  $(1,1,1)$  begrenzt wird. Nach Satz 1.2.1 bewegt sich dieser Graph

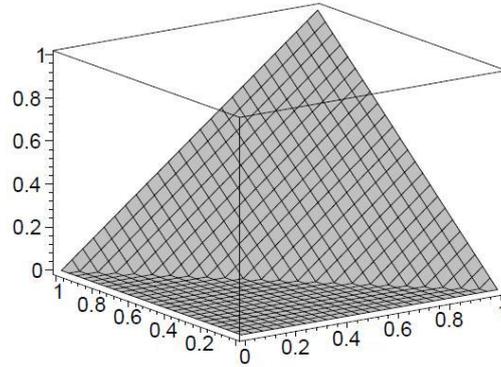


Abbildung 1.2: Untere Fréchet-Hoeffding Schranke  $W(u, v)$

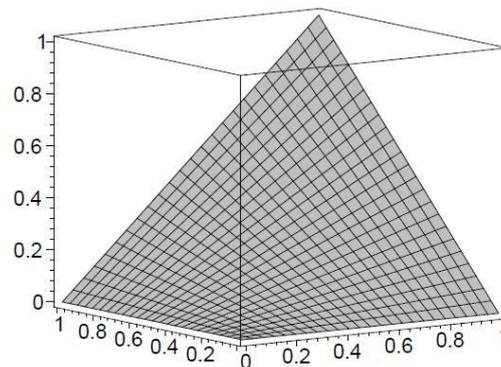


Abbildung 1.3: Produktcopula  $\Pi(u, v)$

zwischen den Fréchet-Hoeffding Schranken. In Abbildung 1.4 haben wir die beiden Graphen von  $W$  und  $M$  zusammengefasst, so dass diese einen Vierflächner erzeugen, in dem alle stetigen Copulaflächen liegen.

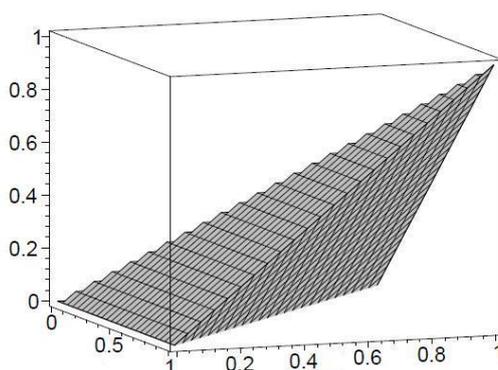


Abbildung 1.4: Durch  $W$  und  $M$  erzeugte Vierflächner

Betrachten wir weiter für den zweidimensionalen Fall die Menge der Punkte auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$ , für die die Copula jeweils den selben konstanten Wert annimmt, also  $C(u, v) = k$  wobei  $k \in [0, 1]$  ist. Dann können wir mittels der sogenannten *Konturlinien* noch auf etwas anschaulichere Weise die Form und Gestalt der Copulas betrachten und auch hier wieder in der folgenden Abbildung 1.5 am Beispiel der Produktcopula  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : uv = k\}$  sehen, dass sich diese genau zwischen der oberen Grenze  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : \min(u, v) = k\}$  und unteren Grenze  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : \max(u + v - 1, 0) = k\}$  der Fréchet-Hoeffding Schranken bewegt.

**Bemerkung:** Steigt unsere festgesetzte Konstante  $k$  in ihrem Wert, so verschiebt sich die Konturlinie nach rechts oben.

Die Existenz einer oberen und unteren Grenze motiviert uns zur weiteren Definition einer Konkordanzordnung für Copulas.

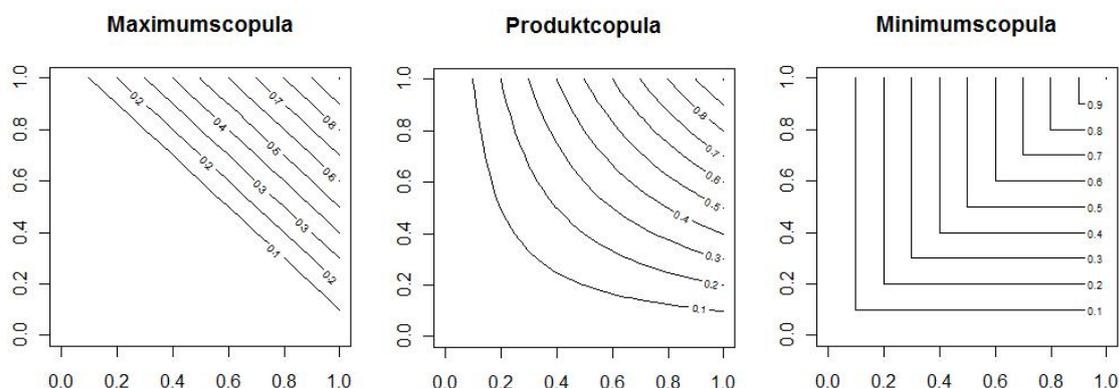


Abbildung 1.5: Konturliniendiagramm der bivariaten Maximumscopula  $W(u, v)$ , Produktcopula  $\Pi(u, v)$  und Minimumscopula  $M(u, v)$

**Definition 1.2.4** (*Konkordanzordnung*)

Seien zwei Copulas  $C_1$  und  $C_2$  gegeben, dann heißt  $C_1$  kleiner als  $C_2$ , geschrieben als  $C_1 \prec C_2$ , falls für alle  $(u, v)^T \in [0, 1]^2$  gilt

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v).$$

Da nicht alle Copulas miteinander verglichen werden können, handelt es sich hierbei jedoch nur um eine partielle Ordnung. Um uns dies zu verdeutlichen, betrachten wir folgendes Beispiel.

**Beispiel 1.2.5**

Eine weitere nützliche Eigenschaft der Maximums- und Minimumscopula ist, dass jede konvexe Linearkombination aus diesen beiden Copulas wiederum eine Copula ist.

$$C(u, v) = \lambda W(u, v) + (1 - \lambda)M(u, v), \quad \lambda \in (0, 1)$$

Betrachten wir beispielsweise für  $\lambda = \frac{1}{3}$  den Fall

$$C(u, v) = \frac{1}{3}W(u, v) + \frac{2}{3}M(u, v).$$

Es lassen sich nun leicht Punkte auf unserem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  finden, so dass bezogen auf unsere Produktcopula  $\Pi(u, v)$  für  $u = v = \frac{1}{2}$  gilt

$$\frac{1}{3} \max(u + v - 1, 0) + \frac{2}{3} \min(u, v) = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = uv$$

und somit  $C(u, v) > W(u, v)$  folgt. Wählen wir jedoch nun  $u = \frac{1}{4}$  und  $v = \frac{3}{4}$ , so gilt wegen

$$\frac{1}{3} \max(u + v - 1, 0) + \frac{2}{3} \min(u, v) = \frac{1}{6} < \frac{3}{16} = uv$$

dann  $C(u, v) < W(u, v)$ , so dass wir auf diesen beiden Copulas keine Konkordanzordnung definieren können.

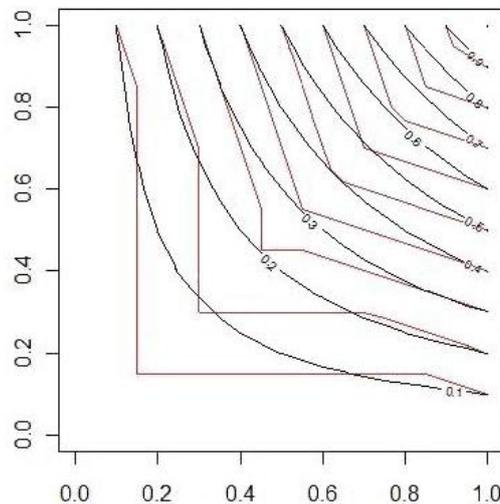


Abbildung 1.6: Überschneidung der Produktcopula  $\Pi$  (schwarz) und der aus Maximums- und Minimumscopula konvex linear kombinierten Copula  $C$  (rot)

**Bemerkung:** Anschaulich bedeutet dies also, dass wir für zwei Copulas eine Konkordanzordnung definieren können, solange sich ihre Konturlinien für ein konstantes  $k \in [0, 1]$  nicht überschneiden. In Abbildung 1.6 können wir die Überschneidung von unserer Produktcopula  $\Pi = uv$  und der aus Maximums- und Maximumscopula konvex linear kombinierten Copula  $C(u, v) = \frac{1}{3}W(u, v) + \frac{2}{3}M(u, v)$  betrachten.

### 1.3 Existenz und Eindeutigkeit

Die wohl zentralste Rolle in der Theorie der Copulas spielt der Satz von Sklar, da er den Ausgangspunkt für die statistischen Anwendungen bildet. Mit diesem Satz können wir sicherstellen, dass aus stetigen Marginalverteilungen und einer Copula stets eine eindeutig definierte multivariate Verteilung resultiert. Umgekehrt lässt sich somit aus multivariaten Verteilungen mit gegebenen stetigen Marginalverteilungen stets eine eindeutig definierte Copula extrahieren, die ihrerseits auf andere Marginalverteilungen angewendet werden kann.

Die überaus hohe Flexibilität dieses Modellierungsansatzes hat dazu geführt, dass Copula Modelle gerade im Bereich der Finanz- und Versicherungsmathematik, aber auch in anderen Bereichen der angewandten Mathematik sehr an Beliebtheit gewonnen haben.

**Satz 1.3.1** (*Satz von Sklar*, siehe Sklar [13])

- (i) Sei  $F$  eine multivariate Verteilungsfunktion mit Marginalverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , sodass für alle  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  gilt

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Sind insbesondere  $F_1, \dots, F_d$  stetig, dann ist die Copula  $C$  eindeutig bestimmt.

- (ii) Umgekehrt gilt: Ist  $C$  eine Copula und sind  $F_1, \dots, F_d$  univariate Verteilungsfunktionen, dann ist die durch

$$F(x_1, \dots, x_d) := C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

definierte Verteilung eine multivariate Verteilung, die genau die vorgegebenen Marginalverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  besitzt.

Die erste Aussage besagt, dass sich jede beliebige Verteilung zerlegen lässt in Marginalverteilungen einerseits und ihren Copulas andererseits, in der die Information

über die Abhängigkeiten zwischen den Marginalverteilungen enthalten ist. Demnach können Copulas prinzipiell alle möglichen Arten von Abhängigkeiten abbilden. Die Copula ist jedoch nur eindeutig bestimmt, wenn die einzelnen Marginalverteilungen stetig sind. Zunächst wird in (i) nur eine Aussage über die Existenz der Copula  $C$  gemacht, interessant wäre es jedoch auch zu wissen, wie zu einer vorgegebenen Verteilungsfunktion  $F$  und Marginalverteilungen  $F_1, \dots, F_n$  die Copula  $C$  gefunden werden kann. Dies ist in der Tat möglich, es gibt in diesem Fall sogar eine explizite Formel für unsere Copula  $C$ , nämlich

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)).$$

Das heißt, die Copula erhält man, indem die Quantilfunktionen (inversen Verteilungsfunktionen) der Einzelverteilungen

$$F_i^{-1}(u_i) := \inf\{x_i \in \mathbb{R} : F_i(x_i) \geq u_i\}$$

für  $1 \leq i \leq d$  in die gemeinsame Verteilungsfunktion eingesetzt werden.

Betrachten wir den ersten Teil des Satzes von Sklar und setzen  $F_i(x_i) = u_i$  für  $i = 1, \dots, d$ . Da die  $F_1, \dots, F_d$  Ränder einer Verteilungsfunktion sind, sind sie somit auch Randverteilungsfunktionen und wir können somit für diese die Quantilfunktionen  $x_1 = F_1^{-1}(u_1), \dots, x_d = F_d^{-1}(u_d)$  bestimmen. Es folgt also

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)), \text{ sowie}$$

$$C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = C(u_1, \dots, u_d).$$

Eingesetzt in die Gleichung  $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$  erhalten wir die explizite Formel für unsere Copula.

Umgekehrt gibt die zweite Aussage des Satzes von Sklar eine Methode an, mit der aus  $d$  Einzelverteilungen eine einzige gemeinsame Verteilung gewonnen werden kann: Man setzt dazu die einzelnen Verteilungsfunktionen in eine Copula ein. Dann ist die resultierende Funktion  $F$  tatsächlich eine Verteilungsfunktion, die außerdem die wichtige Eigenschaft besitzt, dass sie die vorgegebenen Einzelverteilungen als Randverteilung reproduziert.

## 1.4 Copula Dichte

Motiviert durch den Zerlegungssatz von Lebesgue lässt sich jede  $d$ -dimensionale Copula in einen absolutstetigen Teil  $A_C$  und singulären Teil  $S_C$  zerlegen.

$$C(u_1, \dots, u_d) = A_C(u_1, \dots, u_d) + S_C(u_1, \dots, u_d)$$

Den absolutstetigen Teil können wir dabei bestimmen durch

$$A_C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_d} \frac{\partial^d}{\partial v_1 \dots \partial v_d} C(v_1, \dots, v_d) dv_1 \dots dv_d$$

und der singuläre Teil ergibt sich demnach aus  $S_C(u_1, \dots, u_d) = C(u_1, \dots, u_d) - A_C(u_1, \dots, u_d)$ . Jedoch erfüllen weder der absolutstetige Teil noch der singuläre Teil die Eigenschaften für Copulas, die wir in Definition 1.1.7 kennengelernt haben.

### Definition 1.4.1 (Copula Dichte)

Sei  $H$  eine multivariate, absolutstetige Verteilungsfunktion des  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_d)^T$  mit absolutstetiger Copula  $C$ ,  $h$  die gemeinsame Dichtefunktion von  $H$  und  $h_i$  die Dichten der einzelnen stetigen marginalen Verteilungen  $H_i$ . Dann berechnet sich die gemeinsame Dichte  $h$  als

$$\begin{aligned} h(u_1, \dots, u_d) &= \frac{\partial^d H(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \\ &= \frac{\partial^d C(H_1(u_1), \dots, H_d(u_d))}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \\ &= \frac{\partial^d C(H_1(u_1), \dots, H_d(u_d))}{\partial H_1(u_1) \dots \partial H_d(u_d)} \prod_{i=1}^d \frac{\partial H_i(u_i)}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

Die *Copula Dichte*  $c$  definieren wir nun durch

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}.$$

Somit können wir die gemeinsame Dichte  $h$  als Produkt aus der Copula Dichte  $c$  und der gemeinsamen Dichte der Zufallsvariablen im Falle der Unabhängigkeit formulieren.

Die Copula-Dichte kann unter anderem dazu genutzt werden, um gegebene Daten an eine Copula anzupassen.

## 1.5 Bedingte Copulas

Wenden wir uns nun der Beschreibung von Abhängigkeitseigenschaften von Copulas in Bezug auf Ereignisse zu. Sei dazu im Folgenden  $Z$  eine reelle Zufallsvariable, auf die bedingt werden soll, und  $\mathcal{Z} = \sigma(Z)$  die zugehörige von  $Z$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

### Definition 1.5.1 (*d*-dimensionale bedingte Copula)

Als eine  $d$ -dimensionale, auf  $Z$  bedingte Copula bezeichnen wir eine Funktion  $C : [0, 1]^d \times \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$ , die folgende Eigenschaften besitzt:

- (i)  $C(u_1, \dots, u_d | z) = 0$ , falls für mindestens ein  $1 \leq i \leq d$  gilt  $u_i = 0$ ,  $z \in \mathcal{Z}$
- (ii)  $C(u_1, \dots, u_d | z) = u_j$ , falls für alle  $1 \leq i \leq d$  gilt  $u_i = 1$ , bis auf genau eine Komponente  $1 \leq j \leq d$  mit  $u_j \in [0, 1]$ ,  $z \in \mathcal{Z}$
- (iii)  $C$  ist quasi-monoton auf  $[0, 1]^d$ , das heißt für jedes Hyperrechteck  $A = \prod_{i=1}^d [u_i, v_i] \subseteq [0, 1]^d$  gilt:

$$V_C(A) := \Delta_{(v-u)} C(u_1, \dots, u_d | z) = \sum_{k \in \prod_{i=1}^d \{u_i, v_i\}} (-1)^{N(k)} C(k | z) \geq 0$$

wobei  $N(k) := |\{j | k_j = u_j\}|$ ,  $(v - u) = (v_1 - u_1, \dots, v_d - u_d)^T$  und  $z \in \mathcal{Z}$  gilt.

Analog wie für den unbedingten Fall, kann auch hier eine bedingte Version des Satzes von Sklar formuliert werden.

**Satz 1.5.2** (*Satz von Sklar für bedingte Copulas*)

- (i) Sei  $F(\cdot, \dots, \cdot \mid \mathcal{Z})$  eine multivariate bedingte Verteilungsfunktion mit Randverteilungen  $F_1(\cdot \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(\cdot \mid \mathcal{Z})$ . Dann existiert eine bedingte Copula  $C : [0, 1]^d \times \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$ , sodass für alle  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  gilt

$$F(x_1, \dots, x_d \mid \mathcal{Z}) = C(F_1(x_1 \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(x_d \mid \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z}).$$

Wenn  $F_1(\cdot \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(\cdot \mid \mathcal{Z})$  stetig sind, dann ist die bedingte Copula eindeutig bestimmt.

- (ii) Umgekehrt gilt: Ist  $C(\cdot, \dots, \cdot \mid \mathcal{Z})$  eine bedingte Copula und sind  $F_1(\cdot \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(\cdot \mid \mathcal{Z})$  eindimensionale, bedingte Verteilungsfunktionen, dann ist die durch

$$F(x_1, \dots, x_d \mid \mathcal{Z}) := C(F_1(x_1 \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(x_d \mid \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z})$$

definierte bedingte Verteilung eine multivariate bedingte Verteilung, die genau die vorgegebenen bedingten Randverteilungsfunktionen  $F_1(\cdot \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d(\cdot \mid \mathcal{Z})$  besitzt.

**Bemerkung:**

Haben wir unsere bedingte Verteilungsfunktion mit ihren bedingten Randverteilungen gegeben, so können wir auch hier wieder explizit eine Formel für unsere bedingte Copula angeben, und zwar

$$C(u_1, \dots, u_d \mid \mathcal{Z}) = F(F_1^{-1}(u_1 \mid \mathcal{Z}), \dots, F_d^{-1}(u_d \mid \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z}).$$

Mittels Copulas lassen sich nun auch Ausdrücke für bedingte Verteilungsfunktionen angeben. Nach Satz 1.1.10 wissen wir, dass die partiellen Ableitungen einer Copula fast überall existieren. Für einen Zufallsvektor  $U = (U_1, \dots, U_d)^T$  mit Copula  $C$  können wir unter anderem auch die folgenden Ableitungen  $k$ -ter Ordnung bestimmen:

$$C^{(k)}(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^k C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_k}$$

Haben wir nun feste Werte für die Zufallsvariablen  $U_1, \dots, U_{k-1}$  gegeben, dann ist die Dichte der bedingten Verteilung für  $U_k$  gegeben durch

$$h_{U_k|U_1, \dots, U_{k-1}}(t | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\partial^k C^{(k)}(t, u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial t \partial u_1, \dots, \partial u_{k-1}} \left( \frac{\partial^{k-1} C^{(k-1)}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1, \dots, \partial u_{k-1}} \right)^{-1}$$

Es folgt also für die bedingte Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $U_k$  für  $k = 2, \dots, d$ :

$$\begin{aligned} C^{(k)}(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\ &= \int_0^{u_k} h_{U_k|U_1, \dots, U_{k-1}}(t | u_1, \dots, u_{k-1}) dt \\ &= \frac{\partial^{k-1} C^{(k)}(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1, \dots, \partial u_{k-1}} \left( \frac{\partial^{(k-1)} C^{(k-1)}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1, \dots, \partial u_{k-1}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

## 2 Bivariate Archimedische Copulas

Im folgenden Kapitel wollen wir uns einer der wichtigsten und interessantesten Klassen innerhalb der Copulas widmen, den Archimedischen Copulas. Es gibt eine Vielzahl von Gründen, warum sie eine breite Anwendung in der Modellierung finden. Zum einen sei da die Einfachheit durch die sie konstruiert werden können, andererseits die große Vielfalt an Copula Familien die dieser Klasse angehören und nicht zu vergessen die vielen praktischen Eigenschaften, die sie besitzen.

Wir werden uns damit beschäftigen, wie sie im Zweidimensionalen konstruiert werden und welche Eigenschaften die sogenannten Erzeugerfunktion mitbringen müssen, damit durch sie bivariate Archimedische Copulas generiert werden können. Ebenfalls werden wir mehrere einparametrische Archimedische Copula Familien genauer betrachten und uns anschließend den analytischen Eigenschaften dieser Klasse von Copulas widmen.

### 2.1 Archimedische Erzeuger und Konstruktion

Um im Folgenden Archimedische Copulas zu konstruieren, wollen wir uns vorher mit bestimmten Funktionen und ihren zugehörigen Inversen beschäftigen, die solche Copulas erzeugen können.

**Definition 2.1.1** (*Archimedischer Erzeuger*):

Eine monoton fallende, stetige Funktion  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  bezeichnen wir als *Archimedischen Erzeuger*, wenn sie die Bedingungen  $\psi(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$  erfüllt und diese streng monoton fallend auf dem Intervall  $[0, \inf\{x : \psi(x) = 0\}]$  ist.

Die zugehörige Inverse  $\psi^{-1}$  ist ebenfalls streng monoton fallend auf ihrem Definitionsbereich  $[0, 1]$ . Gilt insbesondere  $\inf\{x : \psi(x) = 0\} = \infty$ , so bezeichnen wir  $\psi$  als *strikten* Archimedischen Erzeuger.

In Abbildung 2.1 können wir die graphische Unterscheidung zwischen striktem und nicht striktem Erzeuger beobachten, wobei bei der nicht strikten Erzeugerfunktionen  $\psi$  die Bijektivität nur auf dem Intervall  $[0, \inf\{x : \psi(x) = 0\}]$  gewährleistet ist.

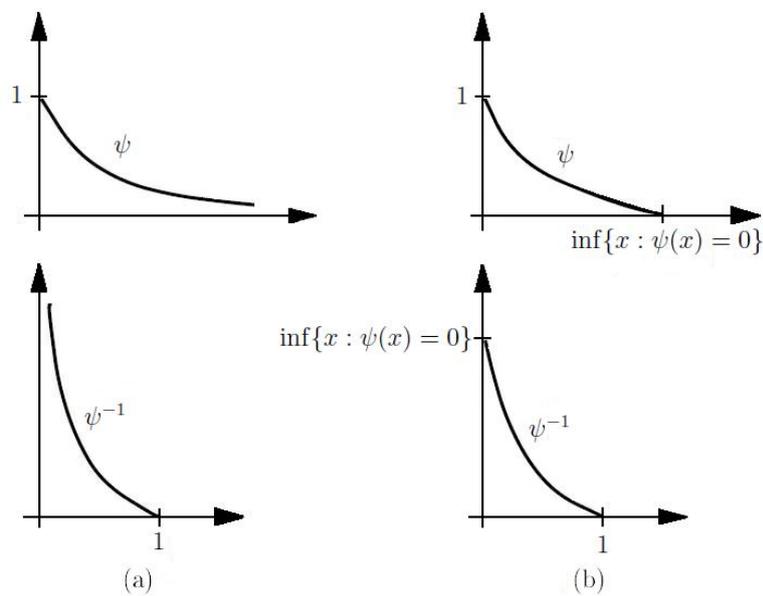


Abbildung 2.1: Strikte (a) und nicht strikte (b) Erzeugerfunktion mit zugehöriger Inversen

Kommen wir nun an den Punkt, an dem wir mit unserer Erzeugerfunktion  $\psi$  und der zugehörigen Inversen  $\psi^{-1}$  unter gewissen Voraussetzungen eine bivariate Copula generieren können.

**Definition 2.1.2** (*Bivariate Archimedische Copula*)

Wir bezeichnen eine *bivariate Copula* als *Archimedisch*, falls sie für einen Archimedischen Erzeuger  $\psi$  und seiner Inversen  $\psi^{-1}$  folgende Darstellung hat:

$$C(u, v) = \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v)), \quad u, v \in [0, 1].$$

**Satz 2.1.3** (siehe Alsina et al. [1])

Sei  $\psi$  ein Archimedischer Erzeuger, dann ist für  $u, v \in [0, 1]$  die durch

$$C(u, v) = \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v))$$

gegebene Funktion eine *Archimedische Copula*, genau dann wenn  $\psi$  konvex ist, das heißt für alle  $x, y \in \mathbb{R}_+$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt  $\psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\psi(x) + (1 - \lambda)\psi(y)$ .

Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass die Bedingung (iii) von Definition 1.1.7 für einen beliebigen, nicht konvexen Archimedischen Erzeuger nicht unbedingt erfüllt sein muss.

**Beispiel 2.1.4**

Sei  $\psi$  eine Funktion auf  $[0, \infty)$  gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 3/2 - 2x & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 0 & \text{falls } x \in [\frac{3}{4}, \infty) \end{cases}$$

welche der Definition nach einem Archimedischen Erzeuger entspricht. Die bivariate Funktion  $\psi(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v))$ , ist jedoch aufgrund der fehlenden Konvexität nicht quasi-monoton, da sie hier im vorliegenden Fall beispielsweise negative Masse auf dem Rechteck  $[\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]^2$  annimmt:

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{(\frac{2}{16}, \frac{2}{16})} \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{11}{16}\right), \psi^{-1}\left(\frac{13}{16}\right)\right) \\
 &= \psi\left(2\psi^{-1}\left(\frac{13}{16}\right)\right) - 2\psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{13}{16}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)\right) + \psi\left(2\psi^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)\right) \\
 &= \psi\left(\frac{5}{8}\right) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{8} - 1 = -\frac{1}{8} \neq 0
 \end{aligned}$$

Viele Abhängigkeitseigenschaften solcher Copulas sind relativ einfach festzulegen, da sie sich auf die analytischen Eigenschaften der Erzeugerfunktion  $\psi$  zurückführen lassen. Beispiele dafür geben R. B. Nelsen [9] oder A. Müller und M. Scarsini [11].

Betrachten wir nun zwei Beispiele für Archimedische Copulas mit jeweils einer strikten und einer nicht strikten Erzeugerfunktion.

**Beispiel 2.1.5**

Sei  $\psi(t) = e^{-t}$  für  $t \in [0, \infty]$  konvex, da  $\inf\{x : \psi(x) = 0\} = \infty$  mit  $\psi^{-1}(t) = -\log(t)$  ist  $\psi$  ein strikter Archimedischer Erzeuger. Konstruieren wir nun nach obiger Definition eine Copula  $C$ , so erhalten wir

$$C(u, v) = -\log(e^{-u} + e^{-v}) = (-\log(e^{-u}))(-\log(e^{-v})) = uv = \Pi(u, v).$$

Demnach ist die Unabhängigkeitscopula  $\Pi$  eine strikte Archimedische Copula.

**Beispiel 2.1.6**

Sei  $\psi(t) = 1 - t$  für  $t \in [0, 1]$ , dann ist  $\psi^{-1}(t) = 1 - t$  für  $t \in [0, 1]$ , das heißt also wir können auch schreiben  $\psi(t) = \max(1 - t, 0)$ . Konstruieren wir nun wieder nach obiger Definition unsere Copula  $C$ , so erhalten wir

$$C(u, v) = \max(1 - ((1 - u) + (1 - v)), 0) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v).$$

Somit ist die Maximumscopula  $W$  der unteren Fréchet-Hoeffding Schranke ebenfalls Archimedisches.

## 2.2 Einparametrische Archimedische Copula Familien

Wie wir gesehen haben, können Archimedische Copulas nach Definition 2.1.2 konstruiert werden, daher wollen wir uns nun ein paar Beispiele für parameterabhängige Erzeugerfunktionen anschauen, mit denen wir unsere Archimedischen Copulas generieren und diese bestimmten Familien zuordnen können. Wir werden auch sehen, dass die bereits vorgestellten Maximums-, Minimums- und Produktcopula in einzelnen Spezialfällen diesen Familien zugeordnet werden können. Zuzüglich zu den einzelnen Archimedischen Copula Familien wollen wir für markante Parameter die, mit der Programmiersprache R erzeugten, zugehörigen Scatterplots darstellen, die die Transformation der gleichverteilten Werte in Realisierungen entsprechend der Randverteilung darstellen. Die Grafiken zeigen deutlich, wie die Parameterwahl die Abhängigkeitsstrukturen der verschiedenen Copula-Ansätze beeinflusst. Das Verfahren zur Simulation von Zufallswerten aus einer gegebenen Archimedischen Copula heraus wird nochmals etwas ausführlicher im vierten Kapitel vorgestellt.

### Clayton Copula

Diese Copula besitzt für  $\theta > 0$  die strikte und für  $\theta \in [-1, 0)$  die nicht strikte Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = (\theta t + 1)^{-1/\theta}$  mit der Inversen  $\psi_\theta^{-1}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ , somit hat die Clayton Copula die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} C_\theta^{Cl}(u, v) &= \left( \theta \left( \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1) + \frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1) \right) + 1 \right)^{-1/\theta} \\ &= (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 2 + 1)^{-1/\theta} \\ &= (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \\ &= [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann  $C_{-1}^{Cl}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}^{Cl}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$  und  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Cl}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ . In Abbildung 2.2 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = 0.5$  und  $\theta = 5$ .

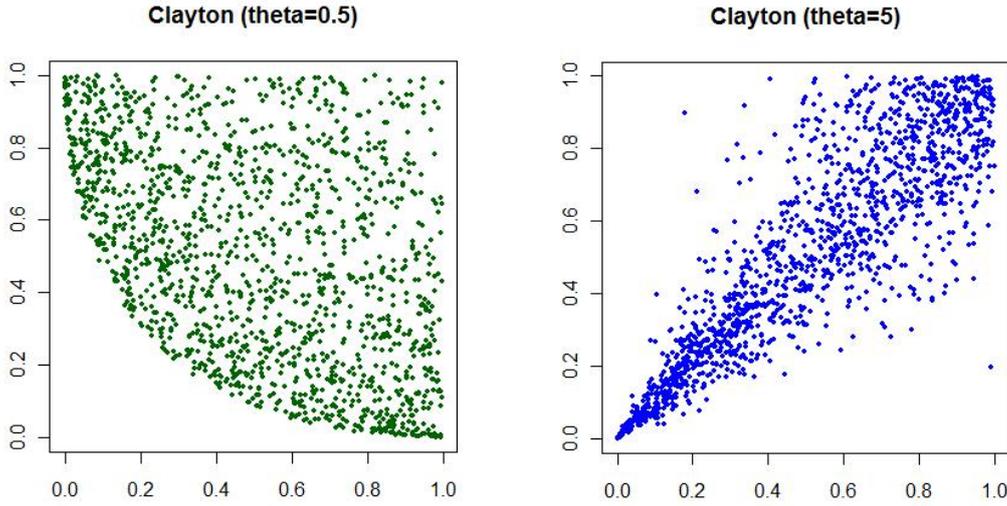


Abbildung 2.2: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Clayton Copula mit Parameter  $\theta = 0.5$  (links) und  $\theta = 5$  (rechts)

### Ali Mikhail Haq Copula

Die Ali Mikhail Haq Copula zeichnet sich aus durch ihre strikten Erzeugerfunktion  $\psi_{\theta}(t) = \frac{1-\theta}{\exp(t)-\theta}$  und der Inversen  $\psi_{\theta}^{-1}(t) = \ln(\frac{1-\theta(1-t)}{t})$  mit  $\theta \in [-1, 1)$ , demnach ist dann

$$\begin{aligned}
 C_{\theta}^{AMH}(u, v) &= \frac{1 - \theta}{\exp(\ln(\frac{1-\theta(1-u)}{u}) + \ln(\frac{1-\theta(1-v)}{v})) - \theta} \\
 &= \frac{(1 - \theta)uv}{(1 - \theta(1 - u))(1 - \theta(1 - v)) - \theta uv} \\
 &= \frac{(1 - \theta)uv}{1 - \theta(1 - u) - \theta(1 - v) - \theta uv + \theta^2(1 - u)(1 - v)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-\theta)uv}{1-\theta(1-u)(1-v)-\theta+\theta^2(1-u)(1-v)} \\
 &= \frac{(1-\theta)uv}{(1-\theta)(1-\theta(1-u)(1-v))} \\
 &= \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}.
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall  $\theta = 0$  ergibt sich somit die Produktcopula  $C_0^{AMH}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$ . In Abbildung 2.3 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = -0.9$  und  $\theta = 0.9$ .

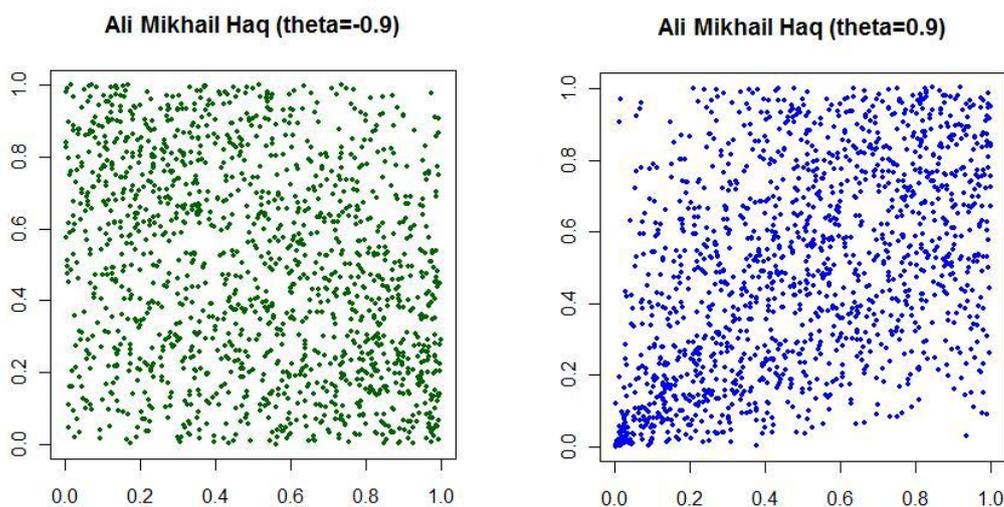


Abbildung 2.3: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Ali Mikhail Haq Copula mit Parameter  $\theta = -0.9$  (links) und  $\theta = 0.9$  (rechts)

## Gumbel-Hougaard Copula

Die Gumbel-Hougaard Copula besitzt die strikten Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = \exp(-t^{1/\theta})$  und die Inverse  $\psi_\theta^{-1}(t) = (-\ln(t))^\theta$  mit  $\theta \in [-1, \infty)$ , demnach hat sie die Form

$$C_\theta^{GH}(u, v) = \exp(-((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta)^{1/\theta}).$$

Zu dieser Familie gehört wiederum die Produktcopula  $C_1^{GH}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$  und Minimumscopula  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{GH}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ . In Abbildung 2.4 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = 2.5$  und  $\theta = 7.5$ .

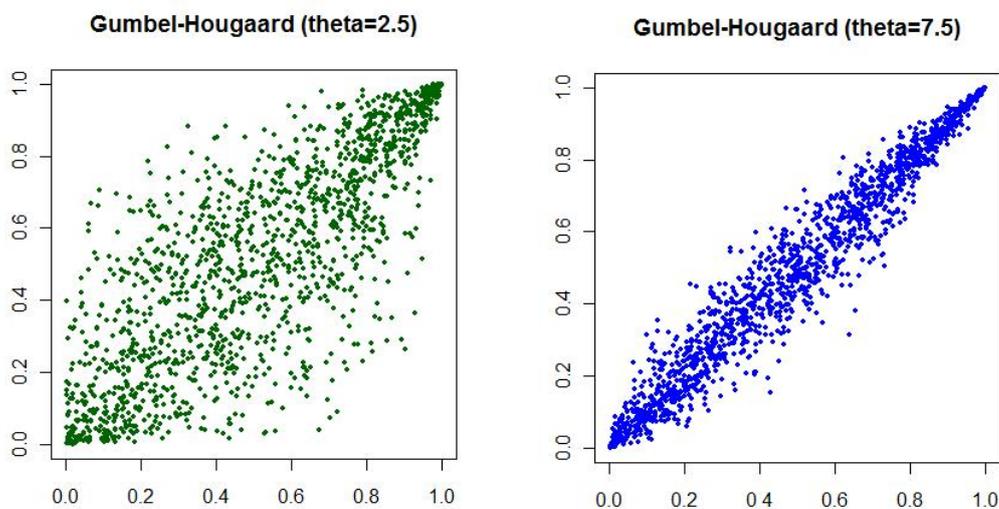


Abbildung 2.4: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard Copula mit Parameter  $\theta = 2.5$  (links) und  $\theta = 7.5$  (rechts)

### Frank Copula

Diese Copula hat die strikte Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + (\exp(-\theta) - 1) \exp(-t))$  und die Inverse  $\psi_\theta^{-1}(t) = -\ln\left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)$  mit  $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ , es folgt demnach

$$\begin{aligned} C_\theta^{Fr}(u, v) &= -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + (\exp(-\theta) - 1) \exp\left(\ln\left(\frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right) + \ln\left(\frac{\exp(-\theta v) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + (\exp(-\theta) - 1) \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{(\exp(-\theta) - 1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right). \end{aligned}$$

Zu der Frank Copula gehören wiederum  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_\theta^{Fr}(u, v) = W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{Fr}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$  und  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Fr}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ . In Abbildung 2.5 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = 5$  und  $\theta = 15$ .

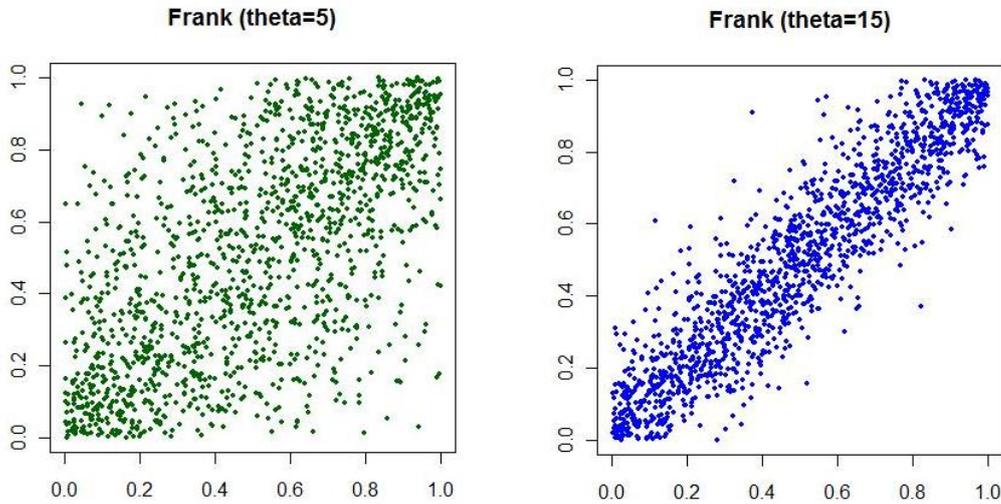


Abbildung 2.5: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Frank Copula mit Parameter  $\theta = 5$  (links) und  $\theta = 15$  (rechts)

## Joe Copula

Die Joe Copula zeichnet sich aus durch ihre strikte Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = 1 - (1 - \exp(-t))^{1/\theta}$  und der Inversen  $\psi_\theta^{-1}(t) = -\ln(1 - (1 - t)^\theta)$  mit  $\theta \in [1, \infty)$ , demnach ist dann

$$\begin{aligned} C_\theta^{Joe}(u, v) &= 1 - (1 - \exp(\ln(1 - (1 - u)^\theta) + \ln(1 - (1 - v)^\theta)))^{1/\theta} \\ &= 1 - (1 - (1 - (1 - u)^\theta)(1 - (1 - v)^\theta))^{1/\theta} \\ &= 1 - (1 - (1 - (1 - u)^\theta - (1 - v)^\theta + (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta))^{1/\theta} \\ &= 1 - ((1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

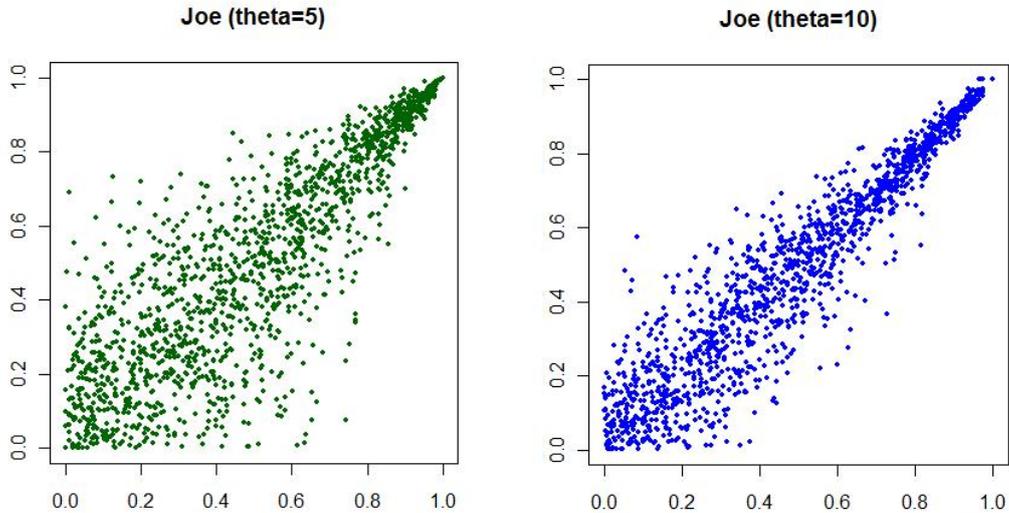


Abbildung 2.6: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Joe Copula mit Parameter  $\theta = 5$  (links) und  $\theta = 10$  (rechts)

Es gilt dann  $C_1^{Joe}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$  und  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Joe}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ . In Abbildung 2.6 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = 5$  und  $\theta = 10$ .

### Gumbel-Barnett Copula

Die Gumbel-Barnett Copula besitzt die strikte Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = \exp\left(\frac{1}{\theta}(1 - \exp(t))\right)$  und die Inverse  $\psi_\theta^{-1}(t) = \ln(1 - \theta \ln(t))$  mit  $\theta \in (0, 1]$ , es folgt also

$$\begin{aligned} C_\theta^{GB}(u, v) &= \exp\left(\frac{1}{\theta}(1 - \exp(\ln(1 - \theta \ln(u)) + \ln(1 - \theta \ln(v))))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\theta}(1 - (1 - \theta \ln(u))(1 - \theta \ln(v)))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\theta}(1 - (1 - \theta \ln(u) - \theta \ln(v) + \theta^2 \ln(u) \ln(v)))\right) \\ &= \exp(\ln(u) + \ln(v) - \theta \ln(u) \ln(v)) \\ &= uv \exp(-\theta \ln(u) \ln(v)). \end{aligned}$$

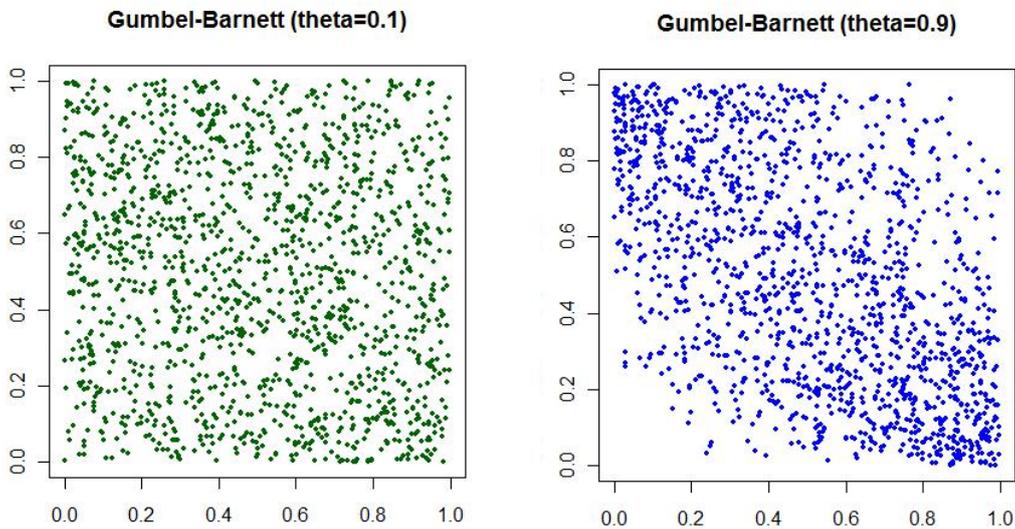


Abbildung 2.7: Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Gumbel-Barnett Copula mit Parameter  $\theta = 0.1$  (links) und  $\theta = 0.9$  (rechts)

Wir sehen wieder leicht, dass die Produktcopula  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\infty}^{GB}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$  Teil dieser Familie ist. In Abbildung 2.7 sehen wir die zugehörigen Scatterplots für  $\theta = 0.1$  und  $\theta = 0.9$ .

## 2.3 Analytische Eigenschaften

Archimedische Copulas zeichnen sich durch ihre positiven und praktischen Eigenschaften aus, die einschlägigsten und wichtigsten sind in dem folgenden Korollar zusammengefasst.

### Korollar 2.3.1

Sei  $C$  eine bivariate Archimedische Copula mit Erzeuger  $\psi$ , dann folgt:

- (i)  $C$  ist kommutativ:  $C(u, v) = C(v, u)$  für alle  $u, v \in [0, 1]$
- (ii)  $C$  ist assoziativ:  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  für alle  $u, v, w \in [0, 1]$
- (iii) Für eine Konstante  $c > 0$  ist  $c\psi$  ebenfalls ein Erzeuger von  $C$

**Bemerkung:** Die obigen Eigenschaften folgen leicht aus der Definition 2.1.2 für Archimedische Copulas. Die Kommutativität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(v) + \psi^{-1}(u)) \\ &= C(v, u) \end{aligned}$$

und für die Assoziativität können wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \psi(\psi^{-1}(\psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v))) + \psi^{-1}(w)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v) + \psi^{-1}(w)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(\psi(\psi^{-1}(v) + \psi^{-1}(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)) \end{aligned}$$

stets gilt. Die letzte Bedingung ergibt sich ebenfalls aus Definition 2.1.2 und der Tatsache, dass die Konvexität auch für  $c\psi$  erhalten bleibt.

Der Name „Archimedisch“ leitet sich bei dieser Klasse von Copulas aus dem Archimedischen Axiom ab. Dieses besagt, dass für zwei positive, reelle Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $x < y$  immer eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $nx > y$  gilt. Eine bivariate Archimedische Copula verhält sich wie eine binäre Verknüpfung auf dem Intervall  $[0, 1]$ , wobei die Copula jedem Tupel  $(u, v)$  auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  eine Zahl auf dem Einheitsintervall zuordnet. Aus Korollar 2.3.1 können wir entnehmen, dass diese Verknüpfung sowohl assoziativ, als auch kommutativ ist und wir damit nicht nur eine partielle Konkordanzordnung, sondern sogar eine feste Ordnung definieren können, das heißt aus  $u_1 \leq u_2$  und  $v_1 \leq v_2$  folgt in diesem Fall  $C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2)$ .

Für ein beliebiges  $u \in [0, 1]$  können wir die sogenannte *C-Stärke*  $u_C^n$  (engl. *C-powers*) von  $u$  rekursiv definieren durch  $u_C^1 = u$  und  $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$ , wobei  $u_C^2$  nach Definition 1.1.12 den diagonalen Schnitt  $\delta_C(u)$  von  $C$  darstellt. Die Version des Archimedischen Axioms ist in unserem Fall letztendlich, dass für zwei reelle Zahlen  $u$  und  $v$  aus dem Intervall  $(0, 1)$  stets eine positive natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $u_C^n < v$  gilt.

**Satz 2.3.2** (siehe Nelsen [9])

Sei  $C$  eine bivariate Archimedische Copula generiert durch die Erzeugerfunktion  $\psi$ . Dann existiert für alle  $u, v \in [0, 1]$  eine positive natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $u_C^n < v$  gilt.

In Definition 1.1.12 haben wir die Schnitte einer Copulas kennengelernt, diese geben uns ebenfalls ein Kriterium wie wir Archimedische Copulas charakterisieren können.

**Satz 2.3.3** (siehe Nelsen [9])

Sei  $C$  eine bivariate assoziative Copula, ist dann für alle  $u \in (0, 1)$  der diagonale Schnitt von  $C$  in  $u$ ,  $\delta_C(u) < u$ , so ist  $C$  eine bivariate Archimedische Copula.

Wie in Abschnitt 1.2 können wir die Konturmengen einer Copula für ein festes  $k \in [0, 1]$  definieren als  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) = k\}$ . Für eine Archimedische Copula sind dies die Punkte auf der Konturlinie  $\psi(u) + \psi(v) = \psi(k)$ , die die Punkte  $(1, k)$  und  $(k, 1)$  auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  miteinander verbindet. Eine besondere Eigenschaft dieser Konturlinien ist ihre Konvexität.

**Satz 2.3.4** (siehe Nelsen [9])

Die Konturlinien einer bivariaten Archimedischen Copula  $C$  sind konvex.

**Bemerkung:** Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, werden die Maximums-, Produkt- und Minimumscopula  $\Pi$  ebenfalls der Klasse der Archimedischen Copulas zugeordnet. In Abbildung 1.5 können wir daher auch die konvexe Struktur der Konturlinien von  $W$ ,  $\Pi$  und  $M$  betrachten.

Mit einer abschließenden Eigenschaft, wollen wir noch einen weiteren Zugang liefern, der es uns ermöglicht, Aussagen über den Zusammenhang der partiellen Ableitungen einer Archimedischen Copula zu machen.

**Satz 2.3.5** (siehe Nelsen [9])

Sei  $C$  eine bivariate Archimedische Copula mit Erzeugerfunktion  $\psi$ . Dann gilt für fast alle  $u, v \in [0, 1]$ :

$$(\psi^{-1})'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = (\psi^{-1})'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

# 3 Multivariate Archimedische Copulas

Wie bereits im zweiten Kapitel für den bivariaten Fall erläutert wurde, stellen mehrdimensionale Archimedische Copulas ebenfalls eine bedeutende Klasse für multivariate Abhängigkeitsmodelle dar, welche beträchtliche Popularität in einigen praktischen Anwendungen genießen.

Nach C.-H. Ling [7] besitzt jede Archimedische Copula im  $d$ -dimensionalen Fall die einfache Form

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)), \quad (u_1, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d,$$

wobei hier  $\psi$  wieder den Archimedischen Erzeuger von  $C$  darstellt. Die Umkehrung der Aussage gilt im Allgemeinen jedoch nicht immer, das heißt während jede  $d$ -dimensionale Archimedische Copula per Definition die obige Form hat, muss nicht jede derart definierte Funktion einer Archimedischen Copula entsprechen. Wie bereits einleitend erwähnt wurde, tritt hier auch ungeachtet der enormen Fortschritte in der Copula-Theorie ein weiteres Problem auf, nämlich dass es im Vergleich zum Fall der bivariaten Copulas eine viel geringere Anzahl an multivariaten Copula-Modellen gibt, da die Erweiterung bivariater Copulas auf den mehrdimensionalen Fall nicht immer so einfach möglich ist.

Die Bedingungen an einen Archimedischen Erzeuger  $\psi$ , um eine  $d$ -dimensionale Copula zu erzeugen, ist in der Vergangenheit noch nicht überzeugend dargestellt worden. Jedoch gab es bereits zwei Ansätze, zum einen von Schweizer und Sklar [12], die zeigten, dass ein Erzeuger  $\psi$  eine bivariate Copula erzeugt, genau dann wenn sie konvex ist, wogegen Kimberling [6] bewies, dass  $\psi$  eine Archimedische Copula

in einer festen Dimension  $d$  erzeugt, genau dann wenn die Erzeugerfunktion eine vollständig monotone Funktion auf dem gegebenen Intervall darstellt. Die Bedingung von Kimberling stellte sich jedoch letztendlich für eine Dimension  $d \geq 3$  als zu stark dar, da unter anderem Genest und Rivest [5], Müller und Scarsini [11] und Nelsen [8] zeigten, dass nur erforderlich ist, dass  $\psi$  Ableitungen bis zur Ordnung  $d$  hat, welche im Vorzeichen alternieren. Obwohl diese Eigenschaft hinreichend und erheblich schwächer ist, ist sie immer noch nicht direkt notwendig. Erst Alexander J. McNeil und Johanna Nešlehová [10] schlossen diese Lücke, indem sie zeigten, dass die letztendlich notwendige und hinreichende Bedingung für  $\psi$  die sogenannte analytische Eigenschaft der  $d$ -Monotonie ist. Daher wollen wir uns in diesem Kapitel auf Basis der Erkenntnisse von Alexander J. McNeil und Johanna Nešlehová [10] damit auseinandersetzen, welche Anforderungen eine Archimedische Erzeugerfunktion mit sich bringen muss, um eine  $d$ -dimensionale Copula zu erzeugen.

### 3.1 Archimedische Copulas in höheren Dimensionen

Bevor wir in diesem Kapitel in den mehrdimensionalen Fall einsteigen, ist es notwendig noch grundlegende Notationen zu vereinbaren. So bezeichnet hier  $x$  den Vektor  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Alle Ausdrücke wie  $x + y$ ,  $\max(x, y)$  oder  $x \leq y$  verstehen sich als komponentenweise Operationen. Mit  $[x, y]$  bezeichnen wir außerdem das kartesische Produkt  $[x_1, y_1] \times \dots \times [x_d, y_d]$  und  $\mathbb{R}_+^d$  den positiven Quadranten  $[0, \infty)^d$ .

Wie wir bereits im vorangegangenen Kapitel Archimedische Copulas für den bivariaten Fall definiert haben, gehen wir nun analog über zum mehrdimensionalen Fall.

**Definition 3.1.1** (*d-dimensionale Archimedische Copula*):

Wir bezeichnen eine *d-dimensionale Copula* als *Archimedisch*, falls sie für einen Ar-

chimedischen Erzeuger  $\psi$  und seiner Inversen  $\psi^{-1}$  folgende Darstellung hat:

$$C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d)), \quad u \in [0, 1]^d.$$

**Bemerkung:** Betrachten wir nun den oberen Ausdruck genauer, sehen wir, dass  $\psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d))$  die Randbedingungen (i) und (ii) nach Definition 1.1.7 erfüllt.

(i) Für beliebiges  $1 \leq i \leq d$  gilt:

$$\begin{aligned} & C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_{i-1}) + \psi^{-1}(0) + \psi^{-1}(u_{i+1}) + \cdots + \psi^{-1}(u_d)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(0) + \underbrace{\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_{i-1}) + \psi^{-1}(u_{i+1}) + \cdots + \psi^{-1}(u_d)}_{\geq 0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Für beliebiges  $1 \leq i \leq d$  gilt:

$$\begin{aligned} & C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) \\ &= \psi(\underbrace{\psi^{-1}(1) + \cdots + \psi^{-1}(1)}_{=0} + \psi^{-1}(u_i) + \underbrace{\psi^{-1}(1) + \cdots + \psi^{-1}(1)}_{=0}) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_i)) = u_i \end{aligned}$$

Demnach definiert ein Archimedischer Erzeuger  $\psi$  letztendlich eine  $d$ -dimensionale Copula obiger Form, genau dann wenn  $\psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d))$  die Eigenschaft der Quasi-Monotonie erfüllt. Wie wir in Beispiel 2.1.4 gesehen haben, ist die letzte Bedingung für einen beliebigen Archimedischen Erzeuger notwendigerweise nicht immer erfüllt.

Für den zweidimensionalen Fall konnten wir bereits mittels Konvexität eine notwendige und hinreichende Bedingung an einen Archimedischen Erzeuger aufstellen, der die Quasi-Monotonie für unsere Copula der Gestalt  $\psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d))$

erfüllt. Jedoch wollen wir nun im folgenden Abschnitt einen Weg finden, ein hinreichendes Kriterium an die Erzeugerfunktion für Dimensionen  $d \geq 3$  aufzustellen, die damit die Bedingung der Quasi-Monotonie für die Copula erfüllt.

## 3.2 $d$ -Monotonie

Wie wir bereits in der Einleitung erwähnt haben, sind an einen Archimedischen Erzeuger  $\psi$ , der eine  $d$ -dimensionale Copula erzeugt, gewisse Voraussetzungen gebunden. Deshalb werden wir nun in den folgenden Abschnitten das Konzept  $d$ -monotoner Funktionen kennenlernen und uns mit ihren zugehörigen Eigenschaften etwas genauer beschäftigen.

**Definition 3.2.1** ( *$d$ -monoton / vollständig monoton*):

Wir bezeichnen eine reelle Funktion  $f$  als  *$d$ -monoton* auf  $(a, b)$ , wobei  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $d \geq 2$ , falls  $f$  bis zur  $(d - 2)$ -ten Ordnung differenzierbar ist, die Ableitungen für alle  $x \in (a, b)$

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, d - 2$$

erfüllen und falls  $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$  monoton fallend und konvex auf  $(a, b)$  ist.

Sei  $f$  nun auf dem Intervall  $(a, b)$  beliebig oft differenzierbar und für jedes  $x \in (a, b)$  gilt  $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ , so bezeichnen wir  $f$  als *vollständig monoton*.

**Bemerkung:** Für den Fall  $d = 1$  bezeichnen wir  $f$  als 1-monoton auf dem Intervall  $(a, b)$ , falls die Funktion dort nicht negativ und monoton fallend ist.

Die oben formulierte Definition für  $d$ -monotone (vollständig monotone) Funktionen kann erweitert werden für Funktionen auf Intervallen die nicht notwendigerweise offen sein müssen.

**Definition 3.2.2:**

Eine reelle Funktion  $f$  heißt  $d$ -monoton (vollständig monoton) auf dem Intervall  $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ , falls sie auf dem Intervall stetig und eingeschränkt auf das Innere  $\overset{\circ}{I}$   $d$ -monoton (vollständig monoton) ist.

Da die Untersuchung Archimedischer Copulas derer bestimmter Verteilungsfunktionen auf dem  $\mathbb{R}^d$ , vorteilhafter sogar gegeben durch ihre Survivalfunktionen, gleichkommt und wir den Umgang mit der umständlicheren Formel für  $H(x)$  ausgedrückt durch  $\overline{H}(x) = 1 - H(x)$  vermeiden wollen, betrachten wir folgende Beobachtungen für Survivalfunktionen.

**Lemma 3.2.3** (siehe McNeil et al. [10])

Die  $d$ -dimensionale reelle Funktion  $\overline{H} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  ist eine Survivalfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf dem  $\mathbb{R}^d$ , genau dann wenn:

- (i)  $\lim_{x_1, \dots, x_d \rightarrow -\infty} \overline{H}(x_1, \dots, x_d) = 1$  und  $\overline{H}(x_1, \dots, x_d) = 0$  falls  $x_i \rightarrow \infty$  für mindestens ein  $1 \leq i \leq d$ .
- (ii)  $\overline{H}$  ist rechtsseitig stetig, das heißt für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \geq x \quad \|y - x\| < \delta \Rightarrow |\overline{H}(y) - \overline{H}(x)| < \epsilon$$

- (iii) Die Funktion  $G$ , gegeben durch  $G(x) = \overline{H}(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , ist quasi-monoton auf  $\mathbb{R}^d$ .

Im ersten Kapitel haben wir bereits ausführlich über die zentrale Rolle des Satzes von Sklar für die Copula-Theorie gesprochen. Da wir uns nun in der Untersuchung Archimedischer Copulas vordergründig mit den Survivalfunktionen von Verteilungsfunktionen beschäftigen, können wir die Formulierung des Satzes analog auf Survivalfunktionen übertragen.

**Satz 3.2.4** (*Satz von Sklar für Survivalfunktionen*, siehe Sklar [13])

- (i) Sei  $\bar{F}$  eine multivariate Survivalfunktion mit Randverteilungen  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$ . Dann existiert eine Copula  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , auch als Survivalcopula von  $\bar{F}$  bezeichnet, so dass für alle  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  gilt

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = C(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)).$$

$C$  ist eindeutig bestimmt auf  $D = \text{Ran}(\bar{F}_1) \times \dots \times \text{Ran}(\bar{F}_d)$ . Zudem gilt für alle  $(u_1, \dots, u_d)^T \in D$ ,

$$C(u_1, \dots, u_d) = \bar{F}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_d^{-1}(u_d)),$$

wobei  $\bar{F}_i^{-1}(u_i) = \inf \{x : \bar{F}_i(x) \leq u_i\}$ , für  $i = 1, \dots, d$ .

- (ii) Umgekehrt gilt: Ist  $C$  eine Copula und sind  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$  eindimensionale Survivalfunktionen, dann ist die durch

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) = C(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d))$$

definierte Funktion eine multivariate Survivalfunktion, die genau die vorgegebenen Randverteilungen  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$  besitzt, und  $C$  ist eine Survivalcopula.

Sei insbesondere  $X$  ein Zufallsvektor mit Survivalfunktion  $\bar{H}$  und stetigen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  und  $U$  ein Zufallsvektor verteilt wie die Survivalcopula  $C$  von  $\bar{H}$ , dann folgt

$$U \sim (\bar{F}_1(X_1), \dots, \bar{F}_d(X_d)) \quad \text{und} \quad X \sim (\bar{F}_1^{-1}(U_1), \dots, \bar{F}_d^{-1}(U_d)).$$

Unsere spätere Kernaussage, der wir uns im darauffolgenden Abschnitt schließlich widmen werden, hängt von verschiedenen Ergebnissen  $d$ -monotoner Funktionen ab. Das folgende Lemma fasst die wichtigsten Erkenntnisse aus den Sätzen 4, 5 und 6 des Kapitel IV von David Vernon Widder [14] diesbezüglich zusammen.

**Lemma 3.2.5:** (siehe Widder [14])

Sei  $d \geq 1$  eine ganze Zahl und  $f$  eine nicht negative, reelle Funktion auf dem Intervall  $(a, b)$  mit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Falls

$$(\Delta_h)^k f(x) \geq 0$$

für alle  $k = 1, \dots, d$ ,  $x \in (a, b)$  und  $h > 0$ , mit  $x + kh \in (a, b)$ , dann gilt

- (i)  $f$  ist monoton steigend auf  $(a, b)$
- (ii) Für  $d \geq 2$  ist  $f$  auf  $(a, b)$  stetig und konvex
- (iii) Für  $d \geq 2$  existieren auf  $(a, b)$  die linksseitigen und rechtsseitigen Ableitungen überall. Ferner gilt für alle  $a < x < y < b$ ,

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$$

- (iv) Für alle  $k = 1, \dots, (d - 1)$  und  $a < x \leq y < b$ , gilt  $(\Delta_h)^k f(x) \leq (\Delta_h)^k f(y)$  wenn  $h$  klein genug gewählt wurde, so dass  $y + kh < b$ .

Das zweite Resultat, welches eine wichtige Schlüsselrolle bewiesen hat ist die folgende Charakterisierung  $d$ -monotoner Funktionen.

**Lemma 3.2.6:**

Sei  $f$  eine reelle Funktion auf  $(a, b)$  mit  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $\tilde{f}$  die auf  $(-b, -a)$  durch  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  definierte Funktion. Desweiteren sei  $d \geq 1$  eine ganze Zahl, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist  $d$ -monoton auf  $(a, b)$
- (ii)  $f$  ist nicht negativ und erfüllt für alle  $k = 1, \dots, d$ ,  $x \in (-b, -a)$  und  $h_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , mit  $x + h_1 + \dots + h_k \in (-b, -a)$ ,

$$\Delta_{h_k} \dots \Delta_{h_1} \tilde{f}(x) \geq 0,$$

wobei hier mit  $\Delta_{h_k} \dots \Delta_{h_1}$  eine sequenzielle Anwendung des Differenzoperators erster Ordnung  $\Delta_h$ , gegeben durch  $\Delta_h \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)$  mit  $x, (x+h) \in (-b, -a)$ , gemeint ist.

- (iii)  $f$  ist nicht negativ und erfüllt für alle  $k = 1, \dots, d$ ,  $x \in (-b, -a)$  und  $h > 0$ , mit  $x + kh \in (-b, -a)$ ,

$$(\Delta_h)^k \tilde{f}(x) \geq 0,$$

wobei  $(\Delta_h)^k$  den  $k$ -monotonen sequentiellen Gebrauch des Operators  $\Delta_h$  bezeichnet.

*Beweis:*

$$(ii) \iff (iii)$$

Für die Hinrichtung sehen wir leicht, dass (iii) ein Spezialfall von (ii) ist, und zwar mit  $h_i = h$  für alle  $i = 1, \dots, k$ .

Bei der Rückrichtung nehmen wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $d \geq 2$  ist und setzen ein beliebiges  $x \in (-b, -a)$  und  $h_i > 0$  für  $i = 1, \dots, d$  fest, mit  $x + h_1 + \dots + h_d \in (-b, -a)$ .

Bezeichne nun  $\tilde{f}_l$  mit  $l = 1, \dots, d$  die Funktion auf  $(-b, -a - (h_d + \dots + h_l))$ , gegeben durch

$$\tilde{f}_l(y) = \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_l} \tilde{f}(y), \quad y \in (-b, -a - (h_d + \dots + h_l)).$$

Für den Fall  $d = 1$  wäre dies nichts anderes, als unsere gegebene Voraussetzung für  $k = 1$  und  $h = h_1$ .

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass  $\tilde{f}_l$  für  $l = 2, \dots, d$  neben der Nichtnegativität, auch die weitere Voraussetzung für Lemma 3.2.5, und zwar  $(\Delta_h)^k \tilde{f}_l(x) \geq 0$  für alle  $k = 1, \dots, l - 1$ , erfüllt.

Diese Behauptung werden wir per Induktion zeigen:

*Induktionsanfang:*

Da  $f$  auf  $(a, b)$  als nicht negativ gegeben ist und  $\tilde{f}$  eine Spiegelung entlang der Ordinate auf das Intervall  $(-b, -a)$  darstellt, ist diese wiederum nicht negativ auf  $(-b, -a)$ . Desweiteren ist in der Voraussetzung bereits  $(\Delta_h)^k \tilde{f}(x) \geq 0$  für alle  $k = 1, \dots, d$ ,  $h > 0$  mit  $x + kh \in (-b, -a)$  gegeben, daher sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.5 für  $\tilde{f}$  erfüllt.

Demnach liefert uns die vierte Folgerung, dass für alle  $k = 1, \dots, d - 1$  und  $-b < y \leq y + h_d < -a$ ,

$$\begin{aligned} (\Delta_h)^k \tilde{f}(y) &\leq (\Delta_h)^k \tilde{f}(y + h_d) \\ \iff (\Delta_h)^k \tilde{f}(y + h_d) - (\Delta_h)^k \tilde{f}(y) &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt, wenn  $h$  genügend klein gewählt wird, so dass  $y + kh \in (-b, -a - h_d)$  erfüllt ist. Schließlich können wir für alle  $k = 1, \dots, d - 1$  zeigen, dass

$$\begin{aligned} (\Delta_h)^k \tilde{f}(y + h_d) - (\Delta_h)^k \tilde{f}(y) &= (\Delta_h)^k (\tilde{f}(y + h_d) - \tilde{f}(y)) \\ &= (\Delta_h)^k \Delta_{h_d} \tilde{f}(y) \\ &= (\Delta_h)^k \tilde{f}_d(y) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt, also auch  $\tilde{f}_d(y) \geq 0$  und folglich ist damit der Induktionsanfang gezeigt.

*Induktionsschritt:*

Nun nehmen wir an, dass  $\tilde{f}_{l+1}$  die Bedingung  $(\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y) \geq 0$  aus Lemma 3.2.5 für alle  $k = 1, \dots, l$  erfüllt.

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \tilde{f}_l(y) &= \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_{l+1}} (\Delta_{h_l} \tilde{f}(y)) \\ &= \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_{l+1}} \tilde{f}(y + h_l) - \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_{l+1}} \tilde{f}(y) \\ &= \tilde{f}_{l+1}(y + h_l) - \tilde{f}_{l+1}(y) \end{aligned}$$

für alle  $y \in (-b, -a - (h_d + \dots + h_l))$ , so können wir folgern, dass

$$(\Delta_h)^k \tilde{f}_l(y) = (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y + h_l) - (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y)$$

für alle  $y \in (-b, -a - (h_d + \dots + h_l))$  und  $k = 1, \dots, l - 1$  gilt. Nach Lemma 3.2.5 Folgerung (iv) wissen wir, dass wegen

$$\begin{aligned} (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y) &\leq (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y + h_l) \\ \iff (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y + h_l) - (\Delta_h)^k \tilde{f}_{l+1}(y) &\geq 0 \end{aligned}$$

die rechte Seite der vorherigen Gleichung insbesondere nicht negativ ist. Dies liefert nun unmittelbar, dass  $\tilde{f}_l$  die Bedingung  $(\Delta_h)^k \tilde{f}_l(y) \geq 0$  für alle  $k = 1, \dots, l - 1$  erfüllt.

Wenden wir nun Lemma 3.2.5 auf  $\tilde{f}_2$  an, können wir mit (i) folgern, dass  $\tilde{f}_2$  monoton steigend auf  $(-b, -a - (h_d + \dots + h_2))$  ist. Da nach Annahme  $x, x + h_1 \in (-b, -a - (h_d + \dots + h_2))$  sind und

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(x + h_1) - \tilde{f}_2(x) &= \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_2} \tilde{f}(x + h_1) - \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_2} \tilde{f}(x) \\ &= \Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_1} \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

gilt, folgt, dass  $\Delta_{h_d} \dots \Delta_{h_1} \tilde{f}(x) \geq 0$  ist.

Da  $\Delta_{h_k} \dots \Delta_{h_1} \tilde{f}(x) \geq 0$  ist, kann für alle  $k = 1, \dots, d - 1$  die gewünschte Implikation analog gezeigt werden.

Die Nichtnegativität von  $\tilde{f}_l$  folgt aus der Monotonie von  $\tilde{f}_{l+1}$ .

(i)  $\iff$  (iii)

Bevor wir uns der Hinrichtung widmen, bemerken wir, dass wegen der  $d$ -Monotonie von  $f$  die Funktion für  $d = 1$  wiederum monoton fallend beziehungsweise für  $d = 2$  monoton fallend und konvex ist. Unsere gespiegelte Funktion  $\tilde{f}$  ist demnach monoton steigend beziehungsweise monoton steigend und konvex auf  $(-b, -a)$ . Für  $k = 1$  erfüllt die 1-monotone / 2-monotone Funktion  $f$ ,

$$\Delta_h \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + h) - \tilde{f}(x) \geq 0$$

für  $x + h \in (-b, -a)$  und  $h > 0$ , da  $\tilde{f}$  monoton steigend ist. Für  $k = 2$  erfüllt die 2-monotone Funktion  $f$

$$(\Delta_h)^2 \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + 2h) - 2\tilde{f}(x + h) + \tilde{f}(x) \geq 0$$

für  $x + 2h \in (-b, -a)$  und  $h > 0$ , da  $\tilde{f}$  monoton steigend und konvex ist (vgl. Satz 2.1.3 Nachweis der Quasi-Monotonie mittels Konvexität, siehe Alsina et al. [1]). Es ist deshalb ausreichend die Diskussion auf den Fall  $d \geq 3$  zu begrenzen.

Dass (i) in diesem Fall (iii) impliziert, kann mit dem Mittelpunkt-Satz gezeigt werden. Sei nun  $f$   $d$ -monoton auf dem Intervall  $(a, b)$ , dann existieren die Ableitungen  $\tilde{f}^{(k)}$  für  $k = 1, \dots, d-2$  auf  $(-b, -a)$  und sind dort nicht negativ. Demnach gibt es für alle  $k = 1, \dots, d-2$ ,  $x \in (-b, -a)$  und  $h > 0$ , so dass  $x + kh \in (-b, -a)$ , ein  $x^* \in (x, x + kh)$  mit  $(\Delta_h)^k \tilde{f}^{(k)}(x^*) \geq 0$ .

Für die Umkehrung sei nun ein  $x \in (-b, -a)$  beliebig. Folgerung (iv) aus Lemma 3.2.5 liefert uns, dass für alle  $k = 1, \dots, d-1$  und  $h > 0$ , mit  $x + kh \in (-b, -a)$ ,

$$\begin{aligned} & (\Delta_h)^k \tilde{f}(x) \geq (\Delta_h)^k \tilde{f}(x-l) \\ \iff & \frac{1}{l} (\Delta_h)^k \tilde{f}(x) \geq \frac{1}{l} (\Delta_h)^k \tilde{f}(x-l) \\ \iff & \frac{1}{l} (\Delta_h)^k \tilde{f}(x) - \frac{1}{l} (\Delta_h)^k \tilde{f}(x-l) \geq 0 \\ \iff & (\Delta_h)^k \left( \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-l)}{l} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt, immer wenn  $l > 0$  genügend klein ist, so dass  $x-l \in (-b, -a)$ . Bilden wir nun den Limes für  $l \rightarrow 0$ , so folgt, dass

$$\lim_{l \rightarrow 0} (\Delta_h)^k \left( \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-l)}{l} \right) = (\Delta_h)^k \tilde{f}'_-(x) \geq 0$$

und somit die linksseitige Ableitung  $\tilde{f}'_-$  ebenfalls die Voraussetzungen für Lemma 3.2.5 für jedes  $k = 1, \dots, d-1$  erfüllt. Durch Folgerung (ii) wissen wir insbesondere, dass  $\tilde{f}'_-$  stetig auf dem Intervall  $(-b, -a)$  ist.

Die Existenz von  $\tilde{f}'_-$  auf  $(-b, -a)$  garantiert uns letztlich die erneute Anwendung von Lemma 3.2.5, dieses Mal mittels Folgerung (iii) bezogen auf  $\tilde{f}$ .

Dieselbe Argumentationsfolge kann sukzessiv auf die Funktionen  $\tilde{f}^{(k)}$  angewendet werden, da die Ableitungen wiederum die Voraussetzungen von Lemma 3.2.9 erfüllen.

Im letzten Schritt liefert dies dann, dass die Ableitung  $\tilde{f}^{(d-2)}$  auf dem Intervall  $(-b, -a)$  existiert und die Bedingung  $(\Delta_h)^k \tilde{f}^{(d-2)}(x) \geq 0$  für  $k = 1, 2$  erfüllt. Insbesondere ist  $\tilde{f}^{(d-2)}$  sogar stetig, monoton steigend und konvex.

Zusammenfassend gesagt existieren also die Ableitungen  $\tilde{f}^{(k)}$  für  $k = 1, \dots, d - 2$  auf dem Intervall  $(-b, -a)$  und sind dort stetig, nicht negativ, monoton steigend und konvex. Aufgrund von  $(-1)^k f^{(k)}(x) = \tilde{f}^{(k)}(-x)$  ist die Rückrichtung ebenfalls gezeigt.

□

### 3.3 Notwendige und hinreichende Bedingung an Archimedische Erzeuger

Der Grund warum die  $d$ -Monotonie eine solch enorme Bedeutung für unsere Kernaussage hat, hängt von folgendem Ergebnis ab, welches die  $d$ -Monotonie mit der Existenz von Survivalfunktionen in Verbindung bringt.

**Lemma 3.3.1:**

Sei  $f$  eine reelle Funktion auf dem Intervall  $[0, \infty)$  und  $\overline{H}$  gegeben durch

$$\overline{H}(x) = f(\|\max(x, 0)\|_1), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist  $\overline{H}$  eine Survivalfunktion auf dem  $\mathbb{R}^d$ , genau dann wenn  $f$  eine  $d$ -monotone Funktion auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist und die Randbedingungen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  und  $f(0) = 1$  erfüllt.

*Beweis:*

Zuerst nehmen wir an, es existiere ein Zufallsvektor  $X$  im  $\mathbb{R}^d$  mit  $\overline{H}(x) = P(X > x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+^d$ . Weiterhin ist klar, dass nach Voraussetzung für Survivalfunktionen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  gilt.

Wie schon im Beweis von Lemma 3.2.6 setzen wir wieder  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  mit Definitionsbereich  $(-\infty, 0]$  und sehen, dass für alle  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $k = 1, \dots, d$  und  $h > 0$  mit  $x + kh < 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_h)^k \tilde{f}(x) &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \tilde{f}(x + lh) \\
 &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{J \subseteq \{1, \dots, k\}, \#J=l} \tilde{f}(x + lh) \\
 &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{J \subseteq \{1, \dots, k\}, \#J=l} f\left(-\left(x - \frac{lx}{k} + \frac{lx}{k} + lh\right)\right) \\
 &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{J \subseteq \{1, \dots, k\}, \#J=l} f\left(-\left(k-l\right)\frac{x}{k} - l\left(\frac{x}{k} + h\right)\right) \\
 &= \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \sum_{J \subseteq \{1, \dots, k\}, \#J=l} P\left(\bigcap_{i \notin J} \{-X_i < \frac{x}{k}\} \bigcap_{i \in J} \{-X_i < \frac{x}{k} + h\}\right) \\
 &= P\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i \in \left(-\frac{x}{k} - h, -\frac{x}{k}\right]\}\right) \geq 0
 \end{aligned}$$

Im letzte Schritt haben wir hierbei das Prinzip von Inklusion und Exklusion angewendet.

Da es sich bei  $P$  um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt, ist der letzte Ausdruck offensichtlich nicht negativ, also impliziert die Äquivalenz zwischen Bedingung (i) und (iii) aus Lemma 3.2.6, dass  $f$   $d$ -monoton auf  $(0, \infty)$  ist. Da  $f$  außerdem nach der Voraussetzung von Survivalfunktionen rechtseitig stetig in 0 ist, ist sie sogar nach Definition 3.2.2  $d$ -monoton auf  $[0, \infty)$ .

Um die Umkehrung zu beweisen, ist es hinreichend die drei Bedingungen von Lemma 3.2.3 nachzuweisen.

Für die erste Bedingung gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
 \lim_{x_1, \dots, x_d \rightarrow -\infty} \overline{H}(x_1, \dots, x_d) &= \lim_{x_1, \dots, x_d \rightarrow -\infty} f(\|(\max(x_1, 0), \dots, \max(x_d, 0))^T\|_1) \\
 &= f(\|(0, \dots, 0)^T\|_1) = f(0) = 1
 \end{aligned}$$

aufgrund der gegebenen Voraussetzung  $f(0) = 1$ . Desweiteren ergibt sich für ein  $1 \leq i \leq d$  dann

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} H(x_1, \dots, x_d) = \lim_{x_i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0$$

nach Voraussetzung.

Die zweite Bedingung ergibt sich aus Lemma 3.2.5, demnach ist  $f$  bei gegebener  $d$ -Monotonie insbesondere stetig auf  $[0, \infty)$ . Da die Norm eine stetige Abbildung in Bezug auf die durch sie induzierte Topologie darstellt und wir die Maximumsfunktion formulieren können als  $\max(x, 0) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ , was einer stetigen Komposition aus Addition, Quotienten und Betragfunktion entspricht, ist somit  $\bar{H}$  als Komposition stetiger Funktionen wiederum rechtseitig stetig.

Es muss also als letzte Bedingung nur noch die Quasi-Monotonie von  $\bar{H}(-x)$  nachgewiesen werden. Da  $\bar{H}$  rechtseitig stetig ist und keine Masse außerhalb von  $[0, \infty)^d$  annimmt, lässt dies uns darauf schließen, dass

$$\Delta_h f(-\|x\|_1) = f(-\|x\|_1 + h) - f(-\|x\|_1) \geq 0$$

für alle  $x \in (-\infty, 0)^d$  und  $h > 0$ , mit  $x + h < 0$ , gilt. Dies ist jedoch unmittelbar durch Bedingung (ii) von Lemma 3.2.6 garantiert, wenn wir  $x = \|x\|_1$  setzen.

□

Kommen wir nun zu unserer Kernaussage, die schließlich eine notwendige und hinreichende Bedingung an unseren Archimedischen Erzeuger liefert.

**Satz 3.3.2:**

Sei  $\psi$  ein Archimedischer Erzeuger. Dann ist die Funktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch

$$C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)), \quad (u_1, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$$

eine  $d$ -dimensionale Copula, genau dann wenn  $\psi$   $d$ -monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist.

*Beweis:*

Wie bereits in der Bemerkung nach Definition 3.1.1 erwähnt wurde, erfüllt  $C$  immer die Randbedingungen (i) und (ii) für Copulas. Damit bleibt nur noch die Eigenschaft zu zeigen, dass  $C$  quasi-monoton ist, genau dann wenn  $\psi$   $d$ -monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist.

Da jeder Archimedischer Erzeuger stetig ist und die Bedingung  $\psi(0) = 1$  erfüllt, ist im Übrigen  $\bar{F}$  gegeben durch

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{falls } x \geq 0, \\ 1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

eine stetige, univariate Survivalfunktion.

Nehmen wir also an,  $\psi$  wäre  $d$ -monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , dann ist nach Lemma 3.3.1 die Funktion  $\bar{H}$  definiert durch

$$\bar{H}(x) = \psi(\| \max(x, 0) \|_1), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

eine Survivalfunktion auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit stetigen identischen Randverteilungen  $\bar{F}$ . Der Satz von Sklar für Survivalfunktionen stellt dann sicher, dass die Funktion  $C$ , dargestellt mittels  $\bar{H}$  durch

$$C(u_1, \dots, u_d) = \bar{H}(\bar{F}^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}^{-1}(u_d))$$

für alle  $(u_1, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$  eine Copula ist. Desweiteren ist

$$\bar{F}^{-1}(u_i) = \begin{cases} \psi^{-1}(u_i) & \text{für } u_i \in [0, 1), \\ -\infty & \text{für } u_i = 1. \end{cases}$$

Da  $\max(\bar{F}^{-1}(1), 0) = 0 = \psi^{-1}(1)$  folgt im Allgemeinen  $\bar{F}^{-1}(u_i) = \psi^{-1}(u_i)$  für alle  $u_i \in [0, 1]$ . Demnach haben wir für beliebiges  $(u_1, \dots, u_d)^T \in [0, 1]^d$  schließlich eine Copula der Form

$$C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)).$$

Umgekehrt nehmen wir nun an,  $C$  sei eine Copula. Wegen dem Satz von Sklar für Survivalfunktionen folgt wieder, dass  $\overline{H}(x) = C(\overline{F}(x_1), \dots, \overline{F}(x_d))$  für  $(x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$  eine gemeinsame Survivalfunktion mit identischen marginalen Survivalfunktionen  $\overline{F}$  ist. Desweiteren kann man sich leicht davon überzeugen, dass für alle  $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}_+^d$ ,

$$\begin{aligned} \overline{H}(x_1, \dots, x_d) &= C(\overline{F}(x_1), \dots, \overline{F}(x_d)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(\overline{F}(x_1)) + \dots + \psi^{-1}(\overline{F}(x_d))) \\ &= \psi(\psi^{-1}(\psi(x_1)) + \dots + \psi^{-1}(\psi(x_d))) \\ &= \psi(x_1 + \dots + x_d) \\ &= \psi(|x_1| + \dots + |x_d|) \\ &= \psi(\|\max(x, 0)\|_1) \end{aligned}$$

gilt.

Daher erfüllt  $\overline{H}$  die Behauptung von Lemma 3.3.1 mit  $f = \psi$ , da  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$  und  $\psi(0) = 1$  erfüllt ist, woraus folgt, dass  $\psi$   $d$ -monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist.

□

**Bemerkung:** Wir sehen hier wieder leicht, dass Satz 2.1.3 einen Spezialfall von Satz 3.3.2 für  $d = 2$  darstellt.

Eine weitere unmittelbare Folgerung liefert uns das nachfolgende Korollar.

**Korollar 3.3.3:**

Angenommen  $\psi$  sei ein Archimedischer Erzeuger mit Ableitungen bis zur  $d$ -ten Ordnung auf dem Intervall  $(0, \infty)$ . Dann erzeugt  $\psi$  eine Archimedische Copula, genau dann wenn  $(-1)^k \psi^{(k)}(x) \geq 0$  für alle  $k = 1, \dots, d$  gilt.

Es ist desweiteren offensichtlich, dass aus der  $d$ -Monotonie eines Archimedischen Erzeugers  $\psi$  nicht unbedingt die  $k$ -Monotonie für  $k > d$  folgt. Anders ausgedrückt

heißt dies also, dass  $d$ -monotone Archimedische Erzeugerfunktionen nicht notwendigerweise Archimedische Copulas in Dimensionen höher als  $d$  generieren. Diese Feststellung motiviert uns, die Beobachtung in der folgenden Definition mittels einer zusammenfassenden Notation nochmals festzuhalten.

**Definition 3.3.4** (*Klasse Archimedischer Erzeuger*):

Mit  $\Psi_d$  bezeichnen wir die Klasse der  $d$ -monotonen *Archimedischen Erzeuger* für  $d \geq 2$ . Desweiteren bezeichnet somit  $\Psi_\infty$  die Klasse aller Archimedischer Erzeuger, die eine Archimedische Copula in beliebiger Dimension  $d \geq 2$  erzeugen können.

Andererseits bedeutet dies, dass für eine  $d$ -monotone Funktion mit  $d \geq 2$ , diese auch  $k$ -monoton ist für alle  $1 \leq k \leq d$ . Nach der obigen Definition ausgedrückt folgert man demnach

$$\Psi_2 \supseteq \Psi_3 \supseteq \Psi_4 \supseteq \dots$$

Mit dieser Notation können wir schließlich auch die bewiesene Behauptung Kimberlings, die lautete, dass  $\psi$  eine beliebig dimensionale Archimedische Copula erzeugt, wenn die Erzeugerfunktion  $\psi$  vollständig monoton auf dem gegebenen Intervall ist, in folgender Proposition bestätigen.

**Proposition 3.3.5:** (siehe Williamson [15])

Ein Archimedischer Erzeuger  $\psi$  liegt in  $\Psi_\infty$ , genau dann wenn er vollständig monoton auf  $[0, \infty)$  ist.

Zusammenfassend haben wir also nun gezeigt, dass die Voraussetzung von Kimberling sich als zu stark erwiesen hat und erst Alexander J. McNeil und Johanna Nešlahová nachwiesen, dass es möglich ist, unter der schwächeren Voraussetzung  $d$ -monotoner Funktionen,  $d$ -dimensionale Archimedische Copulas zu erzeugen.

## 4 Simulation

In der Statistik stellt die Simulation von abhängigen Zufallsvariablen aus stochastischen Modellen eine wichtige Anwendung dar. Daher wollen wir im abschließenden Kapitel eine Methode zur künstlichen Erzeugung von Zufallsrealisationen aus Archimedischen Copulas heraus einführen und uns dabei die besonderen Eigenschaften dieser Klasse von Copulas bei der Umsetzung der Simulation zu Nutzen machen.

### 4.1 Allgemeine und bedingte Inversionsmethode

Im folgenden wollen wir einen Weg finden, die gemeinsame Verteilungsfunktion bei gegebener Copula und gegebenen Randverteilungen zu simulieren. Wir wollen also für eine Copula  $C$  eine Realisierung aus auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  stetig gleichverteilten Zufallsvariablen erzeugen, die die Copula als gemeinsame Verteilungsfunktion haben.

**Algorithmus 4.1.1:** (*Allgemeine Inversionsmethode*)

Sei  $U$  eine auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  stetig gleichverteilte Zufallsvariable und  $F$  eine Verteilungsfunktion mit zugehöriger Quantilfunktion  $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$ . Dann erhält man die Zufallsvariable  $X$ , indem man die Zufallsvariable  $U$  in die Quantilfunktion  $F^{-1}$  einsetzt. Die allgemeine Inversionsmethode impliziert somit zur Erzeugung einer Realisation  $x$  aus einer Verteilungsfunktion  $F$  folgenden Algorithmus:

1. Erzeuge eine Zufallszahl  $u$  aus der Verteilung  $U(0, 1)$

2. Setze  $x = F^{-1}(u)$

Wenden wir nun die allgemeine Inversionsmethode auf die bedingten Verteilungen an, so können wir mit der sogenannten *bedingten Inversionsmethode* ein weiteres Vorgehen formulieren. Somit können wir per Rekursion die Realisation einer multivariaten Copula durch sukzessive Transformation von auf  $[0, 1]$  stetig gleichverteilten Zufallsvariablen mit jeweiligen Quantilfunktionen erzeugen.

**Algorithmus 4.1.2:** (*Bedingte Inversionsmethode*)

Sei  $C$  eine absolutstetige Copula und  $C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$  für  $k = 1, \dots, d$  eine  $k$ -dimensionale marginalen Verteilung von  $C$  mit  $C_1(u_1) = u_1$  und  $C_d(u_1, \dots, u_d) = C(u_1, \dots, u_d)$ . Die bedingte Verteilungsfunktion von  $u_k$ , gegeben  $u_1, \dots, u_{k-1}$ , ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_k(u_k \mid u_1, \dots, u_{k-1}) &= P(U_k \leq u_k \mid U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \left( \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

für  $k = 2, \dots, d$ , falls  $\left( \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}} \right)^{-1} \neq 0$ . Dann kann mit folgendem Algorithmus eine Realisierung der Copula  $C$  erzeugt werden:

1. Erzeuge eine Zufallszahl  $u_1$  aus der Verteilung  $U(0, 1)$
2. Erzeuge eine Zufallszahl  $u_2$  aus der bedingten Copula  $C(u_2 \mid u_1)$
- ⋮
3. Erzeuge eine Zufallszahl  $u_d$  aus der bedingten Copula  $C(u_d \mid u_1, \dots, u_{d-1})$

Bei der Simulation einer Realisierung aus  $C_k(u_k \mid u_1, \dots, u_{k-1})$  wird zunächst eine auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetig gleichverteilte Zufallszahl  $v$  bestimmt und diese in die Quantilfunktion  $C_k^{-1}$  eingesetzt, um somit das  $u_k$  zu bestimmen. Als gewünschtes Ergebnis erhält man auf diese Weise einen  $d$ -dimensionalen Zufallsvektor aus der Copula  $C$ .

Ein großer Vorteil der bedingte Version der Inversionsmethode ist, dass sie auf alle Arten von Copulas angewendet werden kann. Sie hat jedoch durch ihre rekursive Definition eine sehr hohe Rechenlaufzeit, insbesondere wenn die bedingten Verteilungen nicht mehr analytisch berechnet, sondern nur noch durch numerische Approximationen Näherungen an die Lösung gefunden werden können.

## 4.2 Simulation für Archimedische Copulas

Wie einleitend bereits erwähnt wurde sind die positiven analytischen Eigenschaften Archimedischer Copulas ausschlaggebend dafür, dass die bedingte Inversionsmethode unter Verwendung der Archimedischen Erzeugerfunktion vereinfacht werden kann.

**Satz 4.2.1:** (siehe Cherubini et al. [2])

Sei mit  $C(u_1, \dots, u_d)$  eine  $d$ -dimensionale Archimedische Copula mit Erzeugerfunktion  $\psi$  gegeben, dann gilt für alle  $k = 2, \dots, d$

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\psi^{(k-1)}(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_k))^{-1}}{\psi^{(k-1)}(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_{k-1}))},$$

wobei  $\psi^{(k-1)}$  der Ableitung der Ordnung  $k - 1$  der Erzeugerfunktion  $\psi$  entspricht.

**Algorithmus 4.2.2:** (*Bedingte Inversionsmethode für Archimedische Copulas*)

Haben wir eine  $d$ -dimensionale Archimedische Copula gegeben, mit Erzeugerfunktion  $\psi_\theta$  und der Inversen  $\psi_\theta^{-1}$ ,

$$C_{(d;\theta)}(u_1, \dots, u_d) = \psi_\theta(\psi_\theta^{-1}(u_1), \dots, \psi_\theta^{-1}(u_d))$$

so können wir, nachdem wir die Ableitungen  $\psi^{(k-1)}$  für  $k = 2, \dots, d$  bestimmt haben, folgendermaßen vorgehen:

1. Simuliere  $d$  unabhängige Zufallszahlen  $v_1, \dots, v_d$  aus der stetigen Gleichverteilung  $U(0, 1)$ .
2. Setze  $u_1 = v_1$ .
3. Setze

$$v_2 = C_{(2;\theta)}(u_2 | u_1) = \frac{\psi'(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2))}{\psi'(\psi^{-1}(u_1))}$$

und löse diese Gleichung nach  $u_2$  auf.

4. Führe dies fort bis zum Schritt  $d$  und setze dann wieder

$$v_d = C_{(d;\theta)}(u_d | u_1, \dots, u_{d-1}) = \frac{\psi^{(d-1)}(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d))}{\psi^{(d-1)}(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_{d-1}))}$$

und löse diese Gleichung nach  $u_d$  auf.

Betrachten wir nun als Beispiel eine Simulation einer Realisierung anhand der bivariaten einparametrischen Archimedischen Clayton Copula, wie wir sie in Abschnitt 2.3 kennengelernt haben.

**Beispiel 4.2.3:**

Gegeben sei die Clayton Copula  $C_{(2;\theta)}^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$  mit für  $\theta \geq 0$  strikten Erzeugerfunktion  $\psi_\theta(t) = (\theta t + 1)^{-1/\theta}$  und Inversen  $\psi_\theta^{-1}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$  für allgemeines  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ .

Da wir eine bivariate Copula vorliegen haben, müssen wir nur die Ableitung bis zur ersten Ordnung bestimmen.

$$\psi'_\theta(t) = -(\theta t + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}}$$

Generieren wir uns nun im ersten Schritt jeweils zwei Zufallszahlen  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  aus der Verteilung  $U(0, 1)$  und setzen  $u = \tilde{u}$ . Bleibt nur noch unser  $v$  zu bestimmen aus

$$\begin{aligned}
 \tilde{v} = C_{(2;\theta)}^{Cl}(v | u) &= \frac{-(\theta(\frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1) + \frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1)) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}}}{-(\theta(\frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1)) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}}} \\
 &= \frac{(u^{-\theta} - 1 + v^{-\theta} - 1 + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}}}{((u^{-\theta} - 1) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}}} \\
 \iff \tilde{v}u^{-\theta-1} &= (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \\
 \iff \tilde{v}^{-\frac{\theta}{\theta+1}}u^\theta &= u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \\
 \iff v^{-\theta} &= \tilde{v}^{-\frac{\theta}{\theta+1}}u^\theta - u^{-\theta} + 1 \\
 \iff v &= (\tilde{v}^{-\frac{\theta}{\theta+1}}u^\theta - u^{-\theta} + 1)^{-1/\theta}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir nun mit dem Tupel  $(u, v)$  eine Realisierung der Clayton Copula mit Parameter  $\theta$  erzeugt. In dem Scatterplot in Abbildung 2.2 können wir 1500 solcher Realisierungen betrachten, jeweils für die Parameter  $\theta = 0.5$  mit schwacher Abhängigkeit und  $\theta = 5$  mit stärkerer Abhängigkeit.

# Literaturverzeichnis

- [1] Alsina, Frank, Schweizer (2005), *Associative Functions on Intervals: A Primer of Triangular Norms*, World Scientific
- [2] Cherubini, Luciano, Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, Wiley Finance Series
- [3] Dall'Aglio (1959), *Sulla compatibilita delle funziono de ripartizione doppia*, Rendiconti di Matematica
- [4] Fréchet (1951), *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Annales de l'Université de Lyon
- [5] Genest, Rivest (1989), *A Characterization of Gumbel's family of extreme value distributions*, Statistics and Probability Letters
- [6] Kimberling (1974), *A probalistic interpretation of complete monotonicity*, Aequationes mathematicae
- [7] Ling (1965), *Representation of associative functions*, Publicationes Mathematicae University of Debrecen
- [8] Nelsen (2005), *Some properties of Schur-constant survival models and their copulas*, Brazilian Journal of Probability and Statistics
- [9] Nelsen (2006), *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Statistics
- [10] McNeil, Nešlehová (2009), *Multivariate Archimedean Copulas, d-monotone functions and  $l_1$ -norm Distributions*, The Annals of Statistics

- [11] Müller, Scarsini (2005), *Archimedean copulae and positive dependence*, Journal of Multivariate Analysis
- [12] Schweizer, Sklar (1983), *Probalistic metric spaces*, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics
- [13] Sklar (1959), *Fonctions de répartition a n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut Statistique de l'Universite de Paris
- [14] Widder (1946), *The Laplace transform*, Princeton University Press
- [15] Williamson (1956), *Multiply Monoton Functions and their Laplace transform*, Duke Mathematical Journal

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Obere Fréchet-Hoeffding Schranke $M(u, v)$ . . . . .	14
1.2	Untere Fréchet-Hoeffding Schranke $W(u, v)$ . . . . .	15
1.3	Produktcopula $\Pi(u, v)$ . . . . .	15
1.4	Durch $W$ und $M$ erzeugte Vierflächner . . . . .	16
1.5	Konturliniendiagramm der bivariaten Maximumscopula $W(u, v)$ , Produktcopula $\Pi(u, v)$ und Minimumscopula $M(u, v)$ . . . . .	17
1.6	Überschneidung der Produktcopula $\Pi$ (schwarz) und der aus Maximums- und Minimumscopula konvex linear kombinierten Copula $C$ (rot) . . . . .	18
2.1	Strikte (a) und nicht strikte (b) Erzeugerfunktion mit zugehöriger Inversen . . . . .	26
2.2	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Clayton Copula mit Parameter $\theta = 0.5$ (links) und $\theta = 5$ (rechts) . . . . .	30
2.3	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Ali Mikhail Haq Copula mit Parameter $\theta = -0.9$ (links) und $\theta = 0.9$ (rechts) . . . . .	31
2.4	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard Copula mit Parameter $\theta = 2.5$ (links) und $\theta = 7.5$ (rechts) . . . . .	32
2.5	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Frank Copula mit Parameter $\theta = 5$ (links) und $\theta = 15$ (rechts) . . . . .	33
2.6	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Joe Copula mit Parameter $\theta = 5$ (links) und $\theta = 10$ (rechts) . . . . .	34
2.7	Scatterplots von 1500 simulierten Daten der Gumbel-Barnett Copula mit Parameter $\theta = 0.1$ (links) und $\theta = 0.9$ (rechts) . . . . .	35

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit eigenständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Diese Arbeit hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Marburg, den 09. September 2011

---

(Daniel Aschenbach, Verfasser)