

Philipps



Universität  
Marburg

## Hierarchische Archimedische Copulas

Bachelorarbeit

im Studiengang Wirtschaftsmathematik  
am Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg

eingereicht von

Yuriy Pinkhasik

Marburg, September 2012

betreut durch

Prof. Dr. Hajo Holzmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung in das Copula Konzept</b>	<b>4</b>
1.1 Definition der Copula Funktion . . . . .	4
1.2 Der Satz von Sklar . . . . .	9
1.3 Eigenschaften der Copula Funktion . . . . .	10
1.4 Konkordanz, Kendall's Tau und Tail Dependence . . . . .	16
<b>2 Archimedische Copulas</b>	<b>25</b>
2.1 Konstruktion und Eigenschaften bivariater Archimedischer Copulas .	25
2.2 Konstruktion und Eigenschaften multivariater Archimedischer Copulas	33
2.3 Die Clayton-und Gumbel-Hougaard Copula, als Beispiele einparametrischer Familien . . . . .	36
<b>3 Hierarchische Archimedische Copulas</b>	<b>44</b>
3.1 Von den Archimedischen zu verschachtelten Archimedischen Copulas	44
3.2 Konstruktion mittels LT-Erzeuger . . . . .	46
3.3 Multivariate Konstruktion . . . . .	47
3.4 Eigenschaften und Beispiele hierarchischer Archimedischer Copulas .	53
<b>4 Simulation</b>	<b>59</b>
4.1 Erzeugung von Archimedischen Copulas . . . . .	59
4.2 Erzeugung von hierarchischen Archimedischen Copulas . . . . .	60
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>64</b>

## Einleitung

Nicht erst, aber vor allem seit der Finanzkrise 2008 und der noch immer ungelösten Eurokrise besteht bei Banken und Versicherungen die Notwendigkeit mehrdimensionale Zusammenhänge zwischen Finanztiteln realitätsgetreu zu modellieren. Zu nennen wären beispielsweise die Renditeverteilung eines Portfolios von Finanztiteln oder die Ausfallwahrscheinlichkeit von Krediten. Die gängige Praxis war es multivariate Normalverteilungen zu verwenden und die Abhängigkeit zwischen Finanztiteln mittels des Pearsonschen-Korrelationskoeffizienten zu bestimmen. Die multivariaten Normalverteilungen haben aber das Defizit, dass sie das Auftreten von gemeinsamen Extremereignissen, wie den gleichzeitigen Ausfall mehrerer Kredite, kaum berücksichtigen. Der Pearsonsche-Korrelationskoeffizient misst nur lineare Zusammenhänge und ist nur im Zusammenhang mit wenigstens annähernd normalverteilten Zufallsvariablen ein brauchbares Abhängigkeitsmaß.

Wie uns aber vor allem die Finanzkrise 2008 vor Augen führte, ist der gleichzeitige starke Einbruch der Rendite mehrerer Finanztitel und der gleichzeitige Ausfall mehrerer Kredite, in unserer globalisierten Welt ein großes Problem geworden. Daher ist die Notwendigkeit gewachsen andere multivariate Verteilungen zu finden, welche zu einer zuverlässigeren Modellierung führen.

Ein relativ neuer Ansatz ist, sogenannte Copulas zu verwenden. Mithilfe von Copulas lassen sich multivariate Verteilungsfunktionen in zwei Teile zerlegen. Sie werden in die Randverteilungen und die Copula Funktion aufgesplittet, in welcher die Information über die Art der Abhängigkeit zwischen den Randverteilungen enthalten ist. Die Randverteilungen und die Copula sind unabhängig voneinander, dementsprechend frei wählbar, was eine einfache und flexible Modellierung ermöglicht. Obwohl erst seit kurzem in der Finanz- und Versicherungsbranche eingesetzt, ist das Copula

Konzept, ein seit den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts bekannter Ansatz um Randverteilungen von der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu trennen. Ein Vorreiter auf diesem Gebiet war *Hoeffding*, der den Copula Begriff in den 40er Jahren in seinen Arbeiten erwähnte. Bekanntheit erlangten die Copula Funktionen, aber erst in den 50er Jahren durch die Arbeit von Sklar [12]. Er erarbeitete in dem 1959 erschienenen Werk das Theorem zur Existenz und Eindeutigkeit von Copula Funktionen. Die Bezeichnung „Copula“ leitet sich ab von dem englischen Wort „to couple - verbinden“. Sie wurde gewählt um zu betonen, dass eine Copula ihre Randverteilungen verbindet.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer recht neuen Klasse von Copulas, den sogenannten *hierarchischen Archimedischen Copulas*. Sie sind eine *asymmetrische* Erweiterung von bivariaten Archimedischen Copulas zu multivariaten Archimedischen Copulas.

Symmetrisch konstruierte Archimedische Copulas erweisen sich durch die Eigenschaft der Symmetrie für die Modellierung von asymmetrischen Beziehungen, also zum Beispiel zur Modellierung der Abhängigkeit von Kreditnehmern aus verschiedenen Branchen, als nicht brauchbar. Da aber heutzutage verschiedene Branchen eng miteinander verknüpft sind, wäre eine multivariate Erweiterung bivariater Archimedischer Copulas wünschenswert, die Kreditnehmer erst nach Branchen in eine gegenseitige Abhängigkeit bringt und anschließend die einzelnen Branchen in die gesamtwirtschaftliche Konjunktur einbindet. Die Lösung für dieses Problem sind hierarchische Archimedische Copulas. Sie sind so konstruiert, dass sie neben der Zuordnung von zum Beispiel Kreditnehmern zu verschiedenen Branchen, auch eine hierarchische Anordnung haben. Dies bedeutet, dass die Abhängigkeit zwischen den betrachteten Objekten von „außen nach innen“ zunimmt.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen des Copula Konzeptes erarbeitet, die notwendig für die weiteren Kapitel sein werden. Wir werden wichtige Definitionen und Eigenschaften notieren und Abhängigkeitsmaße einführen, welche auf Copulas basieren.

Im zweiten Kapitel werden wir uns mit den bivariaten Archimedischen Copulas

und ihrer „symmetrischen“ Erweiterung zu multivariaten Archimedischen Copulas beschäftigen. Im Vordergrund werden dabei jeweils die Konstruktion dieser Copulas und die Bedingungen unter denen, die so konstruierten Funktionen, auch wirklich Copulas sind, stehen.

Das dritte Kapitel handelt von den hierarchischen Archimedischen Copulas. Wir werden zeigen, wie man sie aus bivariaten Archimedischen Copulas „asymmetrisch“ konstruiert und wiederum Bedingungen aufstellen, unter denen es sich bei dieser „asymmetrischen“ Konstruktion, um Copulas handelt.

Abschließen werden wir die Arbeit mit dem Kapitel über Simulation von Zufallsvektoren, die als Verteilungsfunktion eine Archimedische bzw. eine hierarchische Archimedische Copula haben.

# 1 Einführung in das Copula Konzept

In diesem ersten Kapitel werden die Grundlagen des Copula Konzeptes erarbeitet. Zuerst werden wir die Copula Funktion definieren und dann mit dem Satz von Sklar einen für das Copula Konzept essentiellen Satz einführen, der eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Copula liefert. Desweiteren werden wir im Teilabschnitt 1.3 sehen, dass Schranken existieren, in denen sich die Copulas bewegen und sich auch eine Partialordnung auf der Menge der Copulas definieren lässt. Das Kapitel werden wir mit dem Unterabschnitt "Konkordanz, Kendall's Tau und Tail Dependence" beenden, in welchen wir unter anderem sehen werden, wie man von bestimmten Copulas auf die Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen schließen kann.

## 1.1 Definition der Copula Funktion

Bevor wir die Copula Funktion definieren, bedarf es einiger Vorarbeit, die sich in den folgenden Definitionen widerspiegelt.

**Definition 1.1.1.** (Grundlegende Notationen) Sei im Folgenden stets  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  und  $\overline{\mathbb{R}}^n = \overbrace{\overline{\mathbb{R}} \times \dots \times \overline{\mathbb{R}}}^{n\text{-mal}}$ . Weiterhin sei ein Hyperrechteck im  $\overline{\mathbb{R}}^n$ , das kartesische Produkt  $B$ ,  $n$ -abgeschlossener Intervalle:  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Eine reellwertige Funktion  $H$  von  $n$  Variablen, ist eine Funktion deren Definitionsbereich,  $\text{Dom}(H)$ , eine Teilmenge von  $\overline{\mathbb{R}}^n$  ist und der Wertebereich,  $\text{Ran}(H)$ , eine Teilmenge von  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Definition 1.1.2.** (H-Volumen) Seien  $S_1, S_2, \dots, S_n$  nichtleere Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $H$  eine reellwertige Funktion von  $n$  Variablen mit Definitionsbereich

$\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  und  $B$  ein Hyperrechteck, dessen Eckpunkte in  $\text{Dom}(H)$  liegen. Das **H-Volumen** von  $B$  lässt auf folgende zwei Weisen berechnen:

1. Das  $H$ -Volumen von  $B$  ist gegeben als

$$V_H(B) = \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}), \quad (1.1)$$

dabei wird die Summe über alle Eckpunkte  $\mathbf{c}$  von  $B$  gebildet und  $\text{sgn}(\mathbf{c})$  ist definiert als

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } c_k = a_k \text{ für eine gerade Anzahl von } k, \\ -1, & \text{wenn } c_k = a_k \text{ für eine ungerade Anzahl von } k. \end{cases}$$

2. Äquivalent dazu kann man das  $H$ -Volumen von  $B$  mittels des Differenzoperators darstellen

$$V_H(B) = \Delta_a^b H(x) = \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(x), \quad (1.2)$$

wobei der Differenzoperator erster Ordnung definiert ist als

$$\begin{aligned} \Delta_{a_i}^{b_i} H(x) &:= H(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_d) \\ &\quad - H(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_d). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Um zu verdeutlichen das beide Darstellungen Äquivalent sind betrachten wir das folgende Beispiel.

**Beispiel 1.1.3.** Sei  $H$  eine reellwertige Funktion von 2 Variablen mit  $\text{Dom}(H) = \overline{\mathbb{R}}^2$  und  $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Dann berechnen wir durch Anwendung von Formel 1.3:

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(x) = H(b_1, b_2) - H(b_1, a_2) - H(a_1, b_2) + H(a_1, a_2) \\ &= \sum_{\mathbf{c}} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Damit wäre die Äquivalenz für  $n=2$  gezeigt und für  $n \geq 2$  kann dieser Sachverhalt mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

Wir überprüfen nun die Eigenschaft  $n$ -steigend an den folgenden beiden Beispielen.

**Beispiel 1.1.4.** Sei  $H$  eine Funktion mit  $Dom(H) = [0, 1]^2$ , gegeben durch  $H(x, y) = (3x - 2)(3y - 2)$ . Weiterhin seien  $(x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \in [0, 1]^2$  beliebig.  $H$  ist 2-steigend, denn

$$\begin{aligned} V_H((x_1, x_2] \times (y_1, y_2]) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= (3x_2 - 2)(3y_2 - 2) - (3x_2 - 2)(3y_1 - 2) \\ &\quad - (3x_1 - 2)(3y_2 - 2) + (3x_1 - 2)(3y_1 - 2) \\ &= 9x_2y_2 - 6x_2 - 6y_2 + 4 - 9x_2y_1 + 6y_1 + 6x_2 - 4 \\ &\quad - 9x_1y_2 + 6x_1 + 6y_2 - 4 + 9x_1y_1 - 6x_1 - 6y_1 + 4 \\ &= 9(x_2y_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + x_1x_2) \\ &= 9((x_1 - x_2)(y_1 - y_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.1.5.** Sei  $H$  eine Funktion mit  $Dom(H) = [0, 1]^2$ , gegeben durch  $H(x, y) = \max\{x, y\}$ .  $H$  ist nicht 2-steigend, denn

$$V_H([0, 1]^2) = H(1, 1) - H(0, 1) - H(1, 0) + H(0, 0) = -1 \not\geq 0.$$

**Bemerkung 1.1.6.** Oftmals wird die Eigenschaft  $n$ -steigend auch *quasi-monoton* genannt.

Wichtig ist festzuhalten, dass eine  $n$ -steigende Funktion nicht monoton steigend in jedem Argument sein muss und umgekehrt eine in jedem Argument monoton steigende Funktion nicht notwendigerweise  $n$ -steigend ist. Ein Beispiel für eine nicht  $n$ -steigende Funktion, die in jedem Argument monoton steigend ist, ist in 1.1.5 zu finden. Die Funktion ist offensichtlich monoton steigend in jedem Argument und wie dort bereits gezeigt nicht  $n$ -steigend. Ein Beispiel für eine  $n$ -steigende Funktion, die nicht monoton steigend ist, findet sich in Nelsen[7](Beispiel 2.2).

**Definition 1.1.7.** (*geerdet*) Sei der Definitionsbereich einer reellwertiger Funktion  $H$  von  $n$  Variablen gegeben durch  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , wobei  $S_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  nicht leere Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  sind und sei  $a_i$  das jeweils kleinste



Element der Menge.

Man nennt  $H$  *geerdet* falls  $H(x_1, \dots, x_n) = 0$  gilt, wobei die Bedingung  $x_i = a_i$  für mindestens ein  $i$  erfüllt sein muss.

**Definition 1.1.8.** (*multivariate Verteilungsfunktion*) Eine *multivariate Verteilungsfunktion*  $H$  ist eine Funktion mit  $Dom(H) = \overline{\mathbb{R}}^n$ , die die folgenden drei Bedingungen erfüllt.

1.  $H$  ist  $n$ -wachsend
2.  $H(t_1, \dots, t_n) = 0$ , wenn mindestens eine der Koordinaten  $t_k = -\infty$  ist, wobei  $k \in \{1, \dots, n\}$ .
3.  $H(\infty, \dots, \infty) = 1$

Die wichtigsten Voraussetzungen um eine Copula Funktion zu definieren, haben wir bereits eingeführt. Bevor wir uns aber der Definition einer  $n$ -dimensionalen Copula widmen, wollen wir ein Lemma aus dem Buch von Nelsen [7] notieren, welches eine Aussage darüber liefert, unter welcher Bedingung eine  $n$ -steigende Funktion auch monoton steigend in jedem Argument ist.

**Lemma 1.1.9.** (siehe Nelsen [7]) Sei  $H$  eine Funktion von  $n$  Variablen mit  $Dom(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , wobei  $S_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  nicht leere Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  sind. Ist  $H$  *geerdet* und  *$n$ -steigend*, so ist  $H$  auch monoton steigend in jedem Argument.

Wir wollen nun die Copula Funktion auf drei verschiedenen Weisen definieren.

**Definition 1.1.10.** (*Copula Funktion*)

1. Eine  $n$ -dimensionale Copula ist eine Funktion mit  $Dom(C) = [0, 1]^n$  und  $Ran(C) = [0, 1]$ , welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:
  - (a)  $C(u_1, \dots, u_n) = 0$  falls für mindestens ein  $i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt,  $u_i = 0$ .
  - (b)  $C(u_1, \dots, u_n) = u_k$  falls alle Koordinaten  $u_i=1$  sind, ausser der  $k$ -ten.
  - (c) Für jedes Hyperrechteck  $B \subset [0, 1]^n$  gilt,  $V_C(B) \geq 0$ .

2. Eine n-dimensionale Subcopula  $C'$  ist eine Funktion mit  $Dom(C') = S_1 \times \dots \times S_n$ , wobei  $S_1, \dots, S_n$  Teilmengen von  $[0, 1]$  sind, und die beiden Punkte 0 und 1 enthalten. Ansonsten übernimmt die n-dimensionale Subcopula die Eigenschaften einer n-dimensionalen Copula. Daraus folgt, dass eine Copula  $C$  eine Subcopula mit  $Dom(C) = [0, 1]^n$  ist.
3. Eine n-dimensionale Copula ist eine multivariate Verteilungsfunktion von auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_1, \dots, U_n$ .

Wir betrachten nun ein erstes Beispiel einer Copula Funktion.

**Beispiel 1.1.11.** Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \Pi^2 : [0, 1]^2 &\longrightarrow [0, 1] \\ (u, v) &\longmapsto uv \end{aligned}$$

und weisen die 3 Bedingungen an eine Copula, für diese Funktion nach.

1. (geerdet) Die erste Bedingung ist trivial. Ist zum Beispiel  $u = 0$ , so ist das Produkt 0.
2. Wiederrum ist die zweite Bedingung leicht nachzuvollziehen. Denn ist zum Beispiel  $u = 1$ , so ist das Produkt  $v$ .
3. (2-wachsend) Wir benutzen Beispiel 1.1.3 um die dritte Bedingung zu zeigen: Seien  $(u_1, v_1)^T, (u_2, v_2)^T \in [0, 1]^2$  beliebig, mit  $v_2 \geq v_1$  und  $u_2 \geq u_1$

$$\begin{aligned} V_{\Pi}^2((u_1, u_2] \times (v_1, v_2]) &= \Pi^2(u_2, v_2) - \Pi^2(u_2, v_1) - \Pi^2(u_1, v_2) + \Pi^2(u_1, v_1) \\ &= u_2 v_2 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + u_1 v_1 \\ &= u_2(v_2 - v_1) - u_1(v_1 - v_2) = (*) \end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung  $v_2 \geq v_1$ , also  $v_1 - v_2 \leq 0$

$$\Rightarrow -u_1(v_1 - v_2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (*) \geq u_2(v_2 - v_1) \geq 0$$

Somit ist  $\Pi^2$  ein Copula.

Wir haben  $\Pi^n$  hier nur für den Fall  $n = 2$  betrachtet. Allgemein kann man zeigen, dass  $\Pi^n$  für jedes  $n \geq 2$  eine Copula darstellt. Diese Copula wird als Unabhängigkeitscopula bezeichnet. Warum sie diese Bezeichnung hat, wird in dem nächsten Satz klar.

**Satz 1.1.12.** (siehe Nelsen[7]) Seien  $X_1, \dots, X_n$  stetige Zufallsvariablen.  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann unabhängig wenn  $C_{X_1, \dots, X_n} = \Pi^n$ .

## 1.2 Der Satz von Sklar

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Satz von Sklar. Dieser Satz ist wohl der bedeutendste in der Copula-Theorie, da er die Grundlage für die meisten statistischen Anwendungen ist.

Bevor wir den Satz notieren, wollen wir die dafür noch benötigte Definitionen einführen.

**Definition 1.2.1.** (*Pseudo-Inverse einer Verteilungsfunktion*) Die Pseudo-Inverse  $F^{(-1)}$  einer Verteilungsfunktion  $F$ , ist eine Funktion mit  $Dom(F^{(-1)}) = [0, 1]$ , die folgendermaßen definiert ist:

$$F^{(-1)}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\}$$

Die Pseudo Inverse einer Verteilungsfunktion wird meistens Quantilfunktion genannt. Ist  $F$  stetig und streng monoton steigend, so gilt  $F(F^{(-1)}(u)) = u$ , d.h.  $F^{(-1)} = F^{-1}$ .

**Satz 1.2.2.** (*Satz von Sklar für Zufallsvariablen*, siehe Sklar[12]) Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$  und Randverteilungen  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Es existiert eine Copula  $C$ , sodass für alle  $x_1, \dots, x_n \in \bar{\mathbb{R}}$  gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.4)$$

**Bemerkung 1.2.3.** Mithilfe des Satzes von Sklar lässt sich die gemeinsame Verteilungsfunktion in die Randverteilungen und die Copula Funktion aufsplitten, in welcher die Information über die Art der Abhängigkeit zwischen den Randverteilungen

enthalten ist. Die Randverteilungen und die Copula sind unabhängig voneinander, was eine einfache und flexible Modellierung ermöglicht.

Die Eindeutigkeit der Copulafunktion ist nur im Fall der Stetigkeit der Randverteilungen  $F_1, F_2, \dots, F_n$  gegeben. Ist dies nicht der Fall, so ist die Copula nur auf  $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$  eindeutig bestimmt.

**Korollar 1.2.4.** (siehe Nelsen [7]) Sei  $H$  eine Verteilungsfunktion mit Randverteilungen  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Für alle  $n$ -Tupel  $(u_1, \dots, u_n)$  in  $[0, 1]^n$  gilt:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (1.5)$$

*Beweis.* Da die Copulafunktion nur im Fall stetiger Randverteilungen eindeutig bestimmt ist, können wir dies im Beweis voraussetzen. Wir setzen  $F_i(x_i) = u_i$  wobei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Da  $F$  eine Verteilungsfunktion ist, existiert die Pseudo-Inverse  $F^{(-1)}$  und es gilt  $F_i^{(-1)}(u_i) = x_i$ . Mit dem Satz von Sklar 1.2.2 und der Stetigkeit der Randverteilungen  $F_i$  folgern wir nun:

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) &= H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \\ &= C(F_1(F_1^{(-1)}(u_1)), \dots, F_n(F_n^{(-1)}(u_n))) \\ &= C(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

□

### 1.3 Eigenschaften der Copula Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Copula Funktion notieren. Unter anderem werden wir zeigen, dass Schranken existieren, zwischen denen sich Copulas bewegen und eine Ordnung auf der Menge der Copulas definieren

**Satz 1.3.1.** (*Fréchet-Hoeffding-Schranken*, siehe Cherubini et al.[3]) Jede  $n$ -dimensionale Copula  $C$  erfüllt für alle  $u \in [0, 1]^n$  die folgende Ungleichung:

$$W^n(u) := \max(u_1 + \dots + u_n + 1 - n, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n) =: M^n(u) \quad (1.6)$$

Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $W^n$  ist nur für  $n = 2$  und die obere Schranke  $M^n$  für alle  $n \geq 2$  eine Copula. Die untere Schranke entspricht der perfekten negativen Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen und wird als Kontramonotoniecopula bezeichnet (für  $n = 2$ ). Die obere Schranke hingegen entspricht der perfekten positiven Abhängigkeit und wird als Komonotoniecopula bezeichnet. Mehr zu der Herkunft der Bezeichnungen gibt es im Abschnitt 1.4.

Um uns die Schranken besser zu veranschaulichen, stellen wir ihre 3-dimensionalen Graphen in den folgenden Abbildungen dar. Als Zwischencopula, also eine Copula, welche zwischen den beiden Schranken liegt, benutzen wir, die in Beispiel 1.1.11 vorgestellte Produktcopula  $\Pi^2$ . Ihr Graph wird in der zweiten Abbildung dargestellt und soll die Lage dieser Copula zwischen den beiden Schranken verdeutlichen.

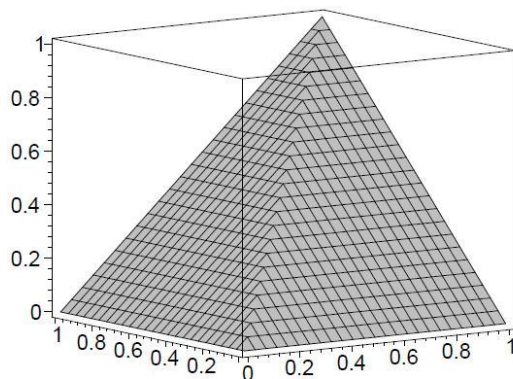


Abbildung 1.1: Obere Fréchet-Hoeffding Schranke  $M^2(u, v)$

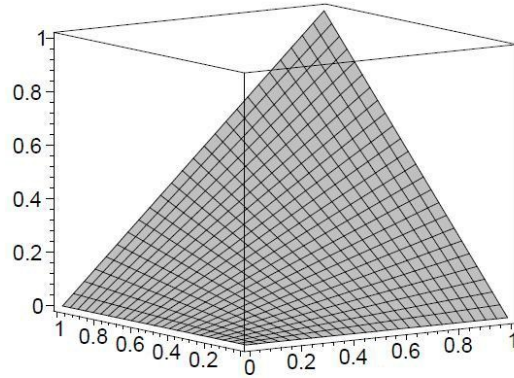


Abbildung 1.2: Produktcopula  $\Pi^2(u, v)$

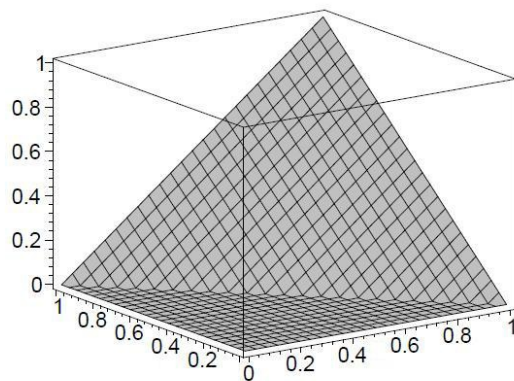


Abbildung 1.3: Untere Fréchet-Hoeffding Schranke  $W^2(u, v)$

Wir wollen nun an einem Gegenbeispiel aus [3] verdeutlichen, dass die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke  $W^n$ , für  $n \geq 3$  keine Copula ist.

**Beispiel 1.3.2.** Wir betrachten das  $W^n$ -Volumen  $V_{W^n}$  des  $n$ -dimensionalen Hyperrechtecks  $[\frac{1}{2}, 1]^n$ :

$$\begin{aligned} V_{W^n} \left( \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]^n \right) &= \binom{n}{0} \max \left( \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} - n + 1, 0 \right) \\ &\quad - \binom{n}{1} \max \left( \frac{1}{2} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{(n-1)\text{-mal}} - n + 1, 0 \right) \\ &\quad + \binom{n}{2} \max \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-2} - n + 1, 0 \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \binom{n}{n} \max \left( \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - n + 1, 0 \right) = (*) \end{aligned}$$

Nun sind alle Summanden 0, in welchen der Term  $\frac{1}{2}$ , 2 mal, oder öfter vorkommt. Insgesamt erhalten wir also:

$$(*) = 1 - n \frac{1}{2} + 0 + \dots + 0 = 1 - n \frac{1}{2}$$

Dieser Ausdruck ist für  $n \geq 3$  negativ und somit ist  $W^n$  nicht  $n$ -wachsend. Aus dieser Tatsache folgt dann, dass  $W^n$  für  $n \geq 3$  keine Copula ist.

Der nächste Satz aus dem Buch vom Nelsen [7] stellt sicher, dass die untere Schranke auch wirklich angenommen wird. Diese Tatsache impliziert, dass diese Schranke scharf ist und somit nicht verbessert werden kann.

**Satz 1.3.3.** (siehe Nelsen [7]) Für  $n \geq 3$  und jedes  $u \in [0, 1]^n$  existiert eine Copula  $C$ , so dass die Gleichung  $C(u) = W^n(u)$  gilt.

Als nächstes wollen wir uns der Frage widmen, wie man Copulas hinsichtlich ihrer Größe vergleichen kann. Als Vorarbeit betrachten wir zunächst die Überlebensfunktion und die Überlebenscopula. Wir leiten uns zuerst für den zweidimensionalen Fall aus

der gemeinsamen Überlebensfunktion die Überlebenscopula her und verallgemeinern die Copula dann für den mehrdimensionalen Fall.

**Definition 1.3.4.** (*gemeinsame Überlebensfunktion*) Für das Paar  $(X, Y)$  von Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$  ist die gemeinsame Überlebensfunktion  $\bar{H}$  gegeben durch:

$$\bar{H}(x, y) := \mathbb{P}(X > x, Y > y)$$

Mit der Hilfe des Satzes von Sklar wollen wir jetzt die Überlebenscopula herleiten. Seien dafür  $\bar{F}_1$  und  $\bar{F}_2$  die Randverteilungen der Überlebensfunktion  $\bar{H}$ . Wenden wir nun die Einschluss-Ausschluss Formel an:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \mathbb{P}(X > x, Y > y) = 1 - F_1(x) - F_2(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + H(x, y) \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(F_1(x), F_2(x)) \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x), 1 - \bar{F}_2(y)) \end{aligned}$$

Definieren wir uns nun die Funktion

$$\hat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (1.7)$$

, dann erhalten wir mit

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y)) \quad (1.8)$$

, die sogenannte Überlebenscopula  $\hat{C}$  von  $X$  und  $Y$ .

1.7 ist nach einem Ergebnis aus Nelsen [7](Aufgabe 2.6) eine Copula und somit ist 1.8 eine Copula.

**Definition 1.3.5.** (*Überlebenscopula im n-dimensionalen*) Sei  $H$  die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)^T$ ,  $C$  eine Copula und  $F_1, \dots, F_n$  die Randverteilungen.

Dann ist die Überlebenscopula  $\hat{H}$  definiert als:

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \hat{H}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)) \quad (1.9)$$



Damit können wir jetzt die sogenannte Konkordanzordnung auf der Menge der Copulas definieren.

**Definition 1.3.6.** (Konkordanzordnung) Eine Copula  $C_1$  ist kleiner als eine Copula  $C_2$  ( $C_1 \prec C_2$ ), wenn die beiden Bedingungen

$$C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n)$$

und

$$\overline{C}_1(u_1, \dots, u_n) \leq \overline{C}_2(u_1, \dots, u_n)$$

erfüllt sind. Dabei ist  $\overline{C}_i(u_1, \dots, u_n)$  die Überlebensfunktion mit dem Zusammenhang  $\overline{C}_i(u_1, \dots, u_n) = \widehat{C}_i(1 - u_1, \dots, 1 - u_n)$ . Mit diesem Zusammenhang ergibt sich für den 2-dimensionalen Fall die Äquivalenz der beiden Bedingungen, denn:

$$\begin{aligned} \overline{C}_1(x, y) &\leq \overline{C}_2(x, y) \\ \Leftrightarrow 1 - x - y + C_1(x, y) &\leq 1 - x - y + C_2(x, y) \\ \Leftrightarrow C_1(x, y) &\leq C_2(x, y) \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.3.7.** Die Konkordanzordnung ist nur eine Partialordnung. Dies bedeutet, dass man nicht alle Copulas miteinander vergleichen kann.

Diese Eigenschaft wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen.

**Beispiel 1.3.8.** Sei  $C(x, y) = \frac{W^2(x, y) + M^2(x, y)}{2}$ . Wir vergleichen  $C(x, y)$  mit der Produktcopula  $\Pi(x, y)$ .

Für  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T \in [0, 1]^2$  gilt:

$$C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{0 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16} = \Pi\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Werten wir aber die Copulas für den Vektor  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$  aus, so erhalten wir:

$$C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{0 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} < \frac{3}{16} = \Pi\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Damit haben wir einmal  $C(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \succ \Pi(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  und  $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \prec \Pi(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ . Daraus folgt, dass wir diese beiden Copulas nicht vergleichen können.

## 1.4 Konkordanz, Kendall's Tau und Tail Dependence

Der Korrelationskoeffizient, ein beliebtes Mittel um die Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen zu messen, ist vor allem in Fällen, wo die Zufallsvariablen nicht mal annähernd normalverteilt sind, ein ungenügendes Abhängigkeitsmaß. In diesen Fällen greift man auf sogenannte Rangkorrelationskoeffizienten zurück. In diesem Abschnitt werden wir mit Kendall's Tau eine Rangkorrelationskoeffizienten vorstellen und den Zusammenhang zwischen Copulas und ihm herstellen. Da diese die Abhängigkeit mittels Konkordanz messen, werden wir in dieses Kapitel mit der Definition der Konkordanz einsteigen. Abschließen werden wird diesen Abschnitt mit dem Konzept der Tail Dependence.

**Definition 1.4.1.** (Konkordanz) Seien  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  Beobachtungen des Zufallsvektors  $(X, Y)^T$ , wobei  $X$  und  $Y$  stetig sind.  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  sind konkordant wenn  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  gilt und diskordant wenn  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .

Anschaulich bedeutet Konkordanz, dass hohe Werte einer Zufallsvariablen dann auftreten, wenn die andere Zufallsvariable ebenfalls hohe Werte annimmt. Bei Diskordanz treten hohe Werte dann auf, wenn die andere Zufallsvariable niedrige Werte annimmt.

Um uns das besser vorstellen zu können, stellen wir in den folgenden zwei Abbildungen ein konkordantes und ein diskordantes Paar Zufallsvariablen dar.

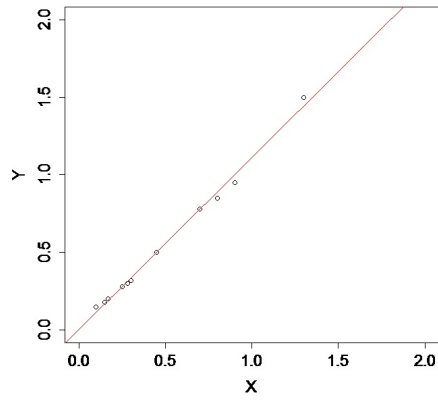


Abbildung 1.4: Ein konkordantes Paar Zufallsvariablen

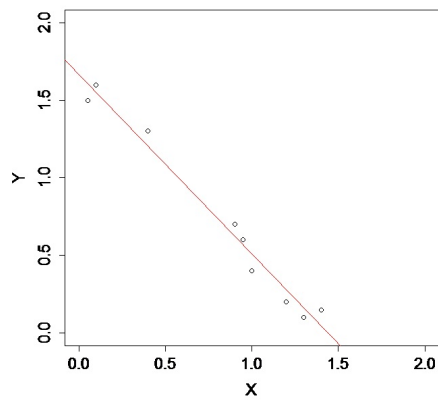


Abbildung 1.5: Ein diskordantes Paar Zufallsvariablen

In Abbildung 1.4 sehen wir die Beobachtungen des Zufallsvektors  $(X, Y)^T$ . Durch diese Punktwolke wurde eine Regressionsgerade gezogen, die den Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  ausdrückt. Wir sehen, dass dieser Zusammenhang positiv ist. Steigen nämlich die Werte von  $X$ , so steigen auch die Werte von  $Y$ .

In Abbildung 1.5 nehmen die beiden Zufallsvariablen entgegengesetzte Werte an. Der Zusammenhang ist negativ, was durch die Regressionsgerade verdeutlicht wird, die eine negative Steigung hat.

Nun wollen wir mit *Kendalls Tau*, einen Rangkorrelationskoeffizienten einführen, wobei wir nur die auf eine Verteilungsfunktion basierende Version betrachten werden.

**Definition 1.4.2.** (*Kendall's Tau*) Sei  $(X, Y)^T$  ein Vektor stetiger Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$ . Dann ist *Kendall's Tau* definiert als

$$\tau_{X,Y} := \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (1.10)$$

Kendall's Tau ist also nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus die Wahrscheinlichkeit der Diskordanz.  $(X_1, Y_1)^T$  und  $(X_2, Y_2)^T$  sind dabei unabhängig und identisch verteilt, mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$ .

Nun wollen wir eine Verbindung zwischen Konkordanz, den Rangkorrelationskoeffizienten und Copulas herstellen. Dafür müssen wir zuerst eine Konkordanzfunktion definieren.

**Definition 1.4.3.** (*Konkordanzfunktion Q*) Seien  $(X_1, Y_1)^T$  und  $(X_2, Y_2)^T$  Vektoren stetiger Zufallsvariablen, mit gemeinsamen Verteilungsfunktionen  $H_1$  und  $H_2$  und den Randverteilungen  $F$  und  $G$ . Wir definieren  $Q$  als die Wahrscheinlichkeit von Konkordanz minus die Wahrscheinlichkeit von Diskordanz:

$$Q := (\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]) \quad (1.11)$$

Der nächste Satz aus Nelsen[7] liefert den ersten Zusammenhang zwischen Konkordanz und Copulas.

**Satz 1.4.4.** (siehe Nelsen [7]) Seien  $(X_1, Y_1)^T$  und  $(X_2, Y_2)^T$  Vektoren stetiger Zufallsvariablen, mit gemeinsamen Verteilungsfunktionen  $H_1$  und  $H_2$  und den Randverteilungen  $F$  und  $G$ . Seien  $C_1$  und  $C_2$  Copulas von  $(X_1, Y_1)^T$  und  $(X_2, Y_2)^T$ . Mit dem

Satz von Sklar haben wir dann den Zusammenhang,  $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$  und  $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ . Die in Definition 1.4.3 eingeführte Konkordanzfunktion  $Q$  lässt sich dann schreiben als

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (1.12)$$

*Beweis.* Da die Zufallsvariablen stetig sind gilt,

$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$  und daraus folgend

$$Q = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \quad (1.13)$$

Der Ausdruck  $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$  lässt sich in die Summe der beiden Teilausdrücke  $\mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2]$  und  $\mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$  zerlegen. Daher können wir sie unabhängig voneinander betrachten und am Ende des Beweises wieder addieren. Wir können diese Wahrscheinlichkeiten mittels der Integration über die Verteilungen eines der Zufallsvektoren  $(X_1, Y_1)^T$  oder  $(X_2, Y_2)^T$  berechnen:

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.2.2}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \mathbb{E}[C_2(F(X_1), G(Y_1))] = (*) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Vektor  $(U_1, V_1)^T$  von auf  $(0, 1)$  gleichverteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $C_1$ . Es gilt  $(X_1, Y_1) \stackrel{d}{=} (F^{(-1)}(U_1), G^{(-1)}(V_1))$  (Verfahren um Zufallszahlen zu erzeugen). Setzen wir nun ein:

$$\begin{aligned} (*) &= \mathbb{E}[C_2(F(F^{(-1)}(U_1)), G(G^{(-1)}(V_1)))] \\ &\stackrel{\text{stetig}}{=} \mathbb{E}[C_2((U_1), G(V_1))] \\ &= \iint_{[0,1]^2} C_2(F(u), G(v)) dC_1(F(u), G(v)) \end{aligned}$$

2. Kommen wir nun zum zweiten Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &\stackrel{1}{=} \iint_{[0,1]^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(F(u), G(v)) = (*)\end{aligned}$$

Da  $C_1$  Verteilungsfunktion eines Paares  $(U, V)^T$  auf  $(0, 1)$  gleichverteilter Zufallsvariablen, mit  $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = \frac{1}{2}$ , ist, folgt:

$$\begin{aligned} (*) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{[0,1]^2} C_2(F(u), G(v)) dC_1(F(u), G(v)) \\ &= \iint_{[0,1]^2} C_2(F(u), G(v)) dC_1(F(u), G(v))\end{aligned}$$

Aus 1 und 2 folgt dann:

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint_{[0,1]^2} C_2(F(u), G(v)) dC_1(F(u), G(v))$$

Durch einsetzen unseres Ergebnisses in die Darstellung von  $Q$  in der Formel 1.13 erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Wir wollen jetzt einige Eigenschaften von  $Q$  notieren.

**Korollar 1.4.5.** (siehe Nelsen [7])

1.  $Q$  ist symmetrisch in ihren Argumenten:  $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$ .
2.  $Q$  ist monoton steigen in jedem Argument. Gilt nämlich  $C_1(u, v) \prec C'_1(u, v)$  und  $C_2(u, v) \prec C'_2(u, v)$  für alle  $(u, v)^T \in [0, 1]^2$ , so folgt  $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$ .
3. Copulas können in  $Q$  durch Überlebenscopulas ersetzt werden, d.h.  $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$ .

**Bemerkung 1.4.6.** Vor allem Eigenschaft 3 ist in der Hinsicht interessant, dass sie schon in dem Beweis des vorherigen Satzes aufgetaucht ist. Wir hatten dort die beiden Teilausdrücke getrennt betrachtet und die gleichen Ergebnisse erhalten. Diese beiden Ausdrücke waren aber nicht anderes als  $Q(C_1, C_2)$  und  $Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$ .

Bevor wir ein Beispiel zur Konkordanzfunktion  $Q$  notieren werden, müssen wir noch den sogenannten Träger einer Funktion einführen.

**Definition 1.4.7.** (*Träger einer Funktion*) Sei  $A$  ein topologischer Raum und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Der Träger von  $f$  hat folgende Gestalt:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$$

Der Träger von  $f$  ist also die abgeschlossene Hülle der Nichtnullstellenmenge von  $f$ .

**Beispiel 1.4.8.** An diesem Beispiel wollen wir verdeutlichen, warum die in Abschnitt 1.3 eingeführten Copulas  $W^2$  und  $M^2$  ihre Bezeichnungen Komonotoniecopula und Kontramonotoniecopula haben. Wir erinnern uns, dass die Werte 1 und  $-1$  beim Korrelationskoeffizient, den perfekten positiven linearen Zusammenhang und den perfekten negativen linearen Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen angeben.

Da  $Q$  als Differenz von zwei Wahrscheinlichkeiten definiert wurde, gilt  $Q(C, C) \in [-1, 1]$  und wir notieren, dass die Werte 1 und  $-1$  dieselbe Bedeutung wie bei dem Korrelationskoeffizienten haben.

Im Gegensatz zu dem Korrelationskoeffizient werden mittels  $Q$  aber nicht nur lineare Zusammenhänge gemessen.

Wir wollen nun die Konkordanzfunktion für diese zwei Copulas auswerten und daraus auf ihre Bezeichnungen schließen:

1. Laut Beispiel 2.11(siehe Nelsen [7])gilt, dass der Träger von  $M^2$  in  $[0, 1]^2$  die Diagonale  $u = v$  ist. Da die Randverteilungen von  $M^2$  gleichverteilt auf  $[0, 1]$  sind gilt für eine integrierbare Funktion  $g$  auf  $[0, 1]^2$ :

$$\iint_{[0,1]^2} g(u, v) dM^2(u, v) = \int_0^1 g(u, u) du$$

Mit diesen beiden Informationen und Satz 1.4.4 erhalten wir:

$$Q(M^2, M^2) = 4 \iint_{[0,1]^2} \min(u, v) dM^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1$$

$Q$  nimmt also den maximalen Wert ihres Wertebereiches an. Wir können daraus schließen, dass die Copula  $M^2$  genau dann Anwendung findet, wenn zwei Zufallsvariablen perfekt abhängig sind. Daher kommt auch die Bezeichnung *Komonotonicopula*.

2. Laut dem selben Beispiel gilt für den den Träger von  $W^2$ ,  $v = 1 - u$ . Also folgt,

$$\iint_{[0,1]^2} g(u, v) dW^2(u, v) = \int_0^1 g(u, 1 - u) du$$

und wir können  $C(W^2, W^2)$  berechnen:

$$Q(W^2, W^2) = 4 \iint_{[0,1]^2} \max(u + v - 1, 0) dW^2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1$$

Wir sehen, dass  $Q$  den minimalen Wert ihres Wertebereiches annimmt. Wie bei der Komonotonicopula, können wir daraus einen Rückschluss auf die Art der Abhängigkeit, die durch die *Kontramotonicopula* ausgedrückt wird, ziehen. Es gilt, dass die Kontramotonicopula genau dann Anwendung findet, wenn zwei Zufallsvariablen perfekt unabhängig sind.

**Bemerkung 1.4.9.** Wertet man für eine beliebige Copula  $C$  und die drei Standardcopulas  $W^2$ ,  $M^2$  und  $\Pi^2$  die Konkordanzfunktion  $Q$  aus, so erhält man folgende Resultate:

$$Q(C, M^2) \in [0, 1], Q(C, \Pi^2) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \quad (1.14)$$

und

$$Q(C, W^2) \in [-1, 0]$$

Da wir mit Satz 1.4.4 einen Zusammenhang zwischen Konkordanz und Copulas hergestellt haben, wollen wir nun Copulas mit Kendall's Tau in Verbindung setzen. Dabei greifen wir auf Satz 1.4.4 zurück und notieren:



**Satz 1.4.10.** (siehe Nelsen [7]) Seien  $X$  und  $Y$  stetige Zufallsvariablen mit Copula  $C$ . Dann ist Kendall's Tau für  $X$  und  $Y$  gegeben als

$$\begin{aligned}\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) &= 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \\ &= 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1\end{aligned}\quad (1.15)$$

Wir wollen nun diesen Abschnitt mit den Konzept der Tail Dependence abschließen. Bei der Tail Dependence geht es um die Stärke der Abhängigkeit, zweier Zufallsvariablen in den Rändern der gemeinsamen Verteilung. Die Tail Dependence ist daher ein gutes Mittel um extreme Ereignisse, wie zum Beispiel den gleichzeitigen Ausfall mehrerer Kredite, zu untersuchen.

**Definition 1.4.11.** (Untere und obere Tail Dependence) Sei  $(X, Y)^T$  ein Vektor stetiger Zufallsvariablen mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$ . Die beiden Zufallsvariablen heißen asymptotisch abhängig im oberem Tail, falls die obere Tail Dependence, definiert durch

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)), \quad (1.16)$$

existiert und  $\lambda_U > 0$  gilt.

$X$  und  $Y$  heißen asymptotisch abhängig im unteren Tail, falls die untere Tail Dependence, definiert durch

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u)), \quad (1.17)$$

existiert und  $\lambda_L > 0$  gilt.

Gilt  $\lambda_U = 0$  bzw.  $\lambda_L = 0$ , so sind die Zufallsvariablen asymptotisch unabhängig im oberen bzw. unteren Tail.

Bevor wir den Zusammenhang zwischen Tail Dependence und Copulas notieren, müssen wir zuerst die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit für Copulas einführen.

**Definition 1.4.12.** Sei  $\bar{C}$  eine Überlebensfunktion. Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(U > u | V > v) = \frac{\bar{C}(u, v)}{1 - v} = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}. \quad (1.18)$$

Nun können wir den Zusammenhang zwischen Tail Dependence und Copulas notieren.

**Lemma 1.4.13.** Sei  $C$  eine bivariate Copula. Konvergiert der Ausdruck

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P}(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)) = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \in (0, 1], \quad (1.19)$$

so hat  $C$  obere Tail Dependence.

Konvergiert dagegen der Ausdruck

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u)) = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \in (0, 1], \quad (1.20)$$

so hat  $C$  untere Tail Dependence.

*Beweis.* Der Beweis folgt mit Definition 1.4.12. □

**Bemerkung 1.4.14.** Wie man an den beiden Ausdrücken  $\lambda_U$  und  $\lambda_L$  sehen kann, hängt die Tail Dependence nur von der Copula und nicht von den Randverteilungen ab.

## 2 Archimedische Copulas

In diesem Kapitel wollen wir mit den Archimedischen Copulas eine wichtige Art von Copulas einführen, die sich im bivariaten Fall durch die Vielfalt an Familien auszeichnen und vor allem auf ziemlich einfache Weise durch eine eindimensionale Funktion erzeugt werden können. Neben diesen positiven Eigenschaften werden wir feststellen müssen, dass die multivariate Erweiterung dieser Copulas an einige Bedingungen geknüpft sein wird und dass die Modellierung von Abhängigkeiten mittels multivariater Archimedischer Copulas nur im sogenannten symmetrischen Fall befriedigende Ergebnisse liefert.

Im ersten Abschnitt werden wir zeigen wie man bivariate Archimedische Copulas konstruiert und einige ihrer Eigenschaften notieren. Fortsetzen werden wir das Kapitel mit der Konstruktion und den Eigenschaften multivariater Archimedischer Copulas. Im letzten Abschnitt werden wir zwei einparametrische Familien Archimedischer Copulas vorstellen.

### 2.1 Konstruktion und Eigenschaften bivariater Archimedischer Copulas

In diesem Abschnitt wollen wir die Konstruktion einer Archimedischen Copula im 2-dimensionalen Fall vorstellen. Um dazu in der Lage zu sein, benötigen wir die Definition der Pseudo-Inversen; einer stetigen und streng monoton fallenden Funktion.

**Definition 2.1.1.** (*Pseudo-Inverse*) Sei  $\varphi$  eine stetige, streng monoton fallende Funktion mit  $Dom(\varphi) = [0, 1]$ ,  $Ran(\varphi) = [0, \infty]$  und  $\varphi(1) = 0$ . Die *Pseudo-Inverse*

$\varphi^{[-1]}$  von  $\varphi$  ist definiert als

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} . \quad (2.1)$$

**Bemerkung 2.1.2.** Wir werden im Folgendem  $\varphi$  im Zusammenhang mit der Konstruktion Archimedischer Copulas als *Erzeuger* bezeichnen und die Menge aller Erzeuger wird als  $\Omega$  notiert .

$\varphi^{[-1]}$  ist stetig und monoton fallend auf dem Intervall  $[0, \infty]$ , und streng monoton fallend auf  $[0, \varphi(0)]$ .

Betrachtet man die Komposition von  $\varphi^{[-1]}$  und  $\varphi$  auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$ , so gilt  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ . Allgemein gilt

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \\ = \min(t, \varphi(0)). \end{cases} \quad (2.2)$$

Gilt  $\varphi(0) = \infty$  so folgt daraus, dass die Pseudo-Inverse  $\varphi^{[-1]}$  gleich der Inversen  $\varphi^{-1}$  ist, in diesem Fall wird  $\varphi$  als *striker Erzeuger* bezeichnet. Die Menge der strikten Erzeuger, werden wir mit  $\Omega_\infty$  abkürzen.

**Definition 2.1.3.** (2-dimensionale Archimedische Copula) Eine 2 dimensionale Copula mit Erzeuger  $\varphi \in \Omega$  wir als archimedisch bezeichnet, wenn sie für alle  $u, v \in [0, 1]$  folgendermaßen konstruiert ist:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (2.3)$$

Wir wollen nun zeigen, dass 2.3 die 3 Bedingungen einer Copula Funktion erfüllt, wobei die Eigenschaft *2-steigend* an eine Voraussetzung gekoppelt ist.

**Lemma 2.1.4.** (siehe Nelsen [7]) Sei  $\varphi \in \Omega$  ein Erzeuger und  $\varphi^{[-1]}$  seine Pseudo-Inverse. Die Funktion  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  erfüllt für alle  $u, v \in [0, 1]$  die ersten beiden Bedingungen an eine Copula. Desweiteren ist  $C(u, v)$  genau dann *2-wachsend* wenn die Ungleichung  $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$  mit  $u_2 \geq u_1$  für alle  $v \in [0, 1]$  erfüllt ist.

*Beweis.* Seien  $u, v \in [0, 1]$  beliebig:

1. (geerdet)

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = (*)$$

Da  $\varphi(u) \geq 0$  gilt, folgt daraus  $\varphi(u) + \varphi(0) \geq \varphi(0)$  und daraus dann mit Definition der Pseudoinversen, dass  $(*)=0$  ist. Da die nach 2.3 konstruierten Copulas offensichtlich symmetrisch in ihren Argumenten sind, gilt auch  $C(0, v) = 0$ .

2.

$$\begin{aligned} C(u, 1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + 0) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ , wie in Bemerkung 2.1.2 schon erwähnt wurde, auf dem Einheitsintervall immer erfüllt ist. Aus der Symmetrie folgt dann, dass auch  $C(1, v) = v$  gilt.

3. (2-wachsend) Die Voraussetzung  $C(u_1, v) - C(u_2, v) \leq u_2 - u_1$  ist äquivalent dazu, dass  $V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$  ist.

Nehmen wir also an, dass die Voraussetzung gilt. Für das weitere Vorgehen wählen wir  $v_1, v_2 \in [0, 1]$ , mit  $v_1 \leq v_2$ . Es gilt nun

$C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$ . Da  $C$  auf Grund der Stetigkeit von  $\varphi$  und  $\varphi^{[-1]}$  auch stetig ist, können wir mit dem Zwischenwertsatz folgern, dass ein  $p \in [0, 1]$  existiert mit  $C(p, v_2) = v_1$ . Es gilt dann  $\varphi(v_1) = \varphi(p) + \varphi(v_2)$  und daraus folgend dann:

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(p)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(p)) \\ &= C(C(u_2, v_2), p) - C(C(u_1, v_2), t) \stackrel{Vor.}{\leq} C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \\ &\Rightarrow V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0 \\ &\Rightarrow C(u, v) \text{ ist 2-wachsend} \end{aligned}$$

□

Wie wir in dem vorherigen Lemma 2.1.4 festgestellt haben, ist die Eigenschaft 2-wachsend bei  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  an eine Bedingung geknüpft, welche man zusammen mit den anderen beiden Eigenschaften einer Copula nachprüfen müsste. Das folgende Lemma erleichtert uns diese Arbeit, in dem es eine notwendige und hinreichende Bedingung vorgibt, unter welcher  $C(u, v)$  eine bivariate Archimedische Copula ist.

**Lemma 2.1.5.** (siehe Alsina et. al [1]) Sei  $\varphi \in \Omega$  ein Erzeuger.

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

ist genau dann eine bivariate Archimedische Copula wenn  $\varphi$  konvex ist.

Wir wollen nun zwei Beispiele bivariater Archimedischer Copulas betrachten.

**Beispiel 2.1.6.** Sei  $\varphi = -\ln(x)$ , wobei  $x \in [0, 1]$ . Da  $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = \infty$  gilt, ist der Erzeuger strikt und somit  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1} = \exp(-x)$ , mit  $x \in [0, \infty)$ . Konstruieren wir nun unsere Copula:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \exp(-(\ln(u) + \ln(v))) = \exp(\ln(u) + \ln(v)) \\ &= \exp(\ln(u)) \exp(\ln(v)) = uv = \Pi^2(u, v) \end{aligned}$$

Wir sehen also die zum Erzeuger  $\varphi = -\ln(x)$  gehörende Archimedische Copula, ist die Produktcopula  $\Pi^2$ .

**Beispiel 2.1.7.** Sei  $\varphi = 1 - x$  für  $x \in [0, 1]$ . Die zugehörige Pseudoinverse hat die Gestalt

$$\varphi^{[-1]}(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{für } x \in (1, \infty] \end{cases}.$$

Wir können die Pseudo-Inverse schreiben als  $\varphi^{[-1]}(x) = \max(1 - x, 0)$ . Für die zugehörige Archimedische Copula gilt dann:

$$C(u, v) = \max(1 - (1 - u + 1 - v), 0) = \max(u + v - 1, 0) = W^2(u, v)$$

Die von  $\varphi = 1 - x$  erzeugte Archimedische Copula ist die Kontramonotonicopula  $W^2$ .

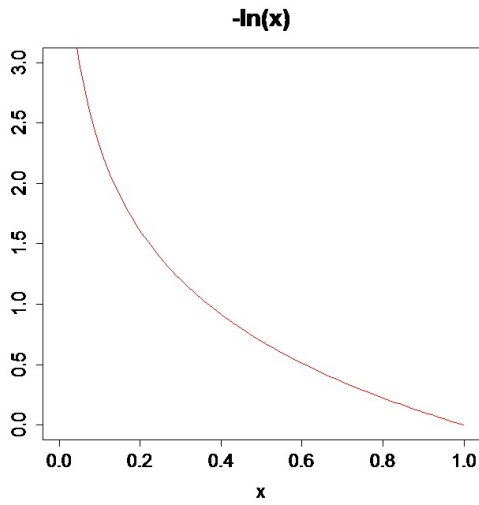


Abbildung 2.1: Strikter Erzeuger der Produktcopula

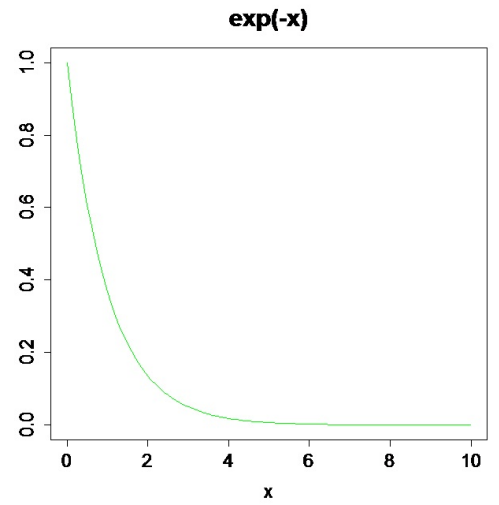


Abbildung 2.2: Inverse des Erzeugers

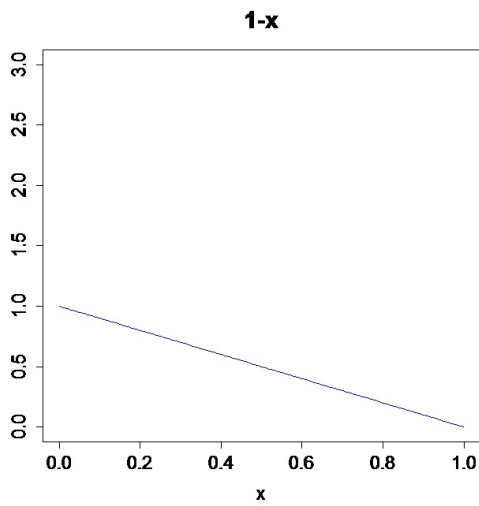


Abbildung 2.3: Erzeuger der Kontramotonicopula

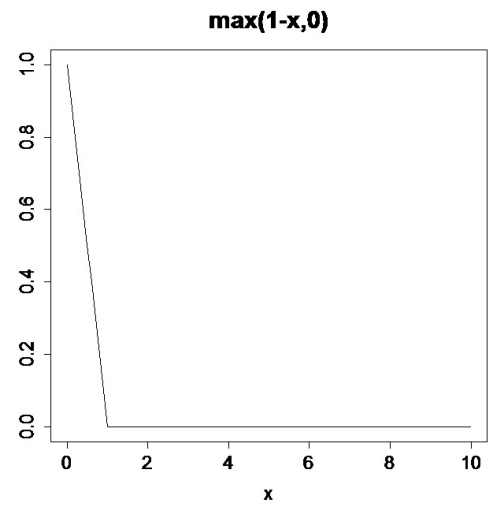


Abbildung 2.4: Pseudo-Inverse des Erzeugers

Der nächste Satz aus Nelsen [7], liefert uns einige nützliche Eigenschaften bivariater Archimedischer Copulas.

**Satz 2.1.8.** (*Eigenschaften bivariater Archimedischer Copula*, siehe Nelsen [7]) Sei  $\varphi \in \Omega$  Erzeuger einer bivariaten Archimedischen Copula  $C$ :

1.  $C$  ist symmetrisch in ihren Argumenten:  $C(u, v) = C(v, u)$  für alle  $v, u \in [0, 1]$ .
2.  $C$  ist assoziativ:  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  für alle  $u, v, w \in [0, 1]$ .
3. Für ein  $t \in (0, \infty)$ , ist  $t\varphi$  ebenfalls ein Erzeuger.

*Beweis.* Seien  $u, v, w \in [0, 1]$  beliebig:

1.

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v, u)$$

2. Wir betrachten zuerst den Fall, dass  $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \leq \varphi(0)$ . Nach Definition der Pseudo-Inversen gilt dann  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$  und wir erhalten,

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Der zweite Fall  $(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \geq \varphi(0)$  ist klar, denn nach der Definition der Pseudo-Inversen, nimmt sie für alle  $t \geq \varphi(0)$  den Wert 0 an. Somit erhalten wir  $C(C(u, v), w) = 0 = C(u, C(v, w))$ .

3. Die dritte Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass eine konvexe Funktion multipliziert mit einem positiven Skalar konvex bleibt und Lemma 2.1.5.

□



Nun wollen wir einen Weg findeN, wie man die Konkordanzordnung (siehe Definition 1.3.6) bei Archimedischen Copulas bestimmt. Als Voraussetzung für den dazu benötigten Satz, brauchen wir zuerst die Definition der Subadditivität von Funktionen.

**Definition 2.1.9.** (Subadditivität) Eine Funktion  $f$  mit  $Dom f = [0, \infty)$  wird als subadditiv bezeichnet, wenn für alle  $x, y \in [0, \infty)$  die Ungleichung  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  erfüllt ist.

**Satz 2.1.10.** (siehe Schweizer et. al [11]) Sei  $C_1$  eine Archimedische Copula mit Erzeuger  $\varphi_1 \in \Omega$  und  $C_2$  eine Archimedische Copula mit Erzeuger  $\varphi_2 \in \Omega$ . Die Relation  $C_1 \prec C_2$  gilt genau dann, wenn  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$  subadditiv ist.

Das folgende Lemma gibt ein Kriterium an, unter welchem die Subadditivität einer Funktion immer gilt.

**Lemma 2.1.11.** (siehe Schweizer, Sklar [11]) Sei  $f$  eine Funktion mit  $Dom(f) = [0, \infty)$ . Ist  $f$  konkav und gilt zudem  $f(0) = 0$ , dann ist  $f$  subadditiv.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wollen wir das Konkordanzmaß Kendall's Tau und Tail Dependence, für Archimedische Copulas definieren. Zuerst benötigen wir aber die Definition der Verteilungsfunktion einer Archimedischen Copula.

**Definition 2.1.12.** (C-Maß) Das C-Maß einer Menge ist sein C-Volumen  $V_C$ . Anders Ausgedrückt, ist das C-Maß einer Teilmenge  $R \subset [0, 1]^2$ , die Wahrscheinlichkeit, dass zwei auf  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariablen  $U$  und  $V$ , mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$ , einen Wert aus  $R$  annehmen.

**Satz 2.1.13.** (siehe Nelsen [7]) Sei  $C$  eine Archimedische Copula mit Erzeuger  $\varphi \in \Omega$  und sei  $K_C(t)$  das C-Maß der Menge  $\{(u, v) \in [0, 1]^2 | C(u, v) \leq t\}$ . Dann gilt für jedes  $t \in [0, 1]$ :

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \tag{2.4}$$

Dabei ist  $\varphi'(t^+)$  die rechtsseitige Ableitung von  $\varphi$  im Punkt  $t$ .

**Korollar 2.1.14.** (siehe Nelsen [7]) Seien  $U$  und  $V$  zwei auf  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion  $C$ , wobei  $C$  eine von  $\varphi \in \Omega$  erzeugte Archimedische Copula sei. Dann ist  $K_C$  (siehe 2.4) die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $C(U, V)$ .

Nun sind wir in der Lage den Satz über Kendall's Tau bei Archimedischen Copulas zu notieren und ihn zu beweisen.

**Satz 2.1.15.** (*Kendall's Tau für Archimedische Copulas*, siehe Nelsen [7]) Seien  $X$  und  $Y$  stetige Zufallsvariablen mit Copula  $C$ , wobei  $C$  eine von  $\varphi \in \Omega$  erzeugte Archimedische Copula sei. Das Konkordanzmaß Kendall's Tau  $\tau_C$  (siehe 1.4.10) für  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Seien  $U$  und  $V$  zwei, auf dem offenen Intervall  $(0, 1)$ , gleichverteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $C$ . Sei weiterhin  $K_C$  die Verteilungsfunktion von  $C(U, V)$ . Nun wissen wir aus Satz 1.4.10, dass für eine beliebige Copula  $C$  Kendall's Tau folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \tau_C &= 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1 = \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\ &= \int_0^1 t \frac{dK_C(t)}{dt} dt - 1 = [4tK_C(t)]_0^1 - 1 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt \\ &= 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt = (*) \end{aligned}$$

Wir wissen aus Korollar 2.1.14, dass das in Satz 2.1.13 definierte C-Maß

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}$$

, die Verteilungsfunktion von  $C(U, V)$  ist. Da der Erzeuger  $\varphi$  streng monoton fallend ist, ist er fast überall differenzierbar und daraus folgt dann  $\varphi'(t^+) = \varphi'(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Fast überall bedeutet, dass die Menge der Stellen an denen  $\varphi$  nicht differenzierbar ist, eine lebesguesche Nullmenge bildet.

Mit diesen Informationen können wir unseren Beweis fortführen:

$$\begin{aligned}
 (*) &= 3 - 4 \int_0^1 \left( t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right) dt \\
 &= 3 - \left( 4 \int_0^1 t dt - 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \right) \\
 &= 3 - 2 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\
 &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt
 \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir noch, das im ersten Kapitel vorgestellte Konzept der Tail Dependence, auf Archimedische Copulas übertragen.

**Satz 2.1.16.** (siehe Joe [5]) Sei  $C$  eine bivariate Archimedische Copula mit dem striktem Erzeuger  $\varphi \in \Omega_\infty$ , für dessen Inverse zusätzlich die Bedingung

$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0$  erfüllt ist (Die Bedeutung dieser Bedingung wird im nächsten Abschnitt deutlich.). Gilt  $\varphi^{-1}'(0) = -\infty$  so hat  $C$  obere Tail Dependence, die durch

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{\varphi^{-1}'(2s)}{\varphi^{-1}'(s)} \right) \tag{2.6}$$

gegeben ist.

Für die untere Tail Dependence von  $C$  gilt

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi^{-1}'(2s)}{\varphi^{-1}'(s)} \right). \tag{2.7}$$

## 2.2 Konstruktion und Eigenschaften multivariater Archimedischer Copulas

Im folgendem Abschnitt wollen wir uns mit der Konstruktion multivariater Archimedischer Copulas beschäftigen.

Ein Ansatz wäre, die beiden bivariaten Archimedischen Copulas aus den Beispielen 2.1.6 und 2.1.7 aus dem Abschnitt 2.1 aufzugreifen und sie zu multivariaten

Archimedischen Copulas zu erweitern. Betrachten wir also zuerst die bivariate Produktcopula mit Erzeuger  $\varphi(t) = -\ln(t)$  und erweitern sie zu einer multivariaten.

Es gilt

$$\begin{aligned} \Pi^2(u_1, u_2) &= u * v = \exp(\ln(u_1) + \ln(u_2)) \\ \text{und } \Pi^n(u_1, \dots, u_n) &= \prod_{i=1}^n u_i = \exp(\ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)). \end{aligned}$$

Wir leiten nun aus diesem Beispiel einen Algorithmus für die Konstruktion multivariater Archimedischer Copulas ab. Der Algorithmus wäre:

- Schritt1: Erzeuge mit  $\varphi \in \Omega$  die bivariate Archimedische Copula  $C(u_1, u_2) = C^2(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$ .
- Schritt2: Konstruiere iterativ die dazu passende multivariate Archimedische Copula durch

$$\begin{aligned} C^n(u_1, \dots, u_n) &= C(C^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \end{aligned}$$

Wie wir anhand der Kontramotonicopula aus Beispiel 2.1.7 im Folgenden feststellen werden, funktioniert dieser Algorithmus im Allgemeinen nicht. Betrachten wir also die bivariate Kontramotonicopula  $W^2(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$  mit dem Erzeuger  $\varphi = 1 - x$ . Ohne den Algorithmus anzuwenden, können wir durch das Resultat aus Satz 1.3.1, dass  $W^n$  für  $n \geq 3$  keine Copula mehr ist, direkt feststellen, dass sich diese bivariate Archimedische Copula nicht zu einer multivariaten erweitern lässt.

Wir hatten im Abschnitt 2.1 festgestellt, dass die nach Definition 2.1.4 konstruierte bivariate Archimedische Copula, die ersten beiden Eigenschaften einer Copula ohne Voraussetzungen erfüllte. Für die dritte Eigenschaft *2-wachsend*, gab uns das Lemma 2.1.5 eine hinreichende und notwendige Bedingung an. Die Aussage war, dass  $C(u, v)$  genau dann eine Copula ist, wenn der Erzeuger  $\varphi \in \Omega$  konvex ist. Da die multivariate Archimedische Copula iterativ aus der bivariaten gebildet wird, lassen sich die ersten beiden Eigenschaften einer Copula ohne Voraussetzungen auf den

multivariaten Fall übertragen. Die Eigenschaft  $n$ -wachsend wird, wie wir in diesem Abschnitt feststellen werden, stärkere Voraussetzungen an die Pseudo-Inverse des Erzeugers und an den Erzeuger selber erfordern.

**Definition 2.2.1.** (Volständige Monotonie) Eine Funktion  $f(t)$  ist vollständig monoton auf einem Intervall  $J$ , wenn sie dort stetig, beliebig oft differenzierbar ist und ihre Ableitungen alternierend sind. Es gilt also

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0 \quad (2.8)$$

für alle  $t$  aus dem Innerem von  $J$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Lemma 2.2.2.** (siehe Widder [13]) Ist eine Funktion  $f(t)$  vollständig monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  und ist für ein  $c \geq 0$   $f(c) = 0$ , so folgt daraus, dass  $f$  auf dem ganzen Intervall  $[0, \infty)$  der Nullfunktion entspricht.

**Bemerkung 2.2.3.** Mittels der Definition 2.2.1 und dem vorherigen Lemma, können wir ein wichtiges Resultat für den Erzeuger und seine Pseudo-Inverse folgern. Ist die Pseudo-Inverse eine auf  $[0, \infty)$  vollständig monotone Funktion und besitzt sie zudem dort keine Nullstelle, so ist sie überall auf diesem Intervall positiv. Mittels Definition 2.1.1 können wir nun folgern, dass unter diesen Voraussetzungen  $\varphi(0) = \infty$  gilt und damit  $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$  für alle  $t \in [0, \infty)$ .

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts. Dieses Resultat von Kimberling [6] liefert eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass  $C^n$  für alle  $n \geq 2$  eine Copula ist.

**Satz 2.2.4.** (siehe Kimberling [6]) Sei  $\varphi \in \Omega_\infty$  ein strikter Erzeuger mit der Inversen  $\varphi^{-1}$ .

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \quad (2.9)$$

ist genau dann eine Copula, wenn die Inverse  $\varphi^{-1}$  vollständig monoton auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ist.

Wie im Abschnitt 2.1 wollen wir nun Eigenschaften  $n$ -dimensionaler Copulas notieren.

**Satz 2.2.5.** (*Eigenschaften multivariater Copulas*, siehe Savu [10])

1.  $C^n$  ist symmetrisch konstruiert, d.h.  $C^n(u_1, \dots, u_n) = C^n(u_{\Pi(1)}, \dots, u_{\Pi(n)})$  für alle  $n \geq 2$ ,  $u_i \in [0, 1]$  und alle Permutationen  $\Pi(i)$ .
2.  $C^n$  ist assoziativ, d.h.  $C^n(C(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n) = C^n(u_1, C(u_2, \dots, u_n))$  für alle  $n \geq 2$  und alle  $u_i \in [0, 1]$ .

**Bemerkung 2.2.6.** Die erste Eigenschaft ist ein sehr wichtiges Resultat dieser bisherigen Arbeit. Wir können feststellen, dass die Modellierung mittels multivariater Archimedischer Copulas nur bei symmetrischen Beziehungen der betrachteten Objekte möglich ist. Durch die Austauschbarkeit der Argumente kann man nämlich folgern, dass die Abhängigkeit zwischen den einzelnen Zufallsvariablen gleich sein muss. Dies ist vor allem dann ein Nachteil, wenn man zum Beispiel die Abhängigkeit von Unternehmen aus verschiedenen Branchen modellieren will. Dort würde diese symmetrische Konstruktion ungenügende Ergebnisse liefern, da die Abhängigkeit zwischen den Unternehmen im Allgemeinen nicht gleich ist. Wie man dieses Problem in den Griff kriegt, werden wir in Kapitel 3 herausfinden.

## 2.3 Die Clayton-und Gumbel-Hougaard Copula, als Beispiele einparametrischer Familien

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei Familien Archimedischer Copulas vorstellen, die wir im Kapitel 3 dieser Arbeit wieder aufgreifen werden.

Wie die Überschrift dieser Unterkapitels schon verrät, sind die betrachteten Familien Archimedischer Copulas parameterabhängig. Eine sehr nützliche Eigenschaft dieses Parameters, ist, dass man durch seine Wahl die Abhängigkeit zwischen den betrachteten Zufallsvariablen steuern kann.

Die hier betrachteten Beispiele sind aus dem Buch von Nelsen [7] entnommen und die Abbildungen wurden mit **R** erzeugt.

**Beispiel 2.3.1.** (*Clayton-Copula*) Die **Clayton-Copula** wird für  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$  von der Funktion  $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ , mit der zugehörigen Pseudo-Inversen

$\varphi^{[-1]}(t) = (t\theta + 1)^{-\frac{1}{\theta}}$ , erzeugt. Für  $\theta > 0$  ist der Erzeuger strikt. Wir wollen nun die bivariate Clayton Copula anhand Definition 2.1.4 aus dem Erzeuger konstruieren:

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \left( \left( \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1) + \frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1) \right) \theta + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= (u^{-\theta} - 1 + v^{-\theta} - 1 + 1)^{-\frac{1}{\theta}} = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

Da der Erzeuger für  $\theta > 0$  strikt und die Inverse vollständig monoton ist, können wir die bivariate Clayton Copula zu einer multivariaten erweitern. Es gilt für alle  $\theta > 0$  und alle  $n \geq 2$

$$C^m(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Wir wollen nun Kendall's Tau und die Tail Dependence für die Clayton-Copula berechnen.

### **Kendall's Tau**

Sei  $C_\theta$  eine parameterabhängige Archimedische Copula aus der Clayton Familie. Es gilt

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \begin{cases} \frac{t^{\theta+1}-t}{\theta}, & \text{für } \theta \neq 0 \\ t \ln(t), & \text{für } \theta = 0 \end{cases}$$

. Berechnen wir nun zuerst Kendall's Tau für den Fall, dass  $\theta \neq 0$  ist.

$$\begin{aligned} \tau_{C_\theta} &\stackrel{\text{Satz 2.1.15}}{=} 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \int_0^1 t^{\theta+1} - t dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \left[ \frac{1}{\theta+2} t^{\theta+2} - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \right) \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{2 - \theta - 2}{2\theta + 4} \right) \\ &= 1 - \frac{4}{2\theta + 4} = \frac{2\theta}{2\theta + 4} \\ &= \frac{\theta}{\theta + 2} \end{aligned}$$

Sei nun  $\theta = 0$

$$\begin{aligned}\tau_{C_\theta} &= 1 + 4 \int_0^1 t \ln(t) dt \\ &= 1 + 4 \left( \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt \right) \\ &= 1 + 4 \left( 0 - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^1 \right) = 1 - 4 \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

### **Tail Dependence**

Sei  $C_\theta$  eine parameterabhängige Archimedische Copula aus der Clayton Familie, mit  $\theta > 0$ . Für die Ableitung der Inversen gilt

$$\varphi_\theta^{-1'}(s) = -(s\theta + 1)^{-\frac{1}{\theta}-1}$$

. Mit Satz 2.1.16 erhalten wir für die untere Tail Dependence

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} \right) = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{2s\theta + 1}{s\theta + 1} \right)^{-\frac{1}{\theta}-1} \right] = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{\theta}-1} = 2^{-\frac{1}{\theta}}$$

und für die obere Tail Dependence

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} \right) = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left[ \left( \frac{2s\theta + 1}{s\theta + 1} \right)^{-\frac{1}{\theta}-1} \right] = 0.$$

Die Clayton Copula hat also keine obere Tail Dependence.

Wir wollen uns nun anhand vier Scatterplots die bivariate Clayton-Copula für verschiedene  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$  veranschaulichen. Nach dem Buch von Nelsen [7] gilt für die Extremfälle,  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(u, v) = M^2(u, v)$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = \Pi^2(u, v)$  und  $C_{-1}(u, v) = W^2(u, v)$ . Bei den Abbildungen wurde  $\theta$  jeweils so gewählt, dass die Extremfälle von Kendall's Tau, -1, 0 und fast 1 erfasst wurden. Wie wir sehen werden steigt die Abhängigkeit zwischen den betrachteten Zufallsvariablen mit  $\lim \theta \rightarrow \infty$  an, so dass wir mit einem größerem Theta ein größeres Kendall's Tau erhalten. Vor allem im dritten Scatterplot sieht man die relativ starke untere Tail Dependence ( $\lambda_L = 0.8122$ ) der Clayton Copula. In der unteren linken Ecke der Abbildung liegen die Werte der Zufallsvariablen ziemlich nah beieinander.



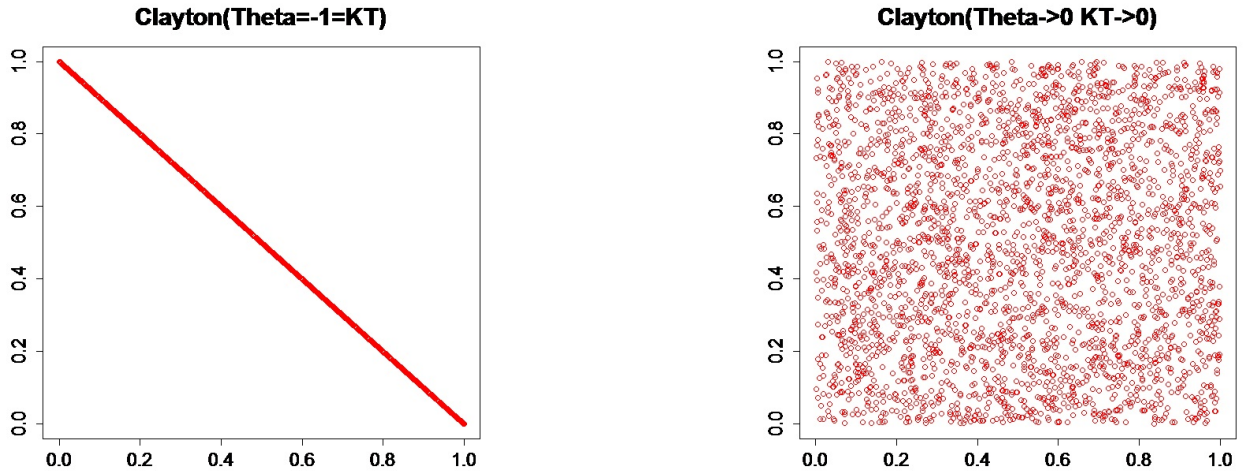


Abbildung 2.5: Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Clayton-Copula mit  $\theta = -1$  bzw.  $\theta \rightarrow 0$

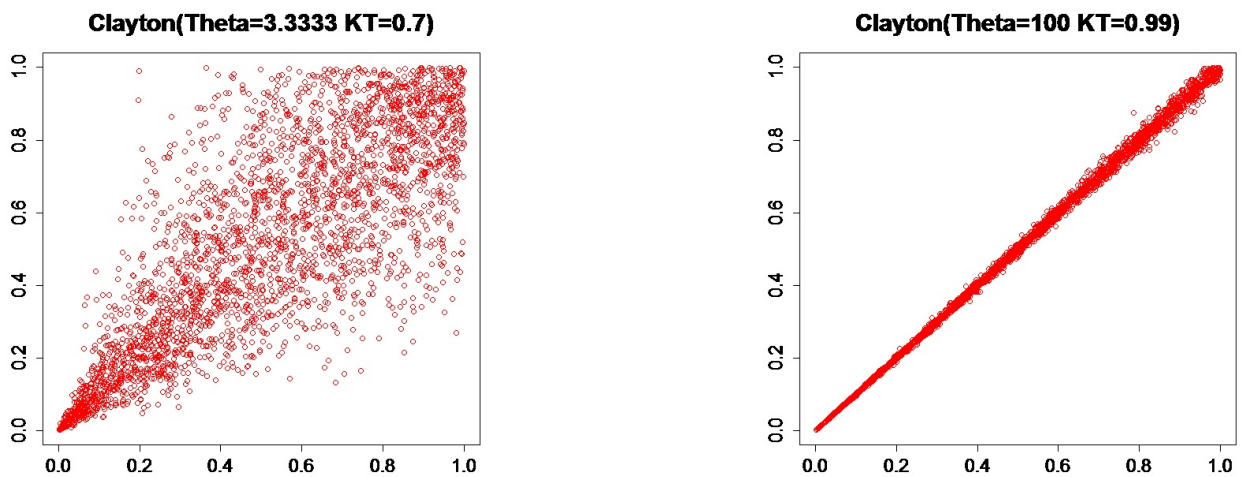


Abbildung 2.6: Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Clayton-Copula mit  $\theta = 3.333333$  bzw.  $\theta = 100$

**Beispiel 2.3.2. (Gumbel-Hougaard-Copula)** Die **Gumbel-Hougaard-Copula** wird für  $\theta \in [1, \infty)$  von der strikten Erzeugerfunktion  $\varphi(t) = (-\ln(t))^\theta$ , mit der zugehörige Inversen  $\varphi^{-1} = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$ , erzeugt. Im bivariaten Fall ergibt sich dann

$$C(u, v) = \exp(-[(-\ln(u)^\theta) + (-\ln(v)^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}).$$

Im Allgemeinen erhalten wir da der Erzeuger strikt und die Inverse vollständig monoton ist die multivariate Copula

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = \exp(-[-\sum_{i=1}^n \ln(u_i)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}).$$

Wir wollen uns nun Kendall's Tau und die Tail Dependence für die Gumbel-Hougaard Copula berechnen.

### ***Kendall's Tau***

Sei  $C_\theta$  eine parameterabhängige Archimedische Copula aus der Gumbel-Hougaard Familie. Für  $\theta \geq 1$  gilt

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t \ln(t)}{\theta}.$$

Setzen wir nun ein:

$$\begin{aligned} \tau_{C_\theta} &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln(t)}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt \right) \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left( 0 - \left[ \frac{t^2}{4} \right]_0^1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta} = \frac{\theta - 1}{\theta} \end{aligned}$$

### ***Tail Dependence***

Sei  $C_\theta$  eine parameterabhängige Archimedische Copula aus der Gumbel-Hougaard Familie, mit  $\theta \geq 1$ . Für die Ableitung der Inversen gilt

$$\varphi_\theta^{-1}'(s) = -\frac{1}{\theta} s^{\frac{1}{\theta}-1} \exp(-s^{\frac{1}{\theta}})$$

. Mit Satz 2.1.16 erhalten wir für die untere Tail Dependence von der Gumbel-Hougaard-Copula

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi^{-1}'(2s)}{\varphi^{-1}'(s)} \right) = 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right) = 0$$

und für die obere Tail Dependence

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{\varphi^{-1}'(2s)}{\varphi^{-1}'(s)} \right) = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-s^{\frac{1}{\theta}})} \right) = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}.$$

Anders als die Clayton Copula, hat die Gumbel-Hougaard-Copula keine untere Tail Dependence.

Wie bei der Clayton Copula wollen wir uns anhand von vier Scatterplots die bivariate Gumbel-Hougaard-Copula veranschaulichen. Bei dieser Copula gilt für die Extremfälle,  $C_1(u, v) = \Pi$  und  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(u, v) = M^2(u, v)$ . Wie im ersten Beispiel wurde die Wahl der Parameter den Extremfällen von Kendall's Tau angepasst. Im dritten Scatterplot kann man die relativ starke obere Tail Dependence ( $\lambda_U = 0.811$ ) der Gumbel-Hougaard-Copula beobachten. In der oberen rechten Ecke der Abbildung liegen die Werte der beiden Zufallsvariablen ziemlich nah beieinander.

Im Gegensatz zu den Zufallsvariablen mit einer Clayton Copula, sind die Zufallsvariablen, dessen Copula die Gumbel-Hougaard-Copula ist, nur positiv abhängig oder unabhängig.

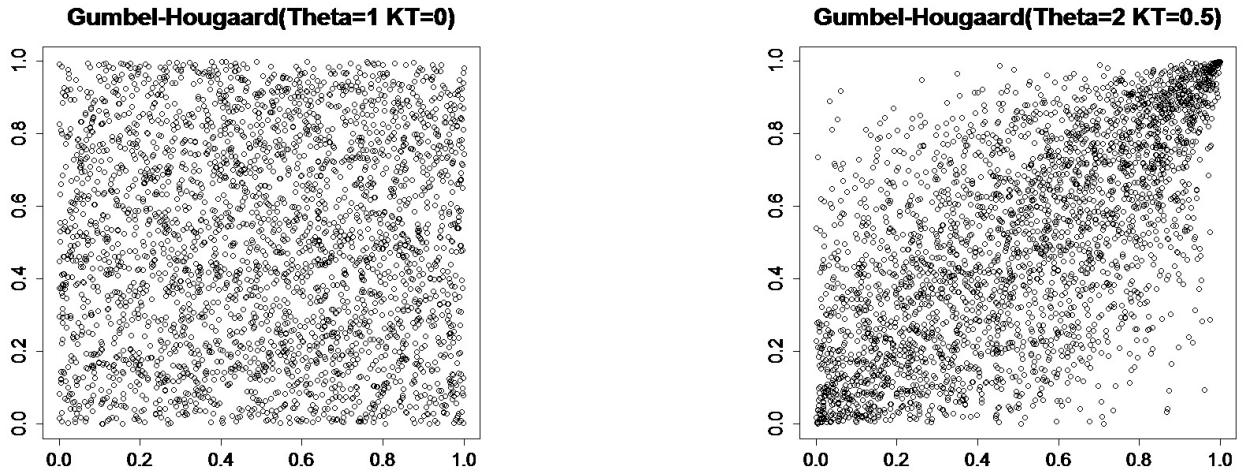


Abbildung 2.7: Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard-Copula mit  $\theta = 1$  bzw.  $\theta = 2$

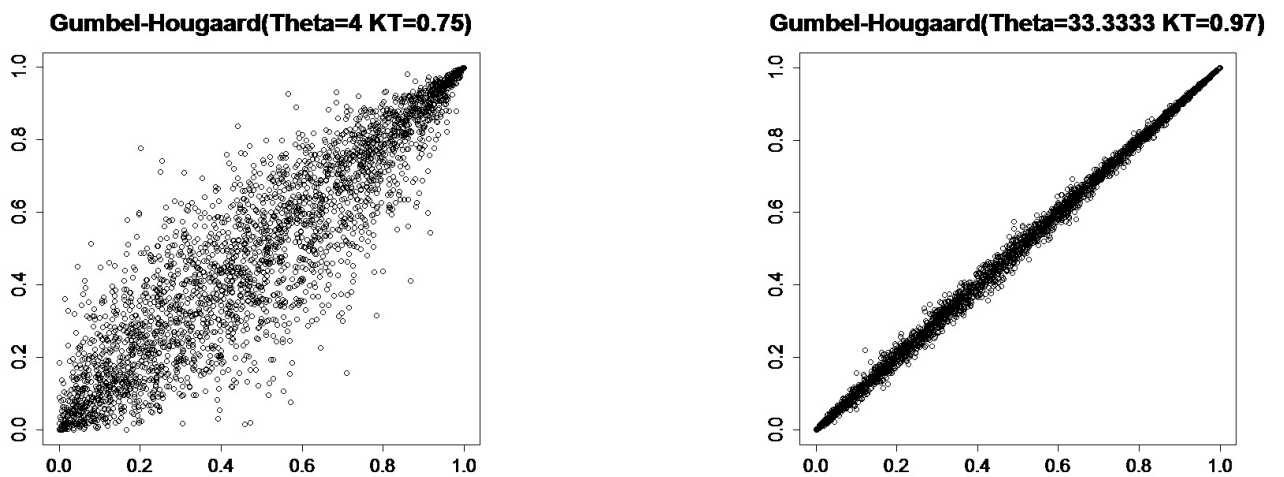


Abbildung 2.8: Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard-Copula mit  $\theta = 4$  bzw.  $\theta = 33.33333$

**Bemerkung 2.3.3.** In Beispiel 2.3.1 war der Erzeuger  $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$  für alle  $\theta > 0$  strikt und die Inverse vollständig monoton. Anhand der zugehörigen Scatterplots 2.5 und 2.6 konnte man erkennen, dass für diesen Fall die Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen nicht negativ ist. Im Beispiel 2.3.2 galt dieser Sachverhalt für alle  $\theta \in [1, \infty)$ . Diese Beobachtung halten wir nun in einem Korollar fest.

**Korollar 2.3.4.** (siehe Nelsen [7]) Sei  $\varphi \in \Omega_\infty$  ein strikter Erzeuger einer Archimedischen Copula  $C$  und  $\varphi^{-1}$  die zugehörige Inverse. Unter der Voraussetzung der vollständigen Monotonie von  $\varphi^{-1}$  gilt  $C \succ \Pi$ .

## 3 Hierarchische Archimedische Copulas

Im vorherigen Kapitel haben wir mit der symmetrischen Konstruktion, eine Methode kennengelernt um bivariate Archimedische Copulas zu multivariaten zu erweitern. Diese Konstruktion erweist sich durch die Eigenschaft der Symmetrie für die Modellierung von asymmetrischen Beziehungen als nicht brauchbar. Da aber zum Beispiel die Beziehungen von Unternehmen aus verschiedenen Sektoren im Allgemeinen asymmetrisch sind, wäre eine Konstruktion wünschenswert, die diese Beziehungen widerspiegeln kann. Die Lösung für dieses Problem sind sogenannte hierarchische (verschachtelte) Archimedische Copulas. Sie werden, wie wir sehen werden, auch aus bivariaten Archimedischen Copulas konstruiert.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir uns ganz allgemein mit der Konstruktion von hierarchischen Archimedischen Copulas aus bivariaten Archimedischen Copulas beschäftigen. Der zweite Abschnitt über LT-Erzeuger wird Grundlage für den dritten Abschnitt sein, in welchem wir den wichtigen Satz beweisen, der eine Aussage darüber trifft, unter welchen Bedingungen, die Verschachtelung von bivariaten Archimedischen Copulas wieder eine Copula darstellt. Das Kapitel werden wir mit zwei Beispielen und Eigenschaften hierarchischer Archimedischer Copulas abschließen.

### 3.1 Von den Archimedischen zu verschachtelten Archimedischen Copulas

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Übergang von den bivariaten Archimedischen Copulas zu den verschachtelten Archimedischen Copulas befassen.

Die bivariate Archimedische Copula hatte nach Kapitel 2 die Form

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Wir wollen diese Copula zu einer 3-dimensionalen verschachtelten Archimedischen Copula erweitern. Sei dazu zwei bivariate Copulas  $C_1$  und  $C_2$  mit den Erzeugern  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega$  gegeben. Wir schachteln nun die zweite Copula in die erste und erhalten

$$C_1(u_1, C_2(u_2, u_3)) = \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u_2) + \varphi_2(u_3))). \quad (3.1)$$

Angenommen wir hätten jetzt zwei Branchen mit jeweils zwei Unternehmen, zwischen denen wir die Abhängigkeit messen wollen. Seien die Erzeuger  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Omega$  mit den jeweiligen Copulas  $C_1, C_2$  und  $C_3$  gegeben. Eine 4-dimensionale hierarchische Copula hat folgende Gestalt:

$$C_1(C_2(u_1, u_2), C_3(u_3, u_4)) = \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u_1) + \varphi_2(u_2)) + \varphi_1 \circ \varphi_3^{[-1]}(\varphi_3(u_3) + \varphi_3(u_4))) \quad (3.2)$$

Allgemein kann man eine  $d$  dimensionale hierarchische Archimedische Copula iterativ für  $d \geq 2$  folgendermaßen konstruieren:

$$C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d) = \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d))) \quad (3.3)$$

Es stellt sich nun unmittelbar die Frage, unter welchen Bedingungen es sich bei diesen Funktionen wieder um Copulas handelt. Das die Verschachtelung von Archimedischen Copulas im Allgemeinen keine Copula liefert, können wir am folgenden Gegenbeispiel sehen.

**Beispiel 3.1.1.** Seien  $C_1 = C_2 = W^2$ . Wir schachteln nun diese beiden Copulas ineinander und erhalten

$$C_3(u, v, w) = C_1(u, C_2(v, w)) = W^3(u, v, w).$$

Da die untere Frechet-Hoeffding-Schranke  $W^n$  für  $n \geq 3$  keine Copula mehr ist, scheitert hier der Versuch aus zwei Archimedischen Copulas, durch verschachteln eine neue Archimedische Copula zu erzeugen.

Bevor wir uns im dritten Abschnitt dieses Kapitels mit der allgemeinen Konstruktion  $d$ -dimensionaler hierarchischer Archimedischer Copulas beschäftigen, müssen wir im folgenden Abschnitt das Konzept der LT-Erzeuger einführen.

### 3.2 Konstruktion mittels LT-Erzeuger

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit sogenannten LT-Erzeugern beschäftigen.

**Definition 3.2.1.** (lokal integrierbare Funktion) Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine lebesgue-messbare Funktion.  $f$  heißt lokal integrierbar, falls für jede kompakte Menge  $K \subset U$  das Lebesgue Integral

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

endlich ist.

**Definition 3.2.2.** Sei  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$  und  $F \in \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist lokal integrierbar}\}$ . Die durch das Lebesgue Integral definierte Funktion

$$L[F](c) := \int_{[0,r]} e^{-cx} F(x) dx \tag{3.4}$$

bezeichnet man für jedes  $c \in \mathbb{C}$ , für das der Grenzwert existiert, als Laplace-Stieltjes-Transformierte von  $F$ .

**Satz 3.2.3.** (siehe Bernstein [2]) Jede Funktion  $f$ , die auf dem Intervall  $[0, \infty)$  vollständig monoton ist und die beiden Eigenschaften  $f(0) = 1$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  erfüllt, kann durch

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dG(x), t \geq 0 \tag{3.5}$$

dargestellt werden.  $G$  ist dabei eine diskrete oder stetige Verteilungsfunktion mit  $G(0) = 0$ .

Ein Erzeuger dessen Inverse eine Laplace-Stieltjes-Transformierte ist, werden wir im Folgenden als LT-Erzeuger bezeichnen.



**Bemerkung 3.2.4.** Zur Konstruktion von hierarchischen Archimedischen Copulas werden die LT-Erzeuger als Erzeuger verwendet. Da aber die Klasse der Laplace-Stieltjes-Transformierten mit der Klasse der vollständig monotonen Funktionen auf dem halboffenen Intervall  $[0, \infty)$  übereinstimmt, können wir folgern, dass die Inversen der LT-Erzeuger auch Inversen und keine Pseudoinversen sind. Wir passen unsere Formel der d-dimensionalen hierarchischen Archimedischen Copula aus Abschnitt 1 dementsprechend an.

**Definition 3.2.5.** (d-dimensionale hierarchische Archimedische Copula) Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \Omega_\infty$  LT-Erzeuger, dann wird eine d-dimensionale hierarchische Copula folgendermaßen konstruiert:

$$C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d))) \quad (3.6)$$

### 3.3 Multivariate Konstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der multivariaten Konstruktion hierarchischer Archimedischer Copulas mittels LT-Erzeuger, beschäftigen. Die erfolgreiche Konstruktion wird wie bei den gewöhnlicher Archimedischen Copulas an Bedingungen geknüpft sein. Bevor wir den Satz über die Konstruktion notieren können, brauchen wir die folgenden Lemmas und Definitionen.

**Lemma 3.3.1.** (siehe Feller[4])

1. Sind  $f$  und  $g$  vollständig monotone Funktionen, dann ist auch das Produkt  $f \cdot g$  vollständig monoton.
2. Ist  $f$  eine vollständig monotone Funktion und  $g$  eine positive Funktion mit vollständig monotoner Ableitung, dann ist die Komposition  $f \circ g$  vollständig monoton.

**Bemerkung 3.3.2.** Aus Teil 2 des Lemmas kann man folgern, dass für eine positive Funktion  $f$  mit vollständig monotoner Ableitung die Funktion  $\exp(-f)$  vollständig monoton ist.

**Lemma 3.3.3.** (siehe McNeil [9]) Seien  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Omega_\infty$  LT-Erzeuger. Sind die ersten Ableitungen der Kompositionen  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  und  $\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}$  vollständig monoton, so gilt das auch für die Ableitungen der Komposition  $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ .

*Beweis.* Wir setzen  $f := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ,  $g := \varphi_2 \circ \varphi_3^{-1}$  und  $h := \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ . Es gilt  $h := f \circ g$  und mit der Kettenregel erhalten wir für die Ableitung von  $h$ ,  $h' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$  für  $t > 0$ .  $f' \circ g$  ist als Komposition einer vollständig monotonen Funktion und einer positiven Funktion mit vollständig monotonen Ableitungen nach Teil 2 von Lemma 3.3.1 vollständig monoton. Aus dieser Tatsache und Teil 1 von Lemma 3.3.1 lässt sich folgern, dass die Ableitung  $h'$ , als Produkt von zwei vollständig monotonen Funktionen, vollständig monoton ist.  $\square$

**Korollar 3.3.4.** (siehe McNeil [9]) Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \Omega_\infty$  LT-Erzeuger. Ist die Ableitung von  $\varphi_k \circ \varphi_{k+1}^{-1}$  vollständig monoton für  $k = 1, \dots, d-1$ , so ist die auch die Ableitung von  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$ , für jedes  $j > k$ , vollständig monoton.

**Definition 3.3.5.** Wir definieren für  $k = 1, \dots, d-1, j > k$  und  $v > 0$  den Copula Erzeuger

$$\varphi_j^k(\cdot; v) := \varphi_j \circ \varphi_k^{-1}\left(-\frac{\ln(\cdot)}{v}\right).$$

Die zugehörige Inverse

$$\varphi_j^{(k)-1}(\cdot; v) = \exp(-v\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(\cdot))$$

ist nach Bemerkung 3.3.2 und Lemma 3.3.4 vollständig monoton und dadurch ist der Erzeuger ein LT-Erzeuger.

**Lemma 3.3.6.** (siehe McNeil [9]) Seien  $\varphi_j^k(\cdot; v)$  und  $\varphi_j^{k-1}$  wie in Definition 3.3.5. Für  $1 \leq k \leq d-2, k+1 < j \leq d$  und  $v, \tilde{v} > 0$  gilt

$$\varphi_j^{k+1-1}(\cdot; v) = \exp(-v\varphi_{k+1}^k(\varphi_j^{(k)-1}(\cdot; \tilde{v}); \tilde{v})) \quad (3.7)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \exp(-v\varphi_{k+1}^k(\varphi_j^{(k)-1}(\cdot; \tilde{v}); \tilde{v})) &= \exp\left(-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1}\left(\frac{-\ln(\exp(-\tilde{v}\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}(\cdot)))}{\tilde{v}}\right)\right) \\
 &= \exp\left((-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1}(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}))\right) \\
 &= \exp(-v\varphi_{k+1} \circ \varphi_j^{-1}) \\
 &= \varphi_j^{(k+1)-1}
 \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.3.7.** (siehe McNeil [9]) Seien für  $d \geq 1$ ,  $\varphi_1 \cdots, \varphi_d \in \Omega_\infty$  LT-Erzeuger. Sei  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine streng monoton steigende und stetige Funktion, so dass die Komposition  $\widetilde{\varphi}_k^{-1} = F \circ \varphi_k^{-1}$  für  $k = 1, \dots, d$  die Inverse eines LT-Erzeugers ist. Unter diesen Voraussetzungen erfüllt die Funktion 3.6 die Gleichung

$$F(C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d)) = C_d(F(u_1), \dots, F(u_{d+1}); \widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_d) \quad (3.8)$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung per Induktion über die Dimension d.

Sei d=1:

$$\begin{aligned}
 F(C_1(u_1, u_2; \varphi_1)) &= F(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2))) \\
 &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ F^{-1}(F(u_1)) + \varphi_1 \circ F^{-1}(F(u_2))) \\
 &= \widetilde{\varphi}_1^{-1}(\widetilde{\varphi}_1(F(u_1)) + \widetilde{\varphi}_1(F(u_2))) \\
 &= C_1(F(u_1), F(u_2); \widetilde{\varphi}_1)
 \end{aligned}$$

$d \rightarrow d + 1$ :

$$\begin{aligned}
 &F(C_{d+1}(u_1, \dots, u_{d+2}; \varphi_1, \dots, \varphi_{d+1})) \\
 &= F(\varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(C_d(u_2, \dots, u_{d+2}; \varphi_2, \dots, \varphi_{d+1})))) \\
 &= F \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ F^{-1}(F(u_1)) + \varphi_1 \circ F^{-1}(F(C_d(u_2, \dots, u_{d+2}; \varphi_2, \dots, \varphi_{d+1})))) \\
 &\stackrel{IV}{=} \widetilde{\varphi}_1^{-1}(\widetilde{\varphi}_1(F(u_1)) + \widetilde{\varphi}_1(C_d(F(u_2), \dots, F(u_{d+2}); \widetilde{\varphi}_2, \dots, \widetilde{\varphi}_{d+1}))) \\
 &= C_{d+1}(F(u_1), \dots, F(u_{d+2}); \widetilde{\varphi}_1, \dots, \widetilde{\varphi}_{d+1})
 \end{aligned}$$

□

**Satz 3.3.8.** (siehe McNeil [9]) Seien  $\varphi_1 \cdots, \varphi_d \in \Omega_\infty$  LT-Erzeuger und die Komposition  $\varphi_k \circ \varphi_{k+1}^{-1}$  habe für  $k = 1, \dots, d-1$  vollständig monotone erste Ableitungen. Dann ist die Funktion  $C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d)$  definiert in 3.6 eine Copula und lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} & C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d) \\ &= \int_0^\infty F_1^{v_1}(u_1) C_{d-1}(F_1^{v_1}(u_2), \dots, F_1^{v_1}(u_{d+1}); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v_1), \dots, \varphi_d^{(1)}(\cdot; v_1)) dG_1(v_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F_1^{v_1} \cdots F_d^{v_d}(u_d) F_d^{v_d}(u_{d+1}) dG_d(v_d; v_{d-1}) \cdots dG_2(v_2; v_1) dG_1(v_1) \quad (3.10)$$

$G_1$  ist dabei eine Verteilungsfunktion mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ ,  $F_k(u) = \exp(-\varphi_k(u))$  für  $k = 1, \dots, d$  und  $G_k(v_k; v_{k-1})$  sind Verteilungsfunktionen mit den Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_k^{(k-1)^{-1}}(\cdot; v_{k-1})$  für  $k = 2, \dots, d$ .

*Beweis.* 1. Wir zeigen nun zuerst die Richtigkeit der Darstellung 3.9. Aus der Darstellung von  $C_d$  in 3.6 und der Tatsache, dass  $\varphi_1^{-1}$  die Laplace-Stieltjes-Transformierte von  $G_1$  ist, lässt sich  $C_d$  schreiben als

$$C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d) = \int_0^\infty e^{-v_1 \varphi_1(u_1)} e^{-v_1 \varphi_1(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d))} dG_1(v_1). \quad (3.11)$$

Der erste Term in dem Produkt ist  $F_1^{v_1}(u_1) = e^{-v_1 \varphi_1(u_1)}$ . Diese Funktion ist offensichtlich als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig. Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist und  $-v_1 \varphi_1(u_1)$  für alle  $v > 0$  und  $u_1 \in [0, 1]$  auch streng monoton steigend ist, folgt, dass  $F_1^{v_1}(u_1)$  eine stetige und streng monoton steigende Verteilungsfunktion auf dem Intervall  $[0, 1]$  ist. Mit Lemma 3.3.7 und Definition 3.3.5 folgt, dass der zweite Term in 3.11 gleich  $C_{d-1}(F_1^{v_1}(u_2), \dots, F_1^{v_1}(u_{d+1}); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v_1), \dots, \varphi_d^{(1)}(\cdot; v_1))$  ist.

Damit hätten wir die erste Darstellung gezeigt.

2. Nun wollen wir zeigen, dass die Funktion  $C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d)$  eine Copula ist. Dazu müssen wir die 3 Eigenschaften (siehe Definition 1.1.10) einer

Copula, für diese Funktion nachweisen.

Als Verschachtelung Archimedischer Copulas, erfüllt diese Funktion die ersten beiden Eigenschaften einer Copula offensichtlich. Es bleibt also zu zeigen, dass  $C_d$  d-wachsend ist. Sei dazu das Hyperrechteck  $[x, y]^d \subset [0, 1]^d$  gegeben. Wir müssen zeigen, dass  $V_{C_d}([x, y]^d) \geq 0$  gilt. Nun ist der erste Term in der Darstellung 3.9, nach Teil 1 des Beweises eine stetige und streng monoton steigende Verteilungsfunktion auf dem Intervall  $[0, 1]$ , sodass die Differenz  $F_1^{v_1}(y_1) - F_1^{v_1}(x_1)$  nicht negativ ist. Wir müssen also noch zeigen, dass  $C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2^1(\cdot, v_1), \dots, \varphi_d^1(\cdot, v_1))$  eine Copula ist. Wir schreiben wie im ersten Teil des Beweises diese Funktion um und erhalten für  $k = 2, \dots, d - 1$

$$C_{d-k+1}(u_k, \dots, u_{d+1}; \varphi_k^{k-1}(\cdot, v_{k-1}), \dots, \varphi_d^{k-1}(\cdot, v_{k-1})) = \int_0^\infty F_k^{v_k}(u_k; v_{k-1}) \\ C_{d-k}(F_k^{v_k}(u_{k+1}; v_{k-1}), \dots, F_k^{v_k}(u_{d+1}; v_{k-1}); \varphi_{k+1}^k(\cdot, v_k), \dots, \varphi_d^k(\cdot, v_k) dG_k(v_k : v_{k-1}))$$

, wobei  $F_k^{v_k}(u_k; v_{k-1}) = \exp(-v_k \varphi_k^{(k-1)}(u_k; v_{k-1}))$  ist und die Form der Generatoren der inneren Copulas, aus Lemma 3.3.6 folgt.

$F_k^{v_k}(u_k; v_{k-1}) = \exp(-v_k \varphi_k^{(k-1)}(u_k; v_{k-1}))$  ist wiederum eine stetige und streng monoton steigende Verteilungsfunktion auf dem Intervall  $[0, 1]$ , sodass wir mit der gleichen Argumentation folgern können, dass  $V_{C_d}([x, y]^d) \geq 0$  gilt, wenn  $C_{d-k}(u_{k+1}, \dots, u_{d+1}; \varphi_{k+1}^k(\cdot, v_k), \dots, \varphi_d^k(\cdot, v_k))$  eine Copula ist. Wir setzen nun dieses Argument induktiv fort, bis wir die innerste Funktion

$C_1(u_d, u_{d+1}; \varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1}))$  erreichen. Wenn wir zeigen können, dass diese Funktion eine Copula ist, dann ist  $V_{C_d}([x, y]^d) \geq 0$  und somit sind dann alle Eigenschaften einer Copula erfüllt.

Die Inverse des Erzeugers  $\varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})$  lässt sich nach Definition 3.3.5 schreiben als  $\varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})^{-1} = \exp(-v_{d-1} \varphi_{d-1} \circ \varphi_d^{-1})$ . Nach Voraussetzung des Satzes sind die ersten Ableitungen von  $\varphi_k \circ \varphi_{k+1}^{-1}$  für  $k = 1, \dots, d - 1$  vollständig monoton. Mit Lemma 3.3.1 und Bemerkung 3.3.2 können wir nun folgern, dass  $\varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})^{-1}$  vollständig monoton ist. Aus Kapitel 3 Satz 3.3.7 wissen wir nun, dass  $\varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})$  ein Erzeuger ist und somit ist  $C_1(u_d, u_{d+1}; \varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1}))$  eine Copula. Da  $\varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})^{-1} = \exp(-v_{d-1} \varphi_{d-1} \circ \varphi_d^{-1})$  die Laplace-Stieltjes-Transformierte von  $G_d(v_d; v_{d-1})$  ist, können wir

$C_1(u_d, u_{d+1}; \varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1}))$  darstellen als,

$$C_1(u_d, u_{d+1}; \varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})) = \int_0^\infty F_d^{v_d}(u_d; v_{d-1}) F_d^{v_d}(u_{d+1}; v_{d-1}) dG_d(v_d; v_{d-1}).$$

Damit haben wir alle 3 Eigenschaften eine Copula für die Funktion

$C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d)$  nachgewiesen.

3. Um die Darstellung 3.10 zu beweisen, müssen wir zuerst zeigen, dass die Gleichung

$$F_k^{v_k}(u) = F_k^{v_k}(F_{k-1}^{v_{k-1}}(\dots F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(u); v_1) \dots; v_{k-2}); v_{k-1}) \quad (3.12)$$

für alle  $k \geq 2$  gilt. Wir zeigen dieses Sachverhalt per Induktion über  $k$ . Sei  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} F_2^{v_2}(u) &= \exp(-v_2 \varphi_2(u)) = \exp(-v_2 \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u))) \\ &= \exp(-v_2 \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\left(\frac{-\ln(\exp(-v_1 \varphi_1(u)))}{v_1}\right)) \\ &\stackrel{\text{Def. 3.3.5}}{=} \exp(-v_2 \varphi_2^1(\exp(-v_1 \varphi_1(u)))) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(u); v_1) \end{aligned}$$

$k \rightarrow k + 1$

$$\begin{aligned} F_{k+1}^{v_{k+1}}(u) &= \exp(-v_{k+1} \varphi_{k+1}(u)) = \exp(-v_{k+1} \varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1}(\varphi_k(u))) \\ &= \exp(-v_{k+1} \varphi_{k+1} \circ \varphi_k^{-1}\left(\frac{-\ln(\exp(-v_k \varphi_k(u)))}{v_k}\right)) \\ &\stackrel{\text{Def. 3.3.5}}{=} \exp(-v_{k+1} \varphi_{k+1}^k(\exp(-v_k \varphi_k(u)))) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} F_{k+1}^{v_{k+1}}(F_k^{v_k}(u); v_k) \\ &\stackrel{IV}{=} F_{k+1}^{v_{k+1}}(F_k^{v_k}(\dots F_2^{v_2}(F_1^{v_1}(u); v_1) \dots; v_{k-1}); v_k) \end{aligned}$$

Nach Darstellung 3.9 gilt für  $C_d$ :

$$\begin{aligned} &C_d(u_1, \dots, u_{d+1}; \varphi_1, \dots, \varphi_d) \\ &= \int_0^\infty F_1^{v_1}(u_1) C_{d-1}(F_1^{v_1}(u_2), \dots, F_1^{v_1}(u_{d+1}); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v_1), \dots, \varphi_d^{(1)}(\cdot; v_1)) dG_1(v_1) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Darstellung von der Copula  $C_2(u_{d-1}, u_d, u_{d+1})$ :

$$\begin{aligned}
 C_2(u_{d-1}, u_d, u_{d+1}) &= \int_0^\infty F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_{d-1}; v_{d-2}) \\
 &\quad C_1(F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_d; v_{d-2}), F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_{d+1}; v_{d-2}); \varphi_d^{(d-1)}(\cdot; v_{d-1})) dG_{d-1}(v_{d-1}; v_{d-2}) \\
 &\stackrel{Def.}{=} \int_0^\infty F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_{d-1}; v_{d-2}) \int_0^\infty F_d^{v_d}(F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_d); v_{d-1}) \\
 &\quad F_d^{v_d}(F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_{d+1}); v_{d-1}) dG_d(v_d; v_{d-1}) dG_{d-1}(v_{d-1}; v_{d-2}) \\
 &\stackrel{3.12}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty F_{d-1}^{v_{d-1}}(u_{d-1}; v_{d-2}) F_d^{v_d}(u_d) F_d^{v_d}(u_{d+1}) dG_d(v_d; v_{d-1}) dG_{d-1}(v_{d-1}; v_{d-2})
 \end{aligned}$$

Durch iteratives anwenden auf

$$\begin{aligned}
 C_{d-k+1}(u_k, \dots, u_{d+1}; \varphi_k^{k-1}(\cdot, v_{k-1}), \dots, \varphi_d^{k-1}(\cdot, v_{k-1})) &= \int_0^\infty F_k^{v_k}(u_k; v_{k-1}) \\
 C_{d-k}(F_k^{v_k}(u_{k+1}; v_{k-1}), \dots, F_k^{v_k}(u_{d+1}; v_{k-1}); \varphi_{k+1}^k(\cdot, v_k), \dots, \varphi_d^k(\cdot, v_k)) &dG_k(v_k; v_{k-1}) \\
 , \text{ f\"ur } k = 2, \dots, d-2, \text{ erh\"alt man die Darstellung 3.10.} &
 \end{aligned}$$

□

### 3.4 Eigenschaften und Beispiele hierarchischer Archimedischer Copulas

In diesem Abschnitt wollen wir zwei hierarchische Archimedische Copulas vorstellen und zwei Eigenschaften notieren, die f\"ur diese beiden hierarchischen Archimedischen Copulas gelten, und unter anderem den Begriff hierarchisch erkl\"aren.

#### ***Eigenschaften einiger hierarchischer Archimedischer Copulas***

Seien  $\varphi_1(\cdot; \theta_1), \varphi_2(\cdot; \theta_2) \in \Omega_\infty$  zwei paramerteabh\"angige LT-Erzeuger aus der selben Copula-Familie, dann gilt f\"ur **viele** dieser Erzeuger:

1. (siehe Joe [5]) Die erste Ableitung der Funktion  $\varphi_1(\varphi_2^{-1}(\cdot; \theta_2); \theta_1)$  ist genau dann vollst\"andig monoton, wenn die Relation  $\theta_2 \geq \theta_1$  gilt.
2. (siehe McNeil [9]) Die Abh\"angigkeit zwischen den zu der hierarchischen Archimedischen Copula geh\"orenden Zufallsvariablen, nimmt hierarchisch zu.

**Bemerkung 3.4.1.** Wie bereits erwähnt, gelten diese Eigenschaften nicht für alle LT-Erzeuger. Wir beschränken uns deshalb bei den Beispielen hierarchischer Archimedischer Copulas auf die Clayton und Gumbel-Hougaard-Copula, da deren Erzeuger, diese beiden Eigenschaften erfüllen.

Wir hatten in Kapitel 3 bei der Erzeugung der Scatterplots festgestellt, dass wir die Abhängigkeit zwischen den betrachteten Zufallsvariablen, durch Anpassung des Parameters  $\theta$ , steuern konnten. Je höher wir dieses Parameter wählten, desto höher war auch die Abhängigkeit. Auf Grund der ersten Eigenschaft muss man die Parameter hierarchisch anordnen, damit die verschachtelten Archimedischen Copulas wieder Copulas sind. Eigenschaft 2, welche eine unmittelbare Folgerung der ersten Eigenschaft ist, stellt sicher, dass die Abhängigkeit zwischen den betrachteten Zufallsvariablen von außen nach innen zunimmt. Auf Grund dieser Eigenschaft, sind solch konstruierte hierarchische Archimedische Copulas asymmetrisch.

Wir wollen nun diese hierarchische Anordnung an einem allgemeinen Beispiel erläutern.

**Beispiel 3.4.2.** Sei  $(U_1, U_2, U_3)^T$  ein Zufallsvektor. Die beiden Paare  $(U_1, U_2)^T$  und  $(U_1, U_3)^T$  haben die Copula  $C_1$  mit LT-Erzeuger  $\varphi_1(\cdot; \theta_1)$  und das Paar  $(U_2, U_3)^T$  habe die Copula  $C_2$  mit LT-Erzeuger  $\varphi_1(\cdot; \theta_2)$ . Wir wählen  $\theta_2 > \theta_1$ . Würden wir nun die beiden Copulas ineinander schachteln und würde Eigenschaft 1 gelten, könnten wir folgern, dass diese verschachtelte Funktion wieder eine Copula ist. Wegen Eigenschaft 2 würde dann gelten, dass  $\tau_{U_2, U_3} > \tau_{U_1, U_2} = \tau_{U_1, U_3}$  ist. Das innerste Paar  $(U_2, U_3)^T$  hätte also die höchste Abhängigkeit.

**Bemerkung 3.4.3.** Wie an dem vorherigem Beispiel deutlich wird, kann man hierarchische Archimedische Copulas zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Unternehmen aus verschiedenen Branchen benutzen. Die Copula  $C_1$  mit Erzeuger  $\varphi_1$  und Parameter  $\theta_1$  modelliert die Abhängigkeit zwischen dem ersten Unternehmen und den anderen beiden. Die Copula  $C_2$  mit Erzeuger  $\varphi_2$  und Parameter  $\theta_2$  würde hingegen nur die Abhängigkeit zwischen  $U_2$  und  $U_3$  modellieren, wobei dies Daten von Unternehmen sind, die zu derselben Branche gehören.

Wir wollen nun zwei 3-dimensionale hierarchische Archimedische Copulas vorstellen und sie auch mittels Scatterplots veranschaulichen.



**Beispiel 3.4.4. (hierarchische Gumbel-Hougaard-Copula)** Wir wollen hier, die aus Kapitel 3 bereits bekannte Gumbel-Hougaard-Copula, zu einer hierarchischen Gumbel-Hougaard-Copula erweitern. Seien dazu die beiden parameterabhängigen LT-Erzeuger  $\varphi_1(t; \theta_1) = (-\ln(t))^{\theta_1}$  und  $\varphi_2(t; \theta_2) = (-\ln(t))^{\theta_2}$  mit der Inversen  $\varphi_2^{-1}(u; \theta_2) = \exp(-u^{\frac{1}{\theta_2}})$ , sowie  $\theta_2 \geq \theta_1 \geq 1$  gegeben. Weiterhin sei  $G_1 = St(\frac{1}{\theta_1}, 1, (\cos(\frac{\pi}{2\theta}))^\theta, 0)$  (nach McNeil [9]) die Verteilungsfunktion mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ .

Allgemein lässt sich eine dreidimensionale hierarchische Copula nach Abschnitt 3 dieses Kapitels folgendermaßen konstruieren:

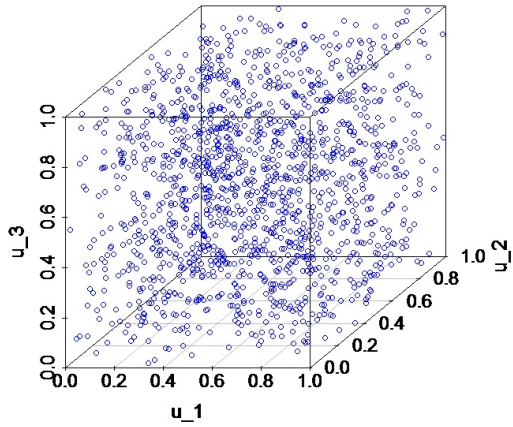
$$C(u_1, u_2, u_3) = \int_0^\infty e^{-v\varphi_1(u_1)} e^{-v\varphi_1\varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_2)+\varphi_2(u_3))} dG_1(v)$$

Wir setzen nun ein:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= \int_0^\infty e^{-v(-\ln(u_1))^{\theta_1}} e^{-v(-\ln \circ \exp(-((-\ln(u_2))^{\theta_2} + (-\ln(u_3))^{\theta_2}))^{\frac{\theta_1}{\theta_2}})} dG_1(v) \\ &= \int_0^\infty e^{-v(-\ln(u_1))^{\theta_1}} e^{-v((-\ln(u_2))^{\theta_2} + (-\ln(u_3))^{\theta_2})^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}} dG_1(v) \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun anhand vier Scatterplots die 3-dimensionale hierarchische Gumbel-Hougaard-Copula für verschiedene  $\theta_1, \theta_2 \in [1, \infty)$  veranschaulichen. Die Parameter  $\theta_1$  und  $\theta_2$  wählen wir immer so, dass die Relation  $\theta_2 \geq \theta_1$  gilt. Besonders interessant ist die Abbildung die man im zweiten Scatterplot betrachten kann. Die Parameter wurden mit  $\theta_1 = 1$  und  $\theta_2 = 100$  entgegengesetzt gewählt. Dadurch ist die Abhängigkeit zwischen den Unternehmen aus den verschiedenen Branchen, mit einem Kendall's Tau von  $\tau = 0.0000001$ , ziemlich gering. Hingegen ist die Abhängigkeit zwischen den Unternehmen aus der gleichen Branche, mit einem Kendall's Tau von  $\tau = 0.99$ , fast maximal. Im dritten und vierten Scatterplot kann man die obere Tail Dependence der Gumbel-Hougaard-Copula beobachten.

**Theta1=1(KT=1\*10<sup>-7</sup>) Theta2=1.000001(KT=1\*10<sup>-6</sup>)**



**Theta1=1(KT=1\*10<sup>-7</sup>) Theta2=100(KT=0.99)**

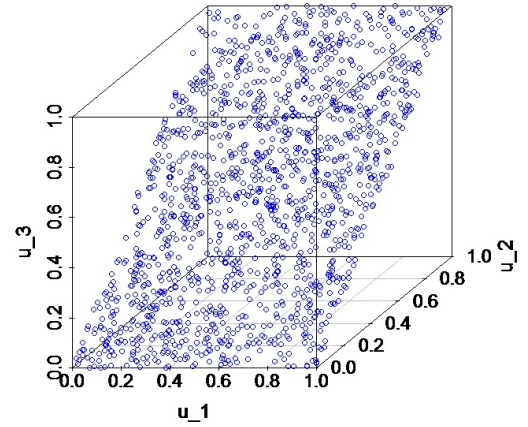
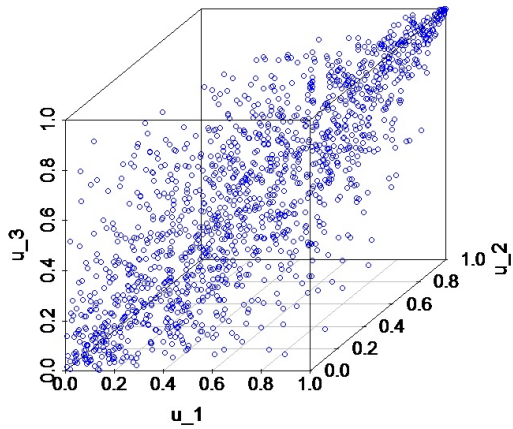


Abbildung 3.1: Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Gumbel-Copula

**Theta1=2(KT=0.5) Theta2=2(KT=0.5)**



**Theta1=10(KT=0.9) Theta2=100(KT=0.99)**

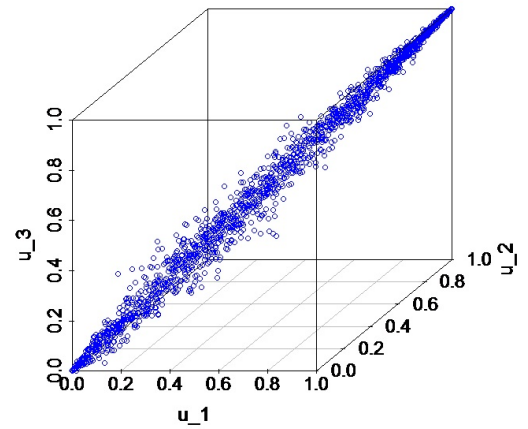


Abbildung 3.2: Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Gumbel-Copula

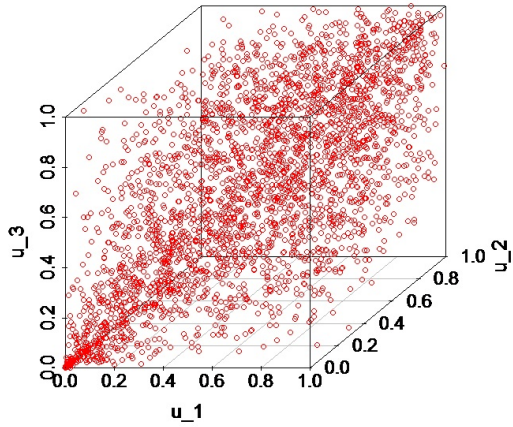
**Beispiel 3.4.5.** Nun wollen wir die uns aus Kapitel 2 bereits bekannte Clayton-Copula zu einer hierarchischen Archimedischen Copula erweitern. Hier taucht das Problem auf, dass sich in McNeil [9] die Erzeugerfunktion von der angegebenen Erzeugerfunktion in Nelsen [7] unterscheidet. Wir werden hier die Erzeugerfunktion aus [9] benutzen, da die Verteilungsfunktion  $G_1$  mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$  auch aus diesem Paper ist.

Seien die parameterabhängigen LT-Erzeuger  $\varphi_1(t; \theta_1) = t^{-\theta_1} - 1$  und  $\varphi_2(t; \theta_2) = t^{-\theta_2} - 1$  mit der Inversen  $\varphi_2^{-1}(u; \theta_2) = (1 + u)^{-\frac{1}{\theta_2}}$ , sowie  $\theta_2 \geq \theta_1 > 0$  gegeben. Weiterhin sei  $G_1 = Ga(\frac{1}{\theta_1}, 1)$  die Verteilungsfunktion mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ . Aus diesen Informationen konstruieren wir nun die 3-dimensionale hierarchische Clayton-Copula:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= \int_0^\infty e^{-v\varphi_1(u_1)} e^{-v\varphi_1\varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_2)+\varphi_2(u_3))} dG_1(v) \\ &= \int_0^\infty e^{-v(u_1^{-\theta_1}-1)} e^{-v((u_1^{-\theta_1}-1)\circ(u_2^{-\theta_2}+u_3^{-\theta_2}-1))^{-\frac{1}{\theta_2}}} dG_1(v) \\ &= \int_0^\infty e^{-v(u_1^{-\theta_1}-1)} e^{-v((u_2^{-\theta_2}+u_3^{-\theta_2}-1)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}-1)} dG_1(v) \end{aligned}$$

Wie bei der 3-dimensionalen hierarchischen Gumbel-Hougaard-Copula, wollen wir uns die 3-dimensionale hierarchische Clayton-Copula anhand von vier Scatterplots veranschaulichen. Die Parameter wurden wiederum so gewählt, dass immer  $\theta_2 \geq \theta_1$  gilt. Auffällig ist bei allen 4 Scatterplots die ziemlich starke untere Tail Dependence. Wie bei der hierarchischen Gumbel-Hougaard-Copula, wurden in zweitem Scatterplot 3.3 die Parameter mit  $\theta_1 = 1$  und  $\theta_2 = 100$  entgegengesetzt gewählt. In diesem Fall war aber, dass zu  $\theta_1$  gehörige Kendall's Tau, mit  $\tau = 1 * 10^{-33}$ , viel geringer.

**Theta1=1(KT=1\*10<sup>-19</sup>) Theta2=1.00001(KT=0.1\*10<sup>-5</sup>)**



**Theta1=1(KT=1\*10<sup>-33</sup>) Theta2=100(KT=0.99)**

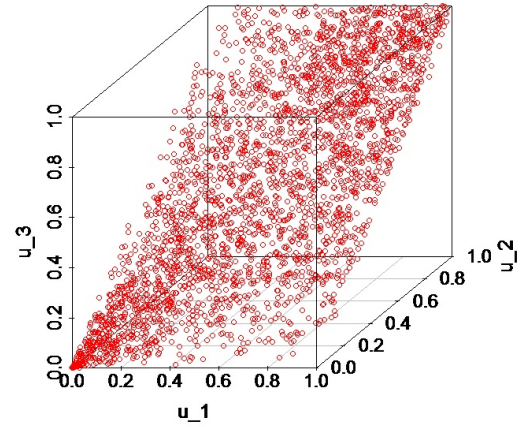
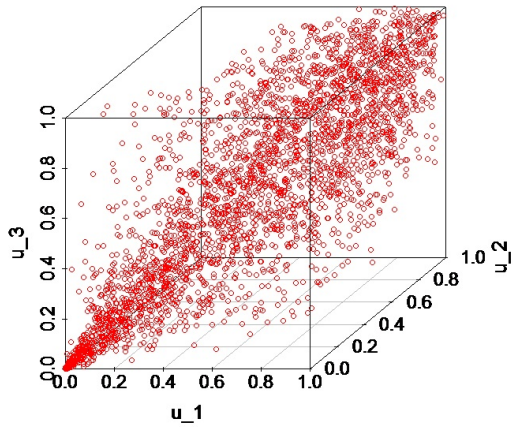


Abbildung 3.3: Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Clayton-Copula

**Theta1=2(KT=0.5) Theta2=2(KT=0.5)**



**Theta1=10(KT=0.9) Theta2=100(KT=0.99)**

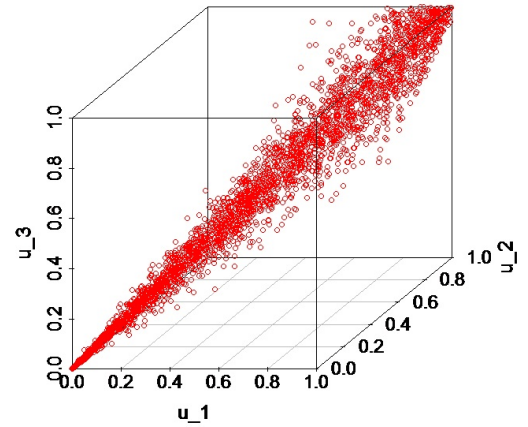


Abbildung 3.4: Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Clayton-Copula

## 4 Simulation

In den Kapiteln 2 und 3 hatten wir die vorgestellten parameterabhängigen Copula Familien mittels Scatterplots veranschaulicht. In diesem Kapitel wollen wir nun 4 Algorithmen vorstellen und beweisen, mittels derer diese Scatterplots erzeugt werden.

Im ersten Abschnitt werden wir einen Algorithmus vorstellen, der zu Erzeugung von Zufallsvektoren dient, die gemäß einer Archimedischen Copula verteilt sind. Dieser Algorithmus wird auch für die drei anderen Algorithmen, die wir im Abschnitt zwei vorstellen, wichtig sein, da diese auf ihn zurückgreifen. Diese erzeugen Zufallsvektoren, die gemäß einer hierarchischen Archimedischen Copula verteilt sind.

### 4.1 Erzeugung von Archimedischen Copulas

In diesem Abschnitt werden wir einen Algorithmus zur Erzeugung Archimedischer Copulas vorstellen und beweisen, dass dieser auch wirklich das gewünschte Ergebnis liefert.

**Algorithmus 1** (siehe Marshall et. al [8] )

1. Erzeuge eine Zufallsvariable  $V$ , die gemäß der Verteilungsfunktion  $G$  mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi^{-1}$ , verteilt ist.
2. Erzeuge auf  $[0, 1]$  gleichverteilte und voneinander unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_d$ .
3. Setze  $(U_1, \dots, U_d)^T = (\varphi^{-1}(\frac{-\ln(X_1)}{V}), \dots, \varphi^{-1}(\frac{-\ln(X_d)}{V}))$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) &= \mathbb{P}(\varphi^{-1}\left(\frac{-\ln(X_1)}{V}\right) \leq u_1, \dots, \varphi^{-1}\left(\frac{-\ln(X_d)}{V}\right) \leq u_d) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi(u_1)V}, \dots, X_d \leq e^{-\varphi(u_d)V}) \\
 &\stackrel{\text{G VF von } V}{=} \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi(u_1)V}, \dots, X_d \leq e^{-\varphi(u_d)V} | V = v) dG(v) \\
 &\stackrel{X_i \text{ unabh.}}{=} \int_0^\infty \prod_{i=1}^d F^v(u_i) dG(v) \\
 &= \int_0^\infty e^{-v(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))} dG(v) \\
 &\stackrel{\varphi^{-1} \text{ LST von } G}{=} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))
 \end{aligned}$$

□

## 4.2 Erzeugung von hierarchischen Archimedischen Copulas

In diesem Abschnitt wollen wir drei Algorithmen zur Erzeugung von Zufallsvektoren, die gemäß einer hierarchischen Archimedischen Copula verteilt sind, angeben.

**Algorithmus 2** (siehe McNeil [9])

Dieser Algorithmus dient zur Erzeugung eines 3-dimensionalen Vektors, der gemäß einer hierarchischen Archimedischen Copula verteilt ist. Die Besonderheit dieses Algorithmus ist, dass er in Schritt 3 auf den ersten Algorithmus zugreift.

1. Erzeuge eine Zufallsvariable  $V$ , die gemäß der Verteilungsfunktion  $G_1$  mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ , verteilt ist.
2. Erzeuge eine auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $X_1$ .
3. Erzeuge den mit der Archimedischen Copula verteilten Zufallsvektor  $(X_1, X_2)^T$  mit Erzeuger  $\varphi_2^{(1)}(\cdot; V) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\left(-\frac{\ln(\cdot)}{V}\right)$ , mit Algorithmus 1.
4. Setze  $(U_1, U_2, U_3) = (\varphi_1^{-1}\left(\frac{-\ln(X_1)}{V}\right), \varphi_1^{-1}\left(\frac{-\ln(X_2)}{V}\right), \varphi_1^{-1}\left(\frac{-\ln(X_3)}{V}\right))$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, U_3 \leq u_3) &= \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V}, X_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)V}, X_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)V}) \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V}, X_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)V}, X_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)V} | V = v) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V} | V = v) \\
 &\quad \mathbb{P}(X_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)V}, X_3 \leq e^{-\varphi_1(u_3)V} | V = v) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty F_1^v(u_1) C(F_1^v(u_2), F_1^v(u_3); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v)) dG_1(v) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.3.7}}{=} \int_0^\infty F_1^v(u_1) F_1^v(C(u_2, u_3; \varphi_2)) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty e^{-v\varphi_1(u_1)} e^{-v\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_2) + \varphi_2(u_3))} dG_1(v) \\
 &= \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_2) + \varphi_2(u_3)))
 \end{aligned}$$

□

**Algorithmus 3** (siehe McNeil [9])

**Algorithmus 3** dient zur Erzeugung eines 4-dimensionalen Vektors, der gemäß einer hierarchischen Archimedischen Copula verteilt ist. Er greift im Schritt 2 und Schritt 3 auf den ersten Algorithmus zurück.

1. Erzeuge eine Zufallsvariable  $V$ , die gemäß der Verteilungsfunktion  $G_1$  mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ , verteilt ist.
2. Erzeuge den mit der Archimedischen Copula verteilten Zufallsvektor  $(X_1, X_2)^T$  mit Erzeuger  $\varphi_2^{(1)}(\cdot; V) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(\cdot)}{V})$ , mit Algorithmus 1.
3. Erzeuge den mit der Archimedischen Copula verteilten Zufallsvektor  $(X_3, X_4)^T$  mit Erzeuger  $\varphi_3^{(1)}(\cdot; V) = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(\cdot)}{V})$ , mit Algorithmus 1.
4. Setze  $(U_1, U_2, U_3, U_4) = (\varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(X_1)}{V}), \varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(X_2)}{V}), \varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(X_3)}{V}), \varphi_1^{-1}(-\frac{\ln(X_4)}{V}))$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, U_3 \leq u_3, U_4 \leq u_4) &= \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V}, \dots, X_4 \leq e^{-\varphi_1(u_4)V}) \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V}, \dots, X_4 \leq e^{-\varphi_1(u_4)V} | V = v) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty C(F_1^v(u_1), F_1^v(u_2); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v)) C(F_1^v(u_3), F_1^v(u_4); \varphi_3^{(1)}(\cdot; v)) dG_1(v) dG_1(v) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.3.7}}{=} \int_0^\infty F_1^v(C(u_1, u_2; \varphi_2)) F_1^v(C(u_3, u_4; \varphi_3)) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty e^{-v\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_1) + \varphi_2(u_2))} e^{-v\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(\varphi_3(u_3) + \varphi_3(u_4))} dG_1(v) \\
 &= \varphi_1^{-1}(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_1) + \varphi_2(u_2)) + \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(\varphi_3(u_3) + \varphi_3(u_4)))
 \end{aligned}$$

□

**Algorithmus 4** (siehe McNeil [9])

Nun wollen wir mit **Algorithmus 4** einen rekursiven Algorithmus zur Erzeugung eines  $d+1$ -dimensionalen Zufallsvektors, der gemäß einer hierarchischen Archimedischen Copula verteilt ist, vorstellen. Dieser Algorithmus basiert unter anderem auf der Darstellung 3.9 einer  $d$ -dimensionalen hierarchischen Archimedischen Copula.

1. Erzeuge eine Zufallsvariable  $V$ , die gemäß der Verteilungsfunktion  $G_1$  mit der Laplace-Stieltjes-Transformierten  $\varphi_1^{-1}$ , verteilt ist.
2. Erzeuge eine auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $X_1$ .
3. Erzeuge den Zufallsvektor  $(X_2, \dots, X_{d+1})^T$  gemäß der hierarchischen Archimedischen Copula  $C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2^{(1)}(\cdot; V), \dots, \varphi_d^{(1)}(\cdot; V))$ .
4. Setze  $(U_1, \dots, U_{d+1}) := (\varphi_1^{-1}(\frac{-\ln(X_1)}{V}), \dots, \varphi_1^{-1}(\frac{-\ln(X_{d+1})}{V}))$



*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_{d+1} \leq u_{d+1}) &= \mathbb{P}(\varphi^{-1}\left(\frac{-\ln(X_1)}{V}\right) \leq u_1, \dots, \varphi^{-1}\left(\frac{-\ln(X_{d+1})}{V}\right) \leq u_{d+1}) \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V}, \dots, X_{d+1} \leq e^{-\varphi_1(u_{d+1})V} | V = v) dG(v) \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-\varphi_1(u_1)V} | V = v) \\
 &\quad P(X_2 \leq e^{-\varphi_1(u_2)V}, \dots, X_{d+1} \leq e^{-\varphi_1(u_{d+1})V} | V = v) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty F_1^v(u_1) C_{d-1}(F_1^v(u_2), \dots, F_1^v(u_{d+1}); \varphi_2^{(1)}(\cdot; v), \dots, \varphi_d^{(1)}(\cdot; v)) dG_1(v) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.3.7}}{=} \int_0^\infty F_1^v(u_1) F_1^v(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d)) dG_1(v) \\
 &= \int_0^\infty e^{-v\varphi_1(u_1)} e^{-v\varphi_1(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d))} \\
 &= \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(C_{d-1}(u_2, \dots, u_{d+1}; \varphi_2, \dots, \varphi_d)))
 \end{aligned}$$

□

## Literaturverzeichnis

- [1] Alsina, Frank, Schweizer (2005), *Associative Functions on Intervals: A Primer of Triangular Norms*, World Scientific
- [2] Bernstein. *Sur les fonctions absolument monotones* . Acta Mathematica, 1929.
- [3] Cherubini, Luciano, Vecchiato (2004), *Copula Methods in Finance*, Wiley Finance Series
- [4] Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, volume II*. John Wiley, New York, 1971.
- [5] Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London, 1997.
- [6] Kimberling (1974) *A probabilistic interpretation of complete monotonicity*. Aequationes Math 10:152-164
- [7] Nelsen (2006), *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Statistics
- [8] A.W. Marshall and I. Olkin. *Families of multivariate distributions*. J. Amer. Statist. Assoc., 83:834-841, 1988
- [9] McNeil(2007), *Sampling Nested Archimedean Copulas*, Journal of Statistical Computation and Simulation
- [10] Savu, C. (2007): *Modellierung multivariater Abhängigkeitsstrukturen auf Finanzmärkten mit archimedischen und hierarchischen archimedischen Copulas*. Logos, Berlin.

- [11] Schweizer, Sklar (1983) *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York
- [12] Sklar (1959), *Fonctions de répartition a n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut Statistique de l'Universite de Paris
- [13] Widder (1946) *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Obere Fréchet-Hoeffding Schranke $M^2(u, v)$ . . . . .	11
1.2	Produktcopula $\Pi^2(u, v)$ . . . . .	12
1.3	Untere Fréchet-Hoeffding Schranke $W^2(u, v)$ . . . . .	12
1.4	Ein konkordantes Paar Zufallsvariablen . . . . .	17
1.5	Ein diskordantes Paar Zufallsvariablen . . . . .	17
2.1	Strikter Erzeuger der Produktcopula . . . . .	29
2.2	Inverse des Erzeugers . . . . .	29
2.3	Erzeuger der Kontramotonicopula . . . . .	29
2.4	Pseudo-Inverse des Erzeugers . . . . .	29
2.5	Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Clayton-Copula mit $\theta = -1$ bzw. $\theta \rightarrow 0$ . . . . .	39
2.6	Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Clayton-Copula mit $\theta = 3.333333$ bzw. $\theta = 100$ . . . . .	39
2.7	Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard-Copula mit $\theta = 1$ bzw. $\theta = 2$ . . . . .	42
2.8	Scatterplots von 3000 simulierten Daten der Gumbel-Hougaard-Copula mit $\theta = 4$ bzw. $\theta = 33.33333$ . . . . .	42
3.1	Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Gumbel-Copula . . . . .	56
3.2	Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Gumbel-Copula . . . . .	56
3.3	Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Clayton-Copula . . . . .	58

3.4	Scatterplots von 1000 simulierten Daten der hierarchischen Clayton-Copula . . . . .	58
-----	---	----

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit eigenständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Diese Arbeit hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Marburg, den 10 September 2012

---

(Yuriy Pinkhasik, Verfasser)