



Stabile Verteilungen und verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz

Bachelorarbeit
am Fachbereich 12 Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von
Ann-Kristin Becker

September 2015
Betreuer: Prof. Dr. H. Holzmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Stabile Verteilungen	3
2 Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz	14
2.1 Reguläre Variation	14
2.2 Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz	24
2.3 Charakteristische Funktion und Parametrisierung stabiler Verteilungen	43
3 Simulationen	48
3.1 Student'sche t-Verteilung	48
3.2 Pareto-Verteilung	52
Anhang A	55
Literaturverzeichnis	62
Erklärung	63

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes zu verallgemeinern. Dazu sollen stabile Verteilungen und deren Eigenschaften betrachtet werden. Diese Ausarbeitung stützt sich hauptsächlich auf Kapitel 3.7 „Stable Laws“ aus dem Buch „Probability: Theory and Examples“ von R. Durrett [Du], wobei viele der Aussagen und Beweisschritte ergänzt oder leicht abgeändert wurden.

Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass die Summe unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen nach geeigneter Normierung und Zentrierung schwach gegen eine Standard-Normalverteilung konvergiert, sofern das zweite Moment der Zufallsvariablen endlich ist. Wir betrachten dazu im Folgenden einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie eine Familie von unabhängig identisch verteilten und reellwertigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ auf Ω . Für die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X schreiben wir $X_n \Rightarrow X$. Dann gilt genauer:

Satz (Zentraler Grenzwertsatz nach Lindeberg-Lévy)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment und gelte $\sigma^2 := \text{Var}(X_1) > 0$.

Sei

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

und die Normierungs- und Zentrierungskonstanten seien gegeben durch

$$\begin{aligned} a_n &:= \sigma\sqrt{n} \quad \text{und} \\ b_n &:= n\mathbb{E}[X_1]. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Die Voraussetzungen für den zentralen Grenzwertsatz sind in der Praxis jedoch oft nicht erfüllt, daher betrachten wir die Aussage für Verteilungen mit nicht notwendigerweise endlichem zweiten Moment. Verteilungen mit unendlichem zweiten Moment nennt man *Heavy-tailed-Verteilungen* oder *endlastige Verteilungen*. Solche Verteilungen treten zum Beispiel bei der Modellierung von Großschäden in der Versicherungsmathematik auf. Die Normalverteilung kann hier zur Approximation nicht genutzt werden, da sie das relativ häufige Auftreten extremer Ereignisse, die viel Schaden verursachen, nur unzureichend modelliert.

Wir wollen in dieser Arbeit genauer untersuchen unter welchen Bedingungen normierte und zentrierte Summen von heavy-tailed-verteilten Zufallsvariablen schwach konvergieren. Dazu werden wir stabile Verteilungen betrachten, die, wie wir später zeigen werden, die Klasse der auftretenden Grenzverteilungen bilden. Die Normalverteilung ist die einzige stabile Verteilung mit endlichem zweiten Moment, daher stellen stabile Verteilungen eine auf gewisse Weise natürliche Verallgemeinerung der Normalverteilung dar. Sie haben den Vorteil, dass sich die schweren Verteilungsränder der Heavy-tailed-Verteilungen berücksichtigen lassen und eine zusätzliche Stärke liegt darin, dass auch die Schiefe beliebig variiert werden kann. Dies ist von Interesse, da in der Praxis eher selten symmetrische Verteilungen auftreten.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden wir stabile Verteilungen definieren, einige ihrer elementaren Eigenschaften diskutieren sowie typische Beispiele stabiler Verteilungen betrachten. Das zweite Kapitel enthält als Hauptaussage den verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz mit Beweis. Wir erarbeiten hier die Voraussetzungen, die für die Konvergenz gegen eine stabile Zufallsvariable benötigt werden und werden unter anderem die charakteristische Funktion sowie eine Möglichkeit der Parametrisierung von stabilen Verteilungen erhalten. Abschließend werden wir im dritten Kapitel die Konvergenz zweier Heavy-tailed-Verteilungen gegen eine stabile Verteilung veranschaulichen.

Kapitel 1

Stabile Verteilungen

Den Ausgangspunkt der Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes bilden stabile Verteilungen. Den Begriff der Stabilität betrachten wir dabei nur im Kontext von Zufallsvariablen, die nicht fast sicher konstant sind. Sei dazu zunächst $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen eine Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *entartet*, falls es einen Wert $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $P(Y = a) = 1$ gibt. Nun können wir den Begriff der Stabilität einführen.

Definition 1.1 (Stabilität)

Eine nicht entartete Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stabil, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten c_n und d_n existieren, sodass

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} Y$$

für unabhängige Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit identischer Verteilung wie Y erfüllt ist. Falls $d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so nennen wir Y strikt stabil.

Wir nennen eine Zufallsvariable also genau dann stabil, wenn ihre Verteilung unter Summenbildung ihre Form beibehält. Im Folgenden betrachten wir drei typische Beispiele. Diese drei sind die einzigen stabilen Verteilungen, deren Lebesgue-Dichten in einer geschlossenen Form angegeben werden können. In Abbildung 1.1.1 sind die Dichten für die Standardformen dieser Verteilungen abgebildet und man erkennt dort auch deutlich den Unterschied der Tail-Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 1.2 (Normalverteilung)

Eine zentrierte Normalverteilung ist strikt stabil, denn für eine Familie unabhängig identisch normalverteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und Varianz $\sigma^2 > 0$ gilt:

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(0, n\sigma^2) \stackrel{d}{=} \sqrt{n} \mathcal{N}(0, \sigma),$$

also insbesondere

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Als Normierungskonstanten ergeben sich $c_n = \sqrt{n}$.

Falls für den Erwartungswert

$$\mu := \mathbb{E}[X_1] \neq 0$$

gilt, muss dieser jeweils noch subtrahiert werden. Daher ist auch eine beliebige Normalverteilung stabil und als Zentrierungskonstanten ergeben sich

$$d_n = n\mu \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 1.3 (Cauchy-Verteilung)

Die Cauchy-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung und besitzt die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x - b)^2}$$

für einen Skalierungsparameter $a > 0$ und einen Lageparameter $b \in \mathbb{R}$. Für eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X mit Dichte f schreiben wir $X \sim \mathcal{C}(a, b)$. Die Cauchy-Verteilung ist ein typisches Beispiel für eine Heavy-tailed-Verteilung. Seien nun $X_1, X_2, \dots$ eine Familie unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{C}(a, b)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Dann ist die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen X_k durch

$$\varphi_{X_k} = \exp(iat - b|t|)$$

gegeben. Es folgt

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}^n(t) = \exp(iat - b|t|)^n = \exp(iant - b|nt|) = \varphi_{X_1}(nt) = \varphi_{nX_1}(t)$$

und aufgrund der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion lässt sich auf

$$S_n \stackrel{d}{=} nX_1 \tag{1.1}$$

schließen. Somit ist die normierte Summe $n^{-1}S_n$ wieder Cauchy-verteilt und die Zufallsvariable X_1 ist strikt stabil.

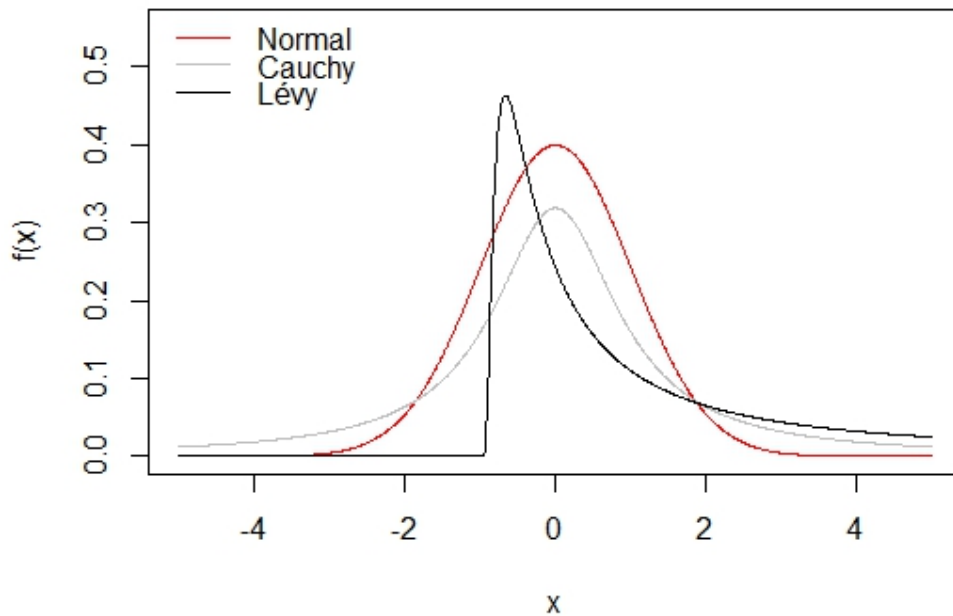


Abbildung 1.1: Dichtefunktionen von Normalverteilung, Cauchy-Verteilung und Lévy-Verteilung

Beispiel 1.4 (Standard-Lévy-Verteilung)

Die Standard-Lévy-Verteilung besitzt die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right) \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

Sie ist strikt stabil mit $c_n = n^2$, wie wir später zeigen werden.

Es sollen nun einige grundlegende Eigenschaften von stabilen Verteilungen diskutiert werden, die den Umgang mit ihnen etwas vereinfachen. Wir beginnen mit der Form der Normierungskonstanten c_n .

Satz 1.5

Die Normierungskonstanten einer stabilen Verteilung haben die Form

$$c_n = n^{1/\alpha}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Der hier auftretende Exponent α^{-1} bestimmt maßgeblich die Form der stabilen Verteilung und wird später auch für den verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz wichtig sein. Bevor wir Satz 1.5 beweisen, führen wir daher den folgenden Begriff ein.

Definition 1.6 (Stabilitäts-Index)

Die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Stabilitäts-Index oder kurz Index der stabilen Verteilung.

Wie wir später sehen werden, befindet sich der Stabilitäts-Index immer im Intervall $(0, 2]$. Für $\alpha = 2$ werden wir eine Normalverteilung erhalten, für $\alpha < 2$ eine Heavy-tailed-Verteilung.

Beweis von Satz 1.5. Wir zeigen zunächst, dass es genügt, den Beweis für symmetrische Verteilungen zu führen. Dazu betrachten wir unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $Y, Y_1, \dots, Y_n$ sowie unabhängige Kopien $Y', Y'_1, \dots, Y'_n$ und Y sei stabil. Es seien außerdem $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$ und $S'_n := Y'_1 + \dots + Y'_n$. Aufgrund der Stabilität von Y gilt

$$Y - Y' \stackrel{d}{=} \frac{S_n - d_n}{c_n} - \frac{S'_n - d_n}{c_n} = \frac{S_n - S'_n}{c_n}.$$

Somit ist auch $Y - Y'$ wieder eine stabile Zufallsvariable mit denselben Normierungskonstanten c_n . Insbesondere ist $Y - Y'$ symmetrisch und wir können im weiteren Verlauf des Beweises ohne Einschränkung annehmen, dass $d_n = 0$ für alle n gilt.

Seien also $Y, Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte, symmetrische Zufallsvariablen sowie $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$ und Y sei strikt stabil. Setzen wir

$$\alpha_n := \log(n) / \log(c_n),$$

dann gilt

$$c_n = n^{1/\alpha_n}.$$

Wir zeigen nun, dass α_n stets wohldefiniert ist und dass es außerdem von n unabhängig ist.

Für natürliche Zahlen m und n können wir S_{m+n} als die Summe der unabhängigen Zufallsvariablen S_m und $S_{m+n} - S_m$ schreiben. Es gilt aufgrund der Stabilität $S_m \stackrel{d}{=} c_m Y$ und $S_{m+n} - S_m \stackrel{d}{=} c_n Y$. Zusammen ergibt sich

$$c_{m+n} Y \stackrel{d}{=} c_m Y_1 + c_n Y_2. \quad (1.2)$$

Weiter gilt

$$S_{m \cdot n} \stackrel{d}{=} c_{m \cdot n} Y$$

sowie nach (1.2)

$$c_{m \cdot n} Y = c_{n+\dots+n} Y \stackrel{d}{=} c_n Y_1 + \dots + c_n Y_m = c_n (Y_1 + \dots + Y_m) \stackrel{d}{=} c_n c_m Y.$$

Daher folgt zunächst

$$c_{m \cdot n} = c_m c_n \quad (1.3)$$

und somit induktiv

$$c_{n^k} = c_n^k \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Wir wollen als nächstes zeigen, dass die Folge $\left(\frac{c_n}{c_{n+m}}\right)_{(m,n)}$ beschränkt ist. Dazu betrachten wir für $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} P(Y > t) &= P\left(\frac{c_m Y_1 + c_n Y_2}{c_{m+n}} > t\right) \\ &= P(c_m Y_1 + c_n Y_2 > c_{n+m} t) \\ &\geq P(c_m Y_1 > 0, c_n Y_2 > c_{n+m} t) \\ &= P(Y_1 > 0) P\left(Y_2 > \frac{c_{n+m}}{c_n} t\right) \\ &= \frac{1}{2} P\left(Y_2 > \frac{c_{n+m}}{c_n} t\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$P\left(\frac{c_{m+n}}{c_n} Y > t\right) \geq \frac{1}{2} P(Y_2 > t). \quad (1.5)$$

Angenommen $\left(\frac{c_n}{c_{n+m}}\right)_{(m,n)}$ ist unbeschränkt. Dann können wir eine Teilfolge $\left(\frac{c_{n_i}}{c_{n_i+m_i}}\right)_i$ finden, die gegen Unendlich konvergiert. Es gilt dann $\frac{c_{m_i+n_i}}{c_{n_i}} \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ und somit auch

$$P\left(\frac{c_{m_i+n_i}}{c_{n_i}}Y > t\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty.$$

Da wir aber angenommen haben, dass Y symmetrisch und nicht entartet ist, also insbesondere $Y \neq \delta_0$ gilt, können wir ein t mit der Eigenschaft

$$P(Y_2 > t) > 0$$

finden und es ergibt sich ein Widerspruch zu Ungleichung (1.5).

Nach (1.4) gilt im Fall $n = j^k$ und $m + n = (j+1)^k$ nun

$$\frac{c_{j^k}}{c_{(j+1)^k}} = \left(\frac{c_j}{c_{j+1}}\right)^k.$$

Da wir oben gesehen haben, dass die Folge beschränkt ist, muss also

$$\frac{c_j}{c_{j+1}} \leq 1$$

gelten und daher ist die Folge $(c_n)_n$ monoton wachsend. Aus (1.2) folgt, dass sogar $c_{n+1} \neq c_n$ gelten muss. Denn angenommen, es gilt Gleichheit, so können wir mit (1.2)

$$c_n Y = c_{n+1} Y \stackrel{d}{=} c_n Y_1 + c_1 Y_2$$

folgern und die Zufallsvariable Y_2 muss fast sicher Null sein. Nach Voraussetzung ist aber Y und somit auch Y_2 nicht entartet und es ergibt sich ein Widerspruch. Es folgt daher, dass die Folge $(c_n)_n$ streng monoton wachsend ist.

Wir beobachten, dass

$$c_{n^k} \leq c_{n^{k+1}}$$

für $n, k \in \mathbb{N}$ genau dann erfüllt ist, wenn

$$c_n^k \leq c_n^{k+1}$$

gilt und aus diesem Grund muss $c_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sein.

Im Fall $n = 1$ folgt explizit aus der Definition der Stabilität, dass $c_1 = 1$ gelten muss, weshalb $c_1 = 1^{1/\alpha}$ für jedes $\alpha \neq 0$ erfüllt ist. Aufgrund der strengen Monotonie gilt dann $c_n > 1$ für $n > 1$ und somit ist der Ausdruck

$$\alpha_n := \log(n) / \log(c_n)$$

für $n > 1$ wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, dass α_n von n unabhängig ist. Dazu betrachten wir beliebige natürliche Zahlen $n_1, n_2 > 1$ und zeigen, dass $\alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$ erfüllt ist. Zu gegebenem Exponenten $k \in \mathbb{N}$ können wir ein l finden, sodass

$$n_1^l \leq n_2^k < n_1^{l+1}$$

gilt. Aufgrund der strengen Monotonie und mit (1.4) folgt

$$c_{n_1}^l \leq c_{n_2}^k < c_{n_1}^{l+1}.$$

Logarithmieren wir beide Ungleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} l \log(n_1) &\leq k \log(n_2) < (l+1) \log(n_1) \quad \text{sowie} \\ \frac{1}{(l+1)} \frac{1}{\log(c_{n_1})} &< \frac{1}{k} \frac{1}{\log(c_{n_2})} \leq \frac{1}{l} \frac{1}{\log(c_{n_1})}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation ergibt sich

$$\frac{l}{l+1} \underbrace{\frac{\log(n_1)}{\log(c_{n_1})}}_{\alpha_{n_1}} < \underbrace{\frac{\log(n_2)}{\log(c_{n_2})}}_{\alpha_{n_2}} < \frac{l+1}{l} \underbrace{\frac{\log(n_1)}{\log(c_{n_1})}}_{\alpha_{n_1}}. \quad (1.6)$$

Lassen wir nun k gegen Unendlich laufen, so wird auch l beliebig groß und es folgt aus (1.6)

$$\alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}.$$

Es existiert also ein universeller Index α und die Normierungskonstanten haben die Form

$$c_n = n^{1/\alpha}.$$

□

Wir können den Stabilitäts-Index für die drei betrachteten Beispiele bestimmen.

Beispiel 1.7

Für die Verteilungen aus den Beispielen 1.2 bis 1.4 ergibt sich

$$\alpha_{\mathcal{N}} = 2, \quad (1.7)$$

$$\alpha_{\mathcal{C}} = 1 \quad \text{und} \quad (1.8)$$

$$\alpha_{\text{Levy}} = 1/2. \quad (1.9)$$

Im folgenden Satz werden wir sehen, dass sich jede stabile Verteilung mit einem Index $\alpha \neq 1$ durch Verschiebung in eine strikt stabile Verteilung transformieren lässt.

Satz 1.8

Sei Y stabil mit Index $\alpha \neq 1$. Dann existiert eine Konstante $b \in \mathbb{R}$, sodass

$$Y' := Y + b$$

strikt stabil ist.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Zufallsvariable Y' . Es gilt

$$S'_n = S_n + nb \stackrel{d}{=} c_n Y + d_n + nb = c_n Y' + (d_n + (n - c_n)b).$$

Die Zufallsvariable Y' ist also ebenfalls stabil mit Konstanten

$$c'_n = c_n \quad \text{und} \quad d'_n = d_n + (n - c_n)b.$$

Wie wir nun zeigen werden, können wir die Konstante b so wählen, dass $d'_n = 0$ für alle n gilt. Zunächst stellen wir fest, dass die Bedingung für festes n genau dann erfüllt ist, wenn wir

$$b(n) := -\frac{d_n}{n - c_n} = -\frac{d_n}{n - n^{1/\alpha}}$$

setzen. Dieser Ausdruck ist, da $\alpha \neq 1$ gilt, wohldefiniert. Außerdem zeigen wir nun, dass $b(n)$ von n unabhängig ist. Wir betrachten für beliebige natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ die Partialsumme $S_{m,n}$, die wir als Summe von m unabhängigen Zufallsvariablen schreiben können. Diese sind aufgrund der Stabilität von Y jeweils wie $c_n Y + d_n$ verteilt. Es folgt daher

$$S_{m,n} \stackrel{d}{=} (c_n Y_1 + d_n) + \cdots + (c_n Y_m + d_n) = c_n S_m + m d_n = c_n (c_m Y + d_m) + m d_n.$$

Tauschen wir nun die Rollen von m und n , so erhalten wir analog

$$S_{m \cdot n} \stackrel{d}{=} c_m(c_n Y + d_n) + n d_m.$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert

$$(c_n - n)d_m = (c_m - m)d_n,$$

es gilt also

$$b(m) = -\frac{d_m}{m - c_m} = -\frac{d_n}{n - c_n} = b(n)$$

für $\alpha \neq 1$ und somit folgt die Behauptung. □

Wir haben nun die Form der Normierungskonstanten diskutiert und eine Möglichkeit gefunden, die Zentrierungskonstanten stabiler Verteilungen verschwinden zu lassen. Als nächstes werden wir die Aussage zeigen, die stabile Verteilungen im Zusammenhang mit der Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes so wichtig erscheinen lässt.

Satz 1.9

Eine Zufallsvariable Y ist genau dann stabil, wenn eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ sowie Konstanten a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$ existieren, sodass

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - b_n}{a_n}$$

schwach gegen Y konvergiert.

Beweis. Falls Y stabil ist, können wir die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so wählen, dass $X_n \stackrel{d}{=} Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Definition folgt dann, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten c_n und d_n existieren, sodass

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} Y$$

erfüllt ist und somit konvergiert die Folge für $n \rightarrow \infty$ auch schwach gegen Y .

Sei nun

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - b_n}{a_n} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gegeben. Wir definieren

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - b_n}{a_n}$$

sowie

$$S_n^j := X_{(j-1) \cdot n + 1} + \cdots + X_{j \cdot n}$$

für $n, j \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable S_n^j fasst also immer n Summanden zusammen. Es ergibt sich daher

$$Z_{n \cdot k} = \frac{S_n^1 + \cdots + S_n^k - b_{n \cdot k}}{a_{n \cdot k}}.$$

Wir formen diesen Ausdruck nun so um, dass wir eine stabile Zufallsvariable erhalten. Es gilt

$$\frac{a_{n \cdot k}}{a_n} Z_{n \cdot k} - \frac{k \cdot b_n - b_{n \cdot k}}{a_n} = \frac{S_n^1 - b_n}{a_n} + \cdots + \frac{S_n^k - b_n}{a_n}. \quad (1.10)$$

Nach Voraussetzung gilt zudem

$$\frac{S_n^i - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} \frac{S_n^1 - b_n}{a_n} \Rightarrow Y_i \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{und für alle } i \geq 1,$$

wobei Y_i unabhängige Zufallsvariablen sind, die dieselbe Verteilung wie Y besitzen. Außerdem wissen wir, dass die Bedingung

$$Z_{n \cdot k} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Für die Stabilität bleibt also zu zeigen, dass auch die Konstanten

$$c_{n,k} := \frac{a_{n \cdot k}}{a_n} \quad \text{und} \quad d_{n,k} := \frac{(k \cdot b_n - b_{n \cdot k})}{a_n} \quad (1.11)$$

für $n \rightarrow \infty$ konvergieren. Denn angenommen, es existieren die Grenzwerte $c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k}$ und $d_k = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,k}$, dann liefert uns (1.10) für $n \rightarrow \infty$

$$c_k Y - d_k \stackrel{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_k,$$

was der Stabilitätseigenschaft entspricht. Die Existenz der Konstanten c_k und d_k folgt direkt aus dem „Convergence of types theorem“ (vgl. Satz A.1). Wir setzen dort

$$W_n := Z_{n \cdot k} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und

$$W'_n := c_{n,k} W_n - d_{n,k} = \frac{S_n^1 - b_n}{a_n} + \cdots + \frac{S_n^k - b_n}{a_n} \Rightarrow Y_1 + \cdots + Y_k \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Voraussetzung sind Y sowie $Y_1 + \cdots + Y_k$ nicht entartete Zufallsvariablen, daher folgt die Konvergenz der Konstanten und somit die Behauptung. $\square$

Es ist anzumerken, dass normierte (und zentrierte) Summen von unabhängig identisch verteilten stabilen Zufallsvariablen immer konvergieren. Die Normierungskonstanten haben dabei nach Satz 1.5 die Form $a_n = c_n = n^{1/\alpha}$ und eine Zentrierung kann für $\alpha \neq 1$ mit Satz 1.8 umgangen werden.

Außerdem folgt mit Satz 1.9 aus dem zentralen Grenzwertsatz, dass die Normalverteilung die einzige stabile Verteilung mit endlichem zweiten Moment ist.

Kapitel 2

Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz

2.1 Reguläre Variation

Im Folgenden werden wir Kriterien für die schwache Konvergenz gegen eine stabile Zufallsvariable ausarbeiten. Für eine Zufallsvariable X heißt die Abbildung $x \mapsto P(|X| > x)$ die *Tailfunktion* von X . Wir werden sehen, dass die Summe von Zufallsvariablen genau dann konvergiert, wenn sich die Tailfunktionen in gewissem Sinne wie Potenzfunktionen verhalten. Dazu benötigen wir den Begriff der regulären Variation.

Regulär variierende Funktionen

Wir betrachten die reguläre Variation zunächst im Kontext messbarer Funktionen.

Definition 2.1

Eine strikt positive, Lebesgue-messbare Funktion V heißt regulär variierend (in ∞) mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn sie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = t^{-\alpha} \quad \text{für alle } t > 0 \quad (2.1)$$

erfüllt.

V heißt langsam variierend (in ∞), wenn $\alpha = 0$ gilt, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = 1 \quad \text{für alle } t > 0 \quad (2.2)$$

erfüllt ist.

Regulär variierende Funktionen sind also Funktionen, die sich asymptotisch wie Potenzfunktionen verhalten. Langsam variierende Funktionen verändern sich, wie die Bezeichnung nahelegt, für große x nur langsam. Wie der nächste Satz zeigt, können wir regulär variierende Funktionen stets durch langsam variierende Funktionen beschreiben.

Satz 2.2

Eine Funktion V ist genau dann regulär variierend, wenn sie sich darstellen lässt als

$$V(t) = t^{-\alpha} L(t), \quad (2.3)$$

wobei L langsam variierend ist.

Beweis. Sei V regulär variierend. Wir betrachten die Funktion $L(t) := V(t)t^\alpha$. Aus (2.1) können wir

$$\frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{V(tx)(tx)^\alpha}{V(x)x^\alpha} = \frac{V(tx)}{V(x)} t^\alpha \longrightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

folgern. Die Funktion $L(t)$ ist also langsam variierend und somit gilt auch die Darstellung in (2.3).

Angenommen, es gilt für die Funktion V die Darstellung in (2.3). Dann ergibt sich

$$\frac{V(tx)}{V(x)} = \frac{(tx)^{-\alpha} L(tx)}{x^{-\alpha} L(x)} = t^{-\alpha} \frac{L(tx)}{L(x)} \longrightarrow t^{-\alpha} \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

also ist die Funktion V regulär variierend. $\square$

Wir betrachten nun einige Beispiele langsam und regulär variierender Funktionen.

Beispiele 2.3

- i) Jede Funktion L , die einen positiven Grenzwert besitzt, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = b \in (0, \infty)$$

erfüllt, ist langsam variierend.

- ii) Die Funktion $L(t) = \log(t)$ ist langsam variierend, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(tx)}{\log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(t) + \log(x)}{\log(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(t)}{\log(x)} + 1 = 1 \quad \text{für alle } t > 0.$$

- iii) Die Identitätsfunktion $\text{id}(t) = t$ ist nicht langsam variierend; allgemeiner ist die Funktion $V(t) = ct^\varepsilon$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht langsam variierend, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(tx)^\varepsilon}{cx^\varepsilon} = t^\varepsilon.$$

Allerdings ist die Funktion V regulär variierend mit Index ε .

Abschließend betrachten wir ein Lemma, das eine Abschätzung der Folgenglieder aus (2.1) liefert. Insbesondere lassen sich die Folgenglieder mit einer Potenzfunktion abschätzen, deren Exponent beliebig viel kleiner als $-\alpha$ gewählt werden kann. Man beachte, dass die Voraussetzungen des Lemmas, bis auf die reguläre Variation, für Tailfunktionen von Zufallsvariablen stets erfüllt sind.

Lemma 2.4

Sei $V : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ eine monoton fallende, regulär variierende Funktion mit Index α . Dann existiert für jedes $\delta > 0$ eine Konstante C und ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \geq x_0$ und $0 < t < 1$ die Abschätzung

$$\frac{V(tx)}{V(x)} \leq Ct^{-(\alpha+\delta)}$$

gilt.

Beweis. Da V regulär mit Index α variiert, liefert uns Satz 2.3

$$\frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)} \longrightarrow 2^\alpha \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

und somit auch

$$\left| \frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)} - 2^\alpha \right| \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Wir können also für jedes $\delta' > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$-\delta' \leq \frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)} - 2^\alpha \leq \delta' \quad \text{für alle } x \geq x_0$$

gilt. Wählen wir $\delta' = 2^\alpha (2^\delta - 1)$, so folgt insbesondere

$$\frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)} \leq 2^{\alpha+\delta} \quad \text{für alle } x \geq x_0. \quad (2.4)$$

Sei nun $i \in \mathbb{N}$ die erste natürliche Zahl, für die

$$\frac{x}{2^i} < x_0 \quad (2.5)$$

erfüllt ist. Für ein festes $t \in (0, 1)$ wählen wir außerdem $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{2^n} < t \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2.6)$$

Es genügt nun, den Ausdruck

$$\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)}$$

zu majorisieren, denn nach Wahl von n und aufgrund der Monotonie von V gilt

$$\frac{V(tx)}{V(x)} \leq \frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)}.$$

Wir machen dazu eine Fallunterscheidung:

Im Fall $n \leq i$ gilt

$$\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)} = \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-1}})}{V(\frac{x}{2^{n-1}})} \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-2}})}{V(\frac{x}{2^{n-2}})} \dots \frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)}.$$

Da nach Wahl von i die Ungleichung $\frac{x}{2^j} \geq x_0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, können wir nach (2.4) jeden der n Terme mit $2^{\alpha+\delta}$ abschätzen und erhalten insgesamt

$$\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)} \leq 2^{n(\alpha+\delta)}.$$

Im Fall $n > i$ schreiben wir

$$\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)} = \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-1}})}{V(\frac{x}{2^i})} \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{i-1}})}{V(\frac{x}{2^{i-1}})} \dots \frac{V(\frac{x}{2})}{V(x)}.$$

Die letzten $i - 1$ Terme können, erneut aufgrund von (2.4), jeweils mit $2^{\alpha+\delta}$ abgeschätzt werden. Für den ersten Term gilt

$$\frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-1}})}{V(\frac{x}{2^i})} \leq \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-1}})}{V(x_0)} = \frac{V(\frac{x_0}{2})}{V(x_0)} \frac{V(\frac{1}{2} \frac{x}{2^{n-1}})}{V(\frac{x_0}{2})} \leq 2^{\alpha+\delta} \frac{1}{V(x_0)},$$

wobei hier die Monotonie von V und die Voraussetzung $\text{Im}(V) = [0, 1]$ eingehen. Setzen wir beides zusammen, erhalten wir

$$\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)} \leq \frac{1}{V(x_0)} 2^{(\alpha+\delta)i}.$$

In beiden Fällen können wir dann unabhängig von i die Majorante

$$\frac{1}{V(x_0)} 2^{(\alpha+\delta)n}$$

für $\frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)}$ wählen.

Aufgrund der Monotonie von V und nach Wahl von n in (2.6) gilt nun

$$\frac{V(tx)}{V(x)} \leq \frac{V(\frac{x}{2^n})}{V(x)} \leq \frac{1}{V(x_0)} 2^{(\alpha+\delta)n} \leq \frac{1}{V(x_0)} 2^{\alpha+\delta} t^{-\alpha-\delta}$$

und es folgt die Behauptung mit

$$C = \frac{1}{V(x_0)} 2^{\alpha+\delta}.$$

□

Regulär variierende Zufallsvariablen

Wie oben erwähnt, wollen wir den Begriff der regulären Variation nun spezifischer für Zufallsvariablen definieren. Einerseits soll dazu die Tailfunktion der Zufallsvariablen regulär variieren, andererseits soll auch eine Tail-Ausgleichsbedingung erfüllt sein.

Definition 2.5

Wir nennen eine Zufallsvariable X regulär variierend mit Index α , falls

- i) $P(|X| > x)$ strikt positiv sowie regulär variierend mit Index α ist und*
- ii) es ein $\theta \in [0, 1]$ gibt, sodass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} = \theta$ erfüllt ist.*

Wir werden später sehen, dass die normierte und zentrierte Summe regulär variierender Zufallsvariablen gegen eine stabile Verteilung konvergiert. Das folgende, sehr allgemein gehaltene Beispiel soll die Definition veranschaulichen.

Beispiel 2.6

Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit stetiger Dichte f , die um 0 symmetrisch ist und $f(0) > 0$ erfüllt. Beispiele hierfür sind Cauchy- oder auch normalverteilte Zufallsvariablen. Wir zeigen, dass dann $\frac{1}{X}$ regulär variierend ist.

Aufgrund der Symmetrie der Dichte gilt zunächst $\theta = \frac{1}{2}$. Um α zu bestimmen, können wir außerdem $P\left(\frac{1}{X} > x\right)$ umschreiben und es ergibt sich

$$P\left(\frac{1}{X} > x\right) = P\left(0 < X < \frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{1}{x}} f(y) dy.$$

Wir wenden den Mittelwertsatz (vgl. Satz A.2) an und erhalten

$$P\left(\frac{1}{X} > x\right) = f(\xi) \frac{1}{x} \quad \text{für ein } \xi \in [0, x^{-1}].$$

Wegen der Symmetrie von f folgt $P\left(\frac{1}{|X|} > x\right) = 2f(\xi) \frac{1}{x}$, es gilt also insgesamt

$$\frac{P\left(\frac{1}{|X|} > tx\right)}{P\left(\frac{1}{|X|} > x\right)} = \frac{2f(\xi') \frac{1}{tx}}{2f(\xi) \frac{1}{x}} = \frac{f(\xi')}{f(\xi)} \frac{1}{t}$$

für $\xi \in [0, x^{-1}]$ und $\xi' \in [0, (tx)^{-1}]$. Für $x \rightarrow \infty$ folgt daher $\xi, \xi' \rightarrow 0$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\left(\frac{1}{|X|} > tx\right)}{P\left(\frac{1}{|X|} > x\right)} = t^{-1},$$

also $\alpha = 1$.

Notation 2.7

Wir setzen für eine regulär variierende Zufallsvariable X

$$a_n := \inf\{x : P(|X| > x) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Im weiteren Verlauf werden wir sehen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Rolle der Normierungskonstanten im verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz spielen wird. Wir betrachten daher kurz das Konvergenzverhalten der Folge. Nach Definition ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Es gilt außerdem

$$P(|X| > x) \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

des Weiteren ist die Tail-Funktion strikt positiv. Daher folgt auch

$$a_n = \inf\{x : P(|X_1| > x) \leq \frac{1}{n}\} \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Wir zeigen nun einige Konvergenzaussagen für die Tailfunktion von regulär variierenden Zufallsvariablen.

Satz 2.8

Es sei X eine regulär variierende Zufallsvariable mit Index α . Dann gelten für $x > 0$ die Konvergenzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(|X| > a_n) = 1, \quad (2.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(|X| > xa_n) = x^{-\alpha}, \quad (2.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X > a_n) = \theta x^{-\alpha} \quad \text{und} \quad (2.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X < -xa_n) = (1 - \theta)x^{-\alpha}. \quad (2.11)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst Aussage (2.8). Da a_n das Infimum der Menge $\{x : P(|X| > x) \leq \frac{1}{n}\}$ darstellt, folgt mit der Rechtsstetigkeit der Tailfunktion die Ungleichung $P(|X| > a_n) \leq \frac{1}{n}$. Dies impliziert zunächst

$$nP(|X| > a_n) \leq n \frac{1}{n} = 1.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass außerdem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} nP(|X| > a_n) \geq (1 + \varepsilon)^{-\alpha}$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ erfüllt ist, folgt daraus die Behauptung (2.8).

Wir wählen also $\varepsilon > 0$ beliebig und setzen

$$\begin{aligned} t &:= 1 + \varepsilon \quad \text{sowie} \\ x_n &:= \frac{a_n}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

In (2.7) haben wir gezeigt, dass a_n für wachsendes n gegen Unendlich konvergiert. Es folgt daher sofort, dass auch

$$x_n \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Da die Funktion $P(|X| > x)$ nach Voraussetzung regulär variierend ist, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > t x_n)}{P(|X| > x_n)} = t^{-\alpha} = (1 + \varepsilon)^{-\alpha}.$$

Da a_n die Ungleichungen

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} a_n > a_n > \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} a_n$$

erfüllt und die Tail-Funktion monoton fallend ist, gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} P(|X| > a_n) &\geq P\left(|X| > \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} a_n\right) = P(|X| > t x_n) \quad \text{und} \\ \frac{1}{n} &\leq P\left(|X| > \frac{a_n}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}\right) = P(|X| > x_n). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
 \liminf_{n \rightarrow \infty} nP(|X| > a_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > a_n)}{1/n} \\
 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > tx_n)}{P(|X| > x_n)} \\
 &= t^{-\alpha} \\
 &= (1 + \varepsilon)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung (2.8).

Um die Behauptung (2.9) zu zeigen, erweitern wir zunächst mit $P(|X| > a_n)$ und erhalten

$$nP(|X| > xa_n) = nP(|X| > a_n) \frac{P(|X| > xa_n)}{P(|X| > a_n)}.$$

Jetzt können wir Aussage (2.8) anwenden. Da außerdem $P(|X| > x)$ nach Voraussetzung regulär variierend ist, gilt

$$\frac{P(|X| > xa_n)}{P(|X| > a_n)} \longrightarrow x^{-\alpha} \quad \text{für } n \rightarrow \infty;$$

also folgt insgesamt die Behauptung (2.9).

Nach zweimaligem Erweitern ergibt sich Darstellung

$$nP(X > xa_n) = nP(|X| > a_n) \frac{P(|X| > xa_n)}{P(|X| > a_n)} \frac{P(X > xa_n)}{P(|X| > xa_n)}$$

und da $\frac{P(X > xa_n)}{P(|X| > xa_n)}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen θ konvergiert, erhalten wir den zusätzlichen Faktor für Behauptung (2.10). Schließlich folgt die Behauptung (2.11) aus (2.9) und (2.10), denn es gilt

$$nP(X < -xa_n) = nP(|X| > xa_n) - nP(X > xa_n).$$

□

Da die Gleichheit $P(x < |X| \leq y) = P(|X| > x) - P(|X| > y)$ gilt, ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 2.9

Es sei X eine regulär variierende Zufallsvariable mit Index α . Für $x, y > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(xa_n < |X| \leq ya_n) = x^{-\alpha} - y^{-\alpha}, \quad (2.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(xa_n < X \leq ya_n) = \theta(x^{-\alpha} - y^{-\alpha}) \quad \text{und} \quad (2.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(-ya_n \leq X < -xa_n) = (1 - \theta)(x^{-\alpha} - y^{-\alpha}). \quad (2.14)$$

2.2 Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz

Tatsächlich können wir nun zeigen, dass regulär variierende Zufallsvariablen nach geeigneter Skalierung gegen eine stabile Verteilung konvergieren.

Satz 2.10 (Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz)

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen, die regulär mit Index α variieren. Es seien weiter

$$\begin{aligned} S_n &:= X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{und} \\ b_n &:= n\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}}] \end{aligned}$$

für a_n aus Notation 2.7.

Dann existiert eine nicht entartete Zufallsvariable Y , sodass

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Insbesondere ist Y dann stabil mit Index α .

Für den Beweis zerlegen wir die Zufallsvariable $S_n - b_n$ in „große“ und „kleine“ Terme und benutzen das folgende Lemma.

Lemma 2.11

Sei Z_n eine Zufallsvariable mit einer Zerlegung der Form $Z_n = \hat{Z}_n^\varepsilon + \bar{Z}_n^\varepsilon$. Für diese seien die drei Bedingungen

$$i) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta) = 0 \quad \text{für alle } \delta > 0,$$

$$ii) \hat{Z}_n^\varepsilon \Rightarrow \zeta^\varepsilon \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ sowie}$$

$$iii) \zeta^\varepsilon \Rightarrow Y \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

erfüllt. Dann gilt auch

$$Z_n \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis von Lemma 2.11. Wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $I \subset \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in I) \leq P(Y \in I)$$

gilt; die schwache Konvergenz von Z_n gegen Y folgt dann mit Hilfe des Portmanteau-Theorems (vgl. Satz A.3). Sei also $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und für $\delta > 0$ sei I^δ die Menge aller Punkte aus $\mathbb{R}$, deren Abstand zur Menge I höchstens δ beträgt; also

$$I^\delta := \{x : \inf\{|x - i| : i \in I\} \leq \delta\}.$$

Es gilt die Abschätzung

$$P(Z_n \in I) \leq P(\hat{Z}_n^\varepsilon \in I^\delta) + P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta).$$

Da $\hat{Z}_n^\varepsilon$ für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen ζ^ε konvergiert und I^δ abgeschlossen ist, folgt mit dem Portmanteau-Theorem

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in I) \leq P(\zeta^\varepsilon \in I^\delta) + \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta).$$

Mit demselben Argument lässt sich wegen $\zeta^\varepsilon \Rightarrow Y$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Abschätzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in I) \leq P(Y \in I^\delta) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta)$$

zeigen. Für $\delta \searrow 0$ folgt wegen der Abgeschlossenheit von I auch $I^\delta \searrow I$. Zusammen mit Voraussetzung (i) ergibt sich daher

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \in I) \leq P(Y \in I)$$

und somit die Behauptung. □

Beweis von Satz 2.10. Wir wollen Lemma 2.11 für $Z_n := \frac{S_n - b_n}{a_n}$ anwenden. Wir müssen dazu zunächst eine Zerlegung von Z_n finden. Es gilt

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{X_m}{a_n} - \mathbb{E} \left[\frac{X_1}{a_n} \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}} \right] \right). \quad (2.15)$$

Wir spalten diesen Ausdruck nun in „große“ und „kleine“ Terme auf und erhalten auf diese Weise zwei neue Zufallsvariablen.

Seien dazu für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I_n(\varepsilon) &:= \{m \leq n : |X_m| > \varepsilon a_n\}, \\ \widehat{S}_n(\varepsilon) &:= \sum_{m \in I_n(\varepsilon)} X_m \end{aligned}$$

die großen Terme und

$$\begin{aligned} J_n(\varepsilon) &:= \{m \leq n : |X_m| \leq \varepsilon a_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus I_n(\varepsilon), \\ \bar{S}_n(\varepsilon) &:= \sum_{m \in J_n(\varepsilon)} X_m \end{aligned}$$

die kleinen Terme sowie

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\varepsilon) &:= \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{\varepsilon a_n < |X_1| \leq a_n\}}] \quad \text{und} \\ \bar{\mu}(\varepsilon) &:= \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq \varepsilon a_n\}}] \end{aligned}$$

die jeweiligen Anteile des Erwartungswertes in (2.15). Es ergibt sich dann für Z_n die Zerlegung

$$Z_n = \frac{S_n - b_n}{a_n} = \frac{\bar{S}_n(\varepsilon) - n\bar{\mu}(\varepsilon)}{a_n} + \frac{\widehat{S}_n(\varepsilon) - n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n}. \quad (2.16)$$

Im Folgenden sei also

$$\hat{Z}_n^\varepsilon := \frac{\widehat{S}_n(\varepsilon) - n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n}$$

und

$$\bar{Z}_n^\varepsilon := \frac{\bar{S}_n(\varepsilon) - n\bar{\mu}(\varepsilon)}{a_n}.$$

Wir zeigen nun die drei Voraussetzungen für Lemma 2.11.

Voraussetzung (i) Zu zeigen ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta) = 0$ für alle $\delta > 0$.

Wir können $\bar{S}_n(\varepsilon)$ in eine Summe umschreiben und erhalten

$$\bar{S}_n(\varepsilon) = \sum_{m=1}^n X_m \mathbb{1}_{\{|X_m| \leq \varepsilon a_n\}}.$$

Zur Vereinfachung definieren wir außerdem

$$\bar{X}_m(\varepsilon) := X_m \mathbb{1}_{\{|X_m| \leq \varepsilon a_n\}}.$$

Nach Konstruktion handelt es sich bei $\bar{\mu}(\varepsilon)$ um den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\bar{X}_m(\varepsilon)$, folglich ist

$$\bar{Z}_n^\varepsilon = \sum_{m=1}^n (\bar{X}_m(\varepsilon) - \bar{\mu}(\varepsilon))$$

eine zentrierte Zufallsvariable. Wir wollen nun das zweite Moment von $\bar{Z}_n^\varepsilon$ abschätzen und schließlich die Markov-Ungleichung (vgl. Satz A.4) anwenden. Es gilt zunächst

$$\mathbb{E} \left[(\bar{Z}_n^\varepsilon)^2 \right] = n \operatorname{Var} \left[\frac{\bar{X}_1(\varepsilon)}{a_n} \right] \leq n \mathbb{E} \left[\left(\frac{\bar{X}_1(\varepsilon)}{a_n} \right)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Wir können jetzt Satz A.5 anwenden und für $\Phi(y) = y^2$ erhalten wir

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\bar{X}_1(\varepsilon)}{a_n} \right)^2 \right] = \int \left(\frac{\bar{X}_1(\varepsilon)}{a_n} \right)^2 dP = \int_0^\varepsilon 2y P \left(\frac{|\bar{X}_1(\varepsilon)|}{a_n} > y \right) dy.$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^\varepsilon 2y P \left(\frac{|\bar{X}_1(\varepsilon)|}{a_n} > y \right) dy \leq \int_0^\varepsilon 2y P(|X_1| > ya_n) dy$$

und es folgt aus (2.17) nach Erweitern mit $P(|X_1| > a_n)$ schließlich

$$\mathbb{E} \left[(\bar{Z}_n^\varepsilon)^2 \right] \leq n P(|X_1| > a_n) \int_0^\varepsilon 2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy.$$

Wir betrachten nun das Grenzverhalten des Ausdrucks. Nach (2.8) konvergiert die Folge $nP(|X_1| > a_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 1. Mit Hilfe von Lemma 2.4 können wir außerdem den Integranden majorisieren. Die Tail-Funktion von X_1 ist monoton fallend und nach Voraussetzung regulär variierend mit Index α . Nach der Aussage des Lemmas können wir daher für jedes $\delta > 0$ eine Konstante C und ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$\frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} \leq Cy^{-\alpha-\delta} \text{ für alle } a_n \geq x_0$$

erfüllt ist. Wählen wir nun $\delta < 2 - \alpha$, so ergibt sich insgesamt für den Integranden

$$2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} \leq 2Cy^\beta \quad \text{für } a_n \geq x_0,$$

wobei der Exponent die Ungleichung

$$\beta = -\alpha - \delta + 1 > -\alpha - (2 - \alpha) + 1 = -1$$

erfüllt. Somit existiert das Integral

$$\int_0^\varepsilon 2Cy^\beta dy$$

und wir erhalten mit majorisierter Konvergenz (vgl. Satz A.6) die Form

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(nP(|X_1| > a_n) \int_0^\varepsilon 2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy \right) \\ = & 1 \cdot \int_0^\varepsilon 2y \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy \\ = & \int_0^\varepsilon 2yy^{-\alpha} dy = \int_0^\varepsilon 2y^{1-\alpha} dy \\ = & \frac{2}{2-\alpha} \varepsilon^{2-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei insbesondere die Voraussetzung $\alpha < 2$ eingeht. Dann folgt aus (2.2) die Abschätzung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(\bar{Z}_n^\varepsilon)^2 \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(nP(|X_1| > a_n) \int_0^\varepsilon 2y \frac{P(|X_1| > ya_n)}{P(|X_1| > a_n)} dy \right) = \frac{2}{2-\alpha} \varepsilon^{2-\alpha}.$$

Die Markov-Ungleichung liefert nun

$$P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta) \leq \mathbb{E} \left[(\bar{Z}_n^\varepsilon)^2 \right] \frac{1}{\delta^2}$$

und somit gilt auch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Z}_n^\varepsilon| \geq \delta) \leq \frac{2}{2-\alpha} \varepsilon^{2-\alpha} \frac{1}{\delta^2}.$$

Lassen wir nun ε gegen Null laufen, wird wegen $0 < \alpha < 2$ auch die rechte Seite beliebig klein und es folgt die Voraussetzung (i).

Voraussetzung (ii) Als nächstes zeigen wir die Existenz der Zufallsvariablen ζ^ε . Wir müssen dafür zeigen, dass $\hat{Z}_n^\varepsilon$ für $n \rightarrow \infty$ einen schwachen Grenzwert besitzt. Dazu benutzen wir den Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. Satz A.8) und zeigen die Konvergenz der charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}_n^\varepsilon$ von $\hat{Z}_n^\varepsilon$. Es gilt

$$\hat{Z}_n^\varepsilon = \frac{\hat{S}_n(\varepsilon) - n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n}.$$

Es ist zu beachten, dass es sich bei $n\hat{\mu}(\varepsilon)$ nicht um den Erwartungswert der Summe $\hat{S}_n(\varepsilon)$ handelt, da dieser potentiell nicht existiert. Wir betrachten daher zunächst nur die Summe

$$\frac{\hat{S}_n(\varepsilon)}{a_n} = \sum_{m \in I_n(\varepsilon)} \frac{X_m}{a_n}. \quad (2.18)$$

Wir betrachten diese zunächst für einen festen Wert von $|I_n(\varepsilon)|$. Die Zufallsvariable $|I_n(\varepsilon)| = |\{m \leq n : |X_m| > \varepsilon a_n\}|$ besitzt Werte in der Menge $\{0, \dots, n\}$. Angenommen, es gilt $|I_n(\varepsilon)| = l$. Dann ist (2.18) die Summe von l unabhängigen Zufallsvariablen, deren Verteilungsfunktion F_n^ε sich für $x \geq \varepsilon$ und $m \in \{1, \dots, n\}$ folgendermaßen ergibt:

$$\begin{aligned} 1 - F_n^\varepsilon(x) &= P\left(\frac{X_m}{a_n} > x \mid m \in I_n(\varepsilon)\right) \\ &= P\left(\frac{X_m}{a_n} > x \mid \frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon\right) \\ &= \frac{P(\{\frac{X_m}{a_n} > x\} \cap \{\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon\})}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\ &\stackrel{x \geq \varepsilon}{=} \frac{P(\frac{X_m}{a_n} > x)}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\ &= \frac{P(X_m > xa_n)}{P(|X_m| > xa_n)} \frac{P(|X_m| > xa_n)}{P(|X_m| > \varepsilon a_n)}. \end{aligned}$$

Da alle Zufallsvariablen regulär variieren, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - F_n^\varepsilon(x) = \theta x^{-\alpha} \varepsilon^\alpha \quad \text{für alle } x \geq \varepsilon. \quad (2.19)$$

Für den Fall $x \leq -\varepsilon$ ergibt sich für $m \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 F_n^\varepsilon(x) &= P\left(\frac{X_m}{a_n} < x \mid m \in I_n(\varepsilon)\right) \\
 &= P\left(\frac{X_m}{a_n} < x \mid \frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon\right) \\
 &= \frac{P(\{\frac{X_m}{a_n} < x\} \cap \{\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon\})}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\
 &\stackrel{x \leq -\varepsilon}{=} \frac{P(\frac{X_m}{a_n} < x)}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\
 &= \frac{P(\frac{|X_m|}{a_n} > |x|) - P(\frac{X_m}{a_n} > |x|)}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\
 &= \frac{P(\frac{|X_m|}{a_n} > |x|) - P(\frac{X_m}{a_n} > |x|)}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > |x|)} \frac{P(\frac{|X_m|}{a_n} > |x|)}{P(\frac{|X_m|}{a_n} > \varepsilon)} \\
 &= \left(1 - \frac{P(X_m > |x|a_n)}{P(|X_m| > |x|a_n)}\right) \frac{P(|X_m| > |x|a_n)}{P(|X_m| > \varepsilon a_n)}.
 \end{aligned}$$

Aufgrund der regulären Variation folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^\varepsilon(x) = (1 - \theta)|x|^{-\alpha} \varepsilon^\alpha \quad \text{für alle } x \leq -\varepsilon. \quad (2.20)$$

Durch Differentiation erhalten wir für die Grenzverteilung eine Dichte der Form

$$f^\varepsilon(x) := \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} \varepsilon^\alpha \mathbb{1}_{\{x \geq \varepsilon\}} + (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} \varepsilon^\alpha \mathbb{1}_{\{x \leq -\varepsilon\}}.$$

Sei nun $\varphi_n^\varepsilon(t)$ die zu F_n^ε gehörige charakteristische Funktion. Dann folgt mit dem Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. Satz A.8)

$$\varphi_n^\varepsilon(t) \longrightarrow \int_\varepsilon^\infty e^{itx} \theta \varepsilon^\alpha \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_\varepsilon^\infty e^{itx} (1 - \theta) \varepsilon^\alpha \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Wir betrachten nun auch die Verteilung von $|I_n(\varepsilon)|$ genauer und werden zeigen, dass diese für wachsendes n schwach gegen eine Poisson-Verteilung konvergiert.

Dazu stellen wir fest, dass die Zufallsvariable $|I_n(\varepsilon)|$ binomialverteilt ist.

Wir können sie als Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen der Form

$$Y_{n,m}(\varepsilon) = \mathbb{1}_{\{|X_m| > \varepsilon a_n\}} \quad \text{für } m = 1, \dots, n$$

mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_n := P(|X_1| > \varepsilon a_n)$ schreiben. Aussage (2.9) liefert zudem

$$\sum_{m=1}^n p_n = nP(|X_1| > \varepsilon a_n) \longrightarrow \varepsilon^{-\alpha} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

und daher gilt auch

$$\max_{m=1, \dots, n} p_n = P(|X_m| > \varepsilon a_n) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit dem Satz von der „Poisson-Konvergenz“ (vgl. Satz A.9) erhalten wir

$$|I_n(\varepsilon)| \Rightarrow Z \sim \text{Poi}(\varepsilon^{-\alpha}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Als charakteristische Funktion der Summe $\widehat{S}_n(\varepsilon)/a_n$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{\widehat{S}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(it \frac{\widehat{S}_n(\varepsilon)}{a_n} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(it \frac{\widehat{S}_n(\varepsilon)}{a_n} \right) \middle| |I_n(\varepsilon)| = m \right] \right] \\ &= \sum_{m=0}^n P(|I_n(\varepsilon)| = m) \varphi_n^\varepsilon(t)^m \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{np_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{np_n}{n} \right)^{n-m} \varphi_n^\varepsilon(t)^m. \end{aligned}$$

Wir wollen schließlich den Grenzwert der charakteristischen Funktion für $n \rightarrow \infty$ berechnen und wenden dafür Korollar A.7 an. Wir setzen

$$f_n(m) = \binom{n}{m} \left(\frac{np_n}{n} \right)^m \left(1 - \frac{np_n}{n} \right)^{n-m} \varphi_n^\varepsilon(t)^m \mathbb{1}_{\{m \leq n\}},$$

denn dann gilt

$$\varphi_{\frac{\widehat{S}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(m).$$

Wir müssen also $f_n(m)$ majorisieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Abschätzung

$$\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-m} |\varphi_n^\varepsilon(t)^m| \mathbb{1}_{\{m \leq n\}} \leq 1$$

erfüllt ist. Außerdem beobachten wir

$$\binom{n}{m} \frac{1}{n^m} = \frac{1}{m!} \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{n^m} \leq \frac{1}{m!}.$$

Letztlich wissen wir aus (2.22), dass np_n eine konvergente Folge ist, weshalb eine Konstante C existiert, die

$$(np_n) \leq C$$

erfüllt (für die genauere Ausführung siehe Bemerkung A.12). Insgesamt gilt

$$|f_n(m)| \leq \frac{C^m}{m!}$$

und die Majorante erfüllt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C^m}{m!} = \exp(C) < \infty.$$

Mit Korollar A.7 und (2.23) folgt nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{\hat{s}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (P(|I_n(\varepsilon)| = m) \varphi_n^\varepsilon(t)^m \mathbb{1}_{\{m \leq n\}}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\varepsilon^{-\alpha}) \frac{(\varepsilon^{-\alpha})^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^\varepsilon(t)^m \\ &= \exp(-\varepsilon^{-\alpha}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\varepsilon^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^\varepsilon(t))^m \\ &= \exp(-\varepsilon^{-\alpha}) \exp(\varepsilon^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^\varepsilon(t)) \\ &= \exp\left(-\varepsilon^{-\alpha} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^\varepsilon(t)\right)\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Wir schreiben

$$\varepsilon^{-\alpha} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha x^{-(\alpha+1)} dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} -\theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} -(1-\theta) \alpha x^{-(\alpha+1)} dx,$$

denn dann können wir (2.21) einsetzen und die Integrale zusammenfassen. Nun lässt sich (2.24) folgendermaßen umformulieren:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{\hat{s}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t) &= \exp \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Zuletzt betrachten wir den Erwartungswert $\frac{n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n}$ und werden zeigen, dass dieser für $n \rightarrow \infty$ gegen

$$\int_{\varepsilon}^1 x \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} x (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \quad (2.26)$$

konvergiert. Dazu gehen wir ähnlich wie bei der Berechnung des Grenzwertes der charakteristischen Funktion $\varphi_{\frac{\hat{s}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t)$ vor. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n} &= n \mathbb{E} \left[\frac{X_m}{a_n} \mathbb{1}_{\{\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^n \frac{X_m}{a_n} \mathbb{1}_{\{\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m \in K_n(\varepsilon)} \frac{X_m}{a_n} \right], \end{aligned}$$

wobei

$$K_n(\varepsilon) := \{m \leq n \mid \varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\} = I_n(\varepsilon) \setminus I_n(1)$$

gelten soll. Für $|K_n(\varepsilon)| = l$ betrachten wir wieder also eine Summe von l unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen. Auch hier werden wir wieder die Verteilungsfunktion bestimmen.

Für $x \geq \varepsilon$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 1 - G_n^\varepsilon(x) &= P\left(\frac{X_m}{a_n} > x \mid m \in K_n(\varepsilon)\right) \\
 &= P\left(\frac{X_m}{a_n} > x \mid \varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\right) \\
 &= \frac{P(\{\frac{X_m}{a_n} > x\} \cap \{\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\})}{P(\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1)} \\
 &\stackrel{x \geq \varepsilon}{=} \frac{nP(x < \frac{X_m}{a_n} \leq 1)}{nP(\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1)}.
 \end{aligned}$$

Mit den Aussagen (2.12) und (2.13) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - G_n^\varepsilon(x) = \frac{\theta(x^{-\alpha} - 1)}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} \quad \text{für alle } x \geq \varepsilon. \quad (2.27)$$

Für den Fall $x \leq -\varepsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 G_n^\varepsilon(x) &= P\left(\frac{X_m}{a_n} < x \mid m \in K_n(\varepsilon)\right) \\
 &= P\left(\frac{X_m}{a_n} < x \mid \varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\right) \\
 &= \frac{P(\{\frac{X_m}{a_n} < x\} \cap \{\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1\})}{P(\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1)} \\
 &\stackrel{x \leq -\varepsilon}{=} \frac{nP(-1 \leq \frac{X_m}{a_n} < x)}{nP(\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1)}.
 \end{aligned}$$

Mit (2.12) und (2.14) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\varepsilon(x) = \frac{(1 - \theta)(|x|^{-\alpha} - 1)}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} \quad \text{für alle } x \leq -\varepsilon. \quad (2.28)$$

Wir erhalten insbesondere wieder eine Dichte der Grenzverteilung. Diese hat die Form

$$g^\varepsilon(x) = \frac{\theta \alpha x^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} \mathbb{1}_{\{x \geq \varepsilon\}} + \frac{(1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} \mathbb{1}_{\{x \leq -\varepsilon\}}.$$

Sei $\eta_n(\varepsilon)$ der Erwartungswert der Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1$. Dann gilt

$$\eta_n(\varepsilon) \longrightarrow \int_{\varepsilon}^1 x \frac{\theta \alpha x^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} x \frac{(1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} dx =: \eta(\varepsilon) \quad (2.29)$$

für $n \rightarrow \infty$. Dies folgt, da die betrachteten Zufallsvariablen alle durch 1 beschränkt sind.

Schließlich ist $|K_n(\varepsilon)| = |I_n(\varepsilon) \setminus I_n(1)|$ eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p'_n := P(\varepsilon a_n < |X_n| \leq a_n).$$

Für den Erwartungswert ergibt sich daher mit (2.12)

$$\mathbb{E}[|K_n(\varepsilon)|] = np'_n \longrightarrow (\varepsilon^{-\alpha} - 1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ sind nach Voraussetzung unabhängig identisch verteilt, somit auch diese, die $\varepsilon < \frac{|X_m|}{a_n} \leq 1$ erfüllen. Insbesondere sind sie unabhängig von $|K_n(\varepsilon)|$ und integrierbar, da sie beschränkt sind. Mit der Wald'schen Identität (vgl. Satz A.10) folgt

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n} &= \mathbb{E} \left[\sum_{m \in K_n(\varepsilon)} \frac{X_m}{a_n} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{|K_n(\varepsilon)|} \frac{X_m}{a_n} \right] \\ &\stackrel{\text{A.10}}{=} \mathbb{E}[|K_n(\varepsilon)|] \cdot \eta_n(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es gilt also mit Hilfe der Aussagen (2.29) und (2.30)

$$\frac{n\hat{\mu}(\varepsilon)}{a_n} \longrightarrow (\varepsilon^{-\alpha} - 1) \left(\int_{\varepsilon}^1 x \frac{\theta \alpha x^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} x \frac{(1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)}}{\varepsilon^{-\alpha} - 1} dx \right)$$

für $n \rightarrow \infty$ und somit die Behauptung (2.26).

Mit den Aussagen (2.25) und (2.26) können wir nun den Grenzwert der charakteristischen Funktion $\hat{\varphi}_n^\varepsilon$ von $\hat{Z}_n^\varepsilon$ berechnen, wenn n gegen Unendlich läuft. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_n^\varepsilon(t) \longrightarrow & \exp \left(\int_1^\infty (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ & + \int_\varepsilon^1 (e^{itx} - 1 - itx) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \\ & + \int_{-1}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \\ & \left. + \int_{-\infty}^{-1} (e^{itx} - 1) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right) =: \hat{\varphi}^\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Für ein festes $\varepsilon > 0$ und für $0 < \alpha < 2$ existieren alle diese Integrale und folglich existiert eine Zufallsvariable ζ^ε mit zugehöriger charakteristischer Funktion $\hat{\varphi}^\varepsilon$.

Voraussetzung (iii) Es bleibt zu zeigen, dass auch ζ^ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ schwach konvergiert. Wir zeigen dies wieder mit dem Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. Satz A.8). Zu zeigen ist also, dass alle in $\hat{\varphi}^\varepsilon(t)$ auftretenden Integrale für $\varepsilon \rightarrow 0$ existieren. Da die äußeren beiden Integrale von ε unabhängig sind, betrachten wir im Folgenden nur die mittleren beiden Integrale. Wir zeigen die Existenz des ersten Integrals, die des zweiten folgt dann analog. Den Grenzwert des ersten Integrals bestimmen wir mit dem Satz von der majorierten Konvergenz (vgl. Satz A.6). Wir können zunächst die Stetigkeit der Exponentialfunktion ausnutzen und den Grenzwert des Exponenten betrachten sowie den Integranden umschreiben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left(\int_\varepsilon^1 (e^{itx} - 1 - itx) x^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ & = \exp \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (e^{itx} - 1 - itx) x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x > \varepsilon\}} dx \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Für komplexes z mit $|z| < 2$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 |\exp(z) - 1 - z| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\
 &= \left| \frac{z^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2z^{k-2}}{k!} \right| \\
 &\leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2|z|^{k-2}}{k!} \\
 &= \frac{|z|^2}{2} \left(1 + \frac{|z|}{3} + \frac{|z|^2}{12} + \frac{|z|^3}{60} + \dots \right) \quad (2.33) \\
 &\leq \frac{|z|^2}{2} \left(1 + \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{4} + \frac{|z|^3}{8} + \dots \right) \\
 &= \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{2} \right)^k \\
 &\stackrel{|z| < 2}{=} \frac{|z|^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2}}.
 \end{aligned}$$

Für z mit $|z| < 1$ ist daher

$$|\exp(z) - 1 - z| \leq \frac{|z|^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{|z|^2}{2} \cdot 2 = |z|^2$$

erfüllt. Setzen wir $z = itx$ für ein festes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so erhalten wir

$$|e^{itx} - 1 - itx| \leq t^2 x^2 \quad \text{für } |x| < \frac{1}{|t|}.$$

Im Intervall $(0, \frac{1}{|t|})$ können wir den Integranden

$$|(e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x > \varepsilon\}}|$$

daher mit

$$t^2 x^2 x^{-(\alpha+1)} = t^2 x^{-(\alpha-1)}$$

majorisieren. Da der Index α im Intervall $(0, 2)$ liegt, ist der auftretende Exponent $-(\alpha - 1)$ größer als -1 und das Integral über $t^2 x^{-(\alpha-1)}$ existiert.

Wir können daher den Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. Satz A.6) anwenden und erhalten für t mit $\frac{1}{|t|} \geq 1$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x > \varepsilon\}} dx \\ &= \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x > \varepsilon\}} dx \\ &= \int_0^1 (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} dx < \infty. \end{aligned}$$

Im Fall $\frac{1}{|t|} < 1$ können wir zunächst die die Aufspaltung

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^1 (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{|t|}} (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{\frac{1}{|t|}}^1 (e^{itx} - 1 - itx)x^{-(\alpha+1)} dx \end{aligned}$$

betrachten. Wir haben gesehen, dass für jedes feste $\varepsilon > 0$ die Integrale in (2.31) existieren und da $\frac{1}{|t|} > 0$ gilt, existiert insbesondere das zweite Integral dieser Aufspaltung. Für das erste können wir erneut die obige Abschätzung und den Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. Satz A.6) benutzen und erhalten auf diese Weise ebenfalls die Existenz des Integrals. Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx)|x|^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ &= \exp \left(\int_{-1}^0 (e^{itx} - 1 - itx)|x|^{-(\alpha+1)} dx \right) < \infty. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die charakteristische Funktion $\hat{\varphi}^\varepsilon(t)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\varphi}^\varepsilon(t) = \exp & \left(\int_1^\infty (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ & + \int_0^1 (e^{itx} - 1 - itx) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \\ & + \int_{-1}^0 (e^{itx} - 1 - itx) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \\ & \left. + \int_{-\infty}^{-1} (e^{itx} - 1) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right) =: \hat{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion und nach dem Stetigkeitssatz von Lévy (vgl. Satz A.8) existiert dann eine Zufallsvariable Y mit zugehöriger charakteristischer Funktion $\hat{\varphi}(t)$ und es gilt

$$\zeta^\varepsilon \Rightarrow Y \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Da wir nun alle Voraussetzungen für Satz 2.11 gezeigt haben, folgt

$$Z_n \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Zufallsvariable Y tritt also als Grenzwert einer normierten und zentrierten Summe von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen auf und ist somit nach Satz 1.9 stabil. $\square$

Wir haben nun gezeigt, dass sich die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes auf Heavy-tailed-Verteilungen ausweiten lässt. Die Bedingung für die Konvergenz ist in diesem Fall die reguläre Variation der Zufallsvariablen.

Wir werden nun noch sehen, dass für $0 < \alpha < 1$ keine Zentrierung notwendig ist.

Lemma 2.12

Für $\alpha < 1$ können wir in Satz 2.10 die Zentrierungskonstante $b_n = 0$ wählen.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Beweis von Satz 2.10. Für die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 2.11 wird die Zentrierungskonstante b_n von vornherein nicht benötigt. Wir müssen daher nur zeigen, dass für $\alpha < 1$ auch schon die charakteristische Funktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{\hat{s}_n(\varepsilon)}{a_n}}(t) = \exp \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right).$$

in (2.25) für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert. Wir wenden dazu wieder den Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. Satz A.6) an und zeigen

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ &= \exp \left(\int_0^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right), \end{aligned} \tag{2.36}$$

die Aussage folgt für das zweite Integral dann analog. Wir spalten das Integral zunächst auf und erhalten

$$\begin{aligned} & \exp \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right) \\ &= \exp \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{|t|}} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_{\frac{1}{|t|}}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Konvergenz von

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{|t|}} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

die Existenz des zweiten Teils ist klar, da $\frac{1}{|t|} > 0$ erfüllt ist.

Es gelten analog zu (2.33) für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 |\exp(z) - 1| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\
 &= \left| z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} \right| \\
 &\leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{k-1}}{k!} \\
 &\leq |z| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{2} \right)^k \\
 &\stackrel{|z| < 2}{=} |z| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Der zweite Faktor lässt sich auch hier für $|z| < 1$ mit 2 abschätzen, weshalb die Ungleichung

$$|\exp(z) - 1| \leq 2|z| \quad \text{für } |z| < 1$$

erfüllt ist. Setzen wir wieder $z = itx$ für ein festes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so erhalten wir

$$|e^{itx} - 1| \leq 2|tx| \quad \text{für } x < \frac{1}{|t|}. \tag{2.38}$$

Die Integranden können wir im Intervall $(0, \frac{1}{|t|})$ mit

$$2txx^{-(\alpha+1)} = 2tx^{-\alpha}$$

majorisieren. Für $\alpha < 1$ erhalten wir dann einen Exponenten, der größer als -1 ist und somit folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (vgl. Satz A.6) die Aussage (2.36). Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1)(1 - \theta)\alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right) \\
 &= \exp \left(\int_{-\infty}^0 (e^{itx} - 1)(1 - \theta)\alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right).
 \end{aligned}$$

Es folgt daher unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.10

$$\frac{S_n}{a_n} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei die charakteristische Funktion von Y die Form

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(t) = \exp & \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{itx} - 1) \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{itx} - 1) (1 - \theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \right) \end{aligned}$$

besitzt. □

Für die Normierungs- und Zentrierungskonstanten im verallgemeinerten Grenzwertsatz ergibt sich die folgende Situation:

Stabilitätsindex α	Normierungskonstante a_n	Zentrierungskonstante b_n
$0 < \alpha < 1$	$\inf\{x : P(X_1 > x) \leq \frac{1}{n}\}$	0
$1 \leq \alpha < 2$	$\inf\{x : P(X_1 > x) \leq \frac{1}{n}\}$	$n\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{ X_1 \leq a_n\}}]$

Tabelle 2.1: Normierungs- und Zentrierungskonstanten im verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz

Beispiel 2.13

Wir betrachten erneut die Zufallsvariable aus Beispiel 2.6. Wir haben bereits gezeigt, dass $\frac{1}{X}$ regulär mit Index $\alpha = 1$ variiert. Für eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen $\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_2}, \dots$ können wir daher Satz 2.10 anwenden. Um die Normierungskonstanten a_n zu bestimmen, benutzen wir wie in Beispiel 2.6 den Mittelwertsatz (vgl. Satz A.2) und erhalten

$$\begin{aligned} a_n &= \inf \left\{ x : P(|X^{-1}| > x) \leq \frac{1}{n} \right\} \\ &= \inf \left\{ x : 2f(\xi)x^{-1} \geq \frac{1}{n} \quad \text{für ein } \xi \in [0, x^{-1}] \right\} \\ &= \inf \left\{ x : x \geq 2f(\xi)n \quad \text{für ein } \xi \in [0, x^{-1}] \right\}. \end{aligned}$$

Lassen wir n gegen Unendlich laufen, so wird auch x beliebig groß und ξ konvergiert gegen Null. Wir können a_n daher für hinreichend große n mit

$$a_n = 2f(0)n$$

approximieren. Wegen der Symmetrie verschwinden die Zentrierungskonstanten b_n . Insgesamt folgt

$$\frac{1}{2f(0)n} \left(\frac{1}{X_1} + \cdots + \frac{1}{X_n} \right) \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (2.39)$$

wobei Y eine stabile Zufallsvariable mit Index $\alpha = 1$ ist.

2.3 Charakteristische Funktion und Parametrisierung stabiler Verteilungen

Aus dem Beweis von Satz 2.10 geht hervor, dass die charakteristische Funktion des auftretenden schwachen Grenzwertes die in (2.34) angegebene Form hat. Durch einige Umformungen erhalten wir die Darstellung der charakteristischen Funktion allgemeiner stabiler Verteilungen, wie sie unter anderem in [Bre] angegeben wird.

Satz 2.14

Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung mit Index $0 < \alpha < 2$ hat die Form

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) = \exp \bigg(& itc + m_1 \int_0^\infty \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) x^{-(\alpha+1)} dx \\ & + m_2 \int_{-\infty}^0 \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) |x|^{-(\alpha+1)} dx \bigg) \end{aligned}$$

für $c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq m_1, m_2 \leq 2$.

Beweis. Die hier angegebene Form stimmt mit dem Ausdruck in (2.34) überein, falls wir

$$\begin{aligned} c = - \bigg(& \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \theta \alpha x^{-(\alpha+1)} dx \\ & + \int_{-1}^0 \frac{x^3}{1+x^2} (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx + \int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{1+x^2} (1-\theta) \alpha |x|^{-(\alpha+1)} dx \bigg) \end{aligned} \quad (2.40)$$

sowie $m_1 = \theta \alpha$ und $m_2 = (1-\theta) \alpha$ wählen. Da θ im Intervall $[0, 1]$ liegt, ist die Bedingung $0 \leq m_1, m_2 \leq 2$ erfüllt, außerdem ist c von t unabhängig.

Wir müssen jedoch noch zeigen, dass alle in c auftretenden Integrale existieren. Wir beobachten, dass sich die Integranden zusammenfassen lassen, sodass sich

$$c = - \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} \theta \alpha \, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2} + x^\alpha} \theta \alpha \, dx \right. \\ \left. - \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2} + x^\alpha} (1 - \theta) \alpha \, dx - \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} (1 - \theta) \alpha \, dx \right)$$

ergibt. Für $0 < \alpha < 2$ existiert jedes dieser Integrale, also gilt insbesondere auch $c \in \mathbb{R}$.

Der Beweis von Satz 2.10 zeigt nun, dass eine derartige charakteristische Funktion zu einer stabilen Verteilung gehören muss, da sie als Grenzwert einer skalierten Summe unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen auftritt.

Zu zeigen bleibt, dass jede stabile Zufallsvariable eine charakteristische Funktion dieser Form besitzt. Da sich diese Aussage nicht direkt aus Satz 2.10 herleiten lässt, verweisen wir dazu auf [Bre], Theorem 9.27. $\square$

Wir können die in $\varphi_Y(t)$ auftretenden Integrale auch explizit ausrechnen und erhalten dann eine einfachere Form der charakteristischen Funktion.

Lemma 2.15

Es seien β, γ, δ reelle Parameter mit den Eigenschaften $|\beta| < 1$, $\gamma > 0$ und $\delta \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung mit Index $0 < \alpha < 2$ vereinfachen zu

$$\varphi_Y(t) = \exp \left[it\delta - \gamma |t|^\alpha (1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \omega_\alpha(t)) \right], \quad (2.41)$$

wobei die Funktion $\omega_\alpha(t)$ durch

$$\omega_\alpha(t) = \begin{cases} \tan(\pi \frac{\alpha}{2}), & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} \log(|t|), & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Für $\theta \in [0, 1]$ aus Satz 2.10 gilt dabei insbesondere $\beta = 2\theta - 1$.

Beweis. Für den Beweis siehe [Bre], Theorem 9.32. $\square$

Mit dieser expliziten Form der charakteristischen Funktion lassen sich viele Eigenschaften einer stabilen Verteilung bestimmen. Wir können nun auch mehr über den Index α aussagen.

In den Überlegungen haben wir angenommen, dass α im Intervall $(0, 2)$ liegt. Setzen wir jedoch $\alpha = 2$, so wird in (2.41) $\omega_\alpha(t)$ gerade 0 und es ergibt sich

$$\varphi_Y(t) = \exp(it\delta - \gamma t^2),$$

also die charakteristische Funktion der Normalverteilung mit Erwartungswert δ und Varianz 2γ . Diese ist, wie in Beispiel 1.2 gezeigt, ebenfalls stabil. Für $\alpha \geq 2$ lässt sich zeigen, dass eine stabile Zufallsvariable ein endliches zweites Moment besitzen muss (vgl. [Fe], VI.1, Theorem 1) und somit nach dem zentralen Grenzwertsatz schon zum Fall $\alpha = 2$ gehört. Es gilt also allgemein

$$\alpha \in (0, 2].$$

Bemerkung 2.16 (Parametrisierung stabiler Verteilungen)

Lemma 2.15 zeigt, dass jede stabile Verteilung durch die Angabe von vier Parametern eindeutig bestimmt wird: Dem Stabilitäts-Index $\alpha \in (0, 2]$, einem Schiefeparameter β mit $|\beta| < 1$, einem Skalierungsparameter $\gamma \geq 0$ und einem Lageparameter $\delta \in \mathbb{R}$.

Dies rechtfertigt die folgende Parametrisierung:

Notation 2.17

Für eine stabile Zufallsvariable Y mit einer charakteristischen Funktion der Form (2.41) schreiben wir

$$Y \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Abbildung 2.1 zeigt die Verteilungsfunktionen von stabilen Verteilungen mit verschiedenen Parametern.

Sind die Voraussetzungen für Satz 2.10 erfüllt, so können wir aussagen, dass die skalierte Summe gegen eine Zufallsvariable

$$Y \sim \mathcal{S}(\alpha, 2\theta - 1, \gamma, \delta)$$

konvergiert, wobei γ und δ sich aus dem Satz nicht explizit ergeben. In vielen Fällen kann aber zumindest der Lageparameter δ aus den Eigenschaften der Zufallsvariablen hergeleitet werden.

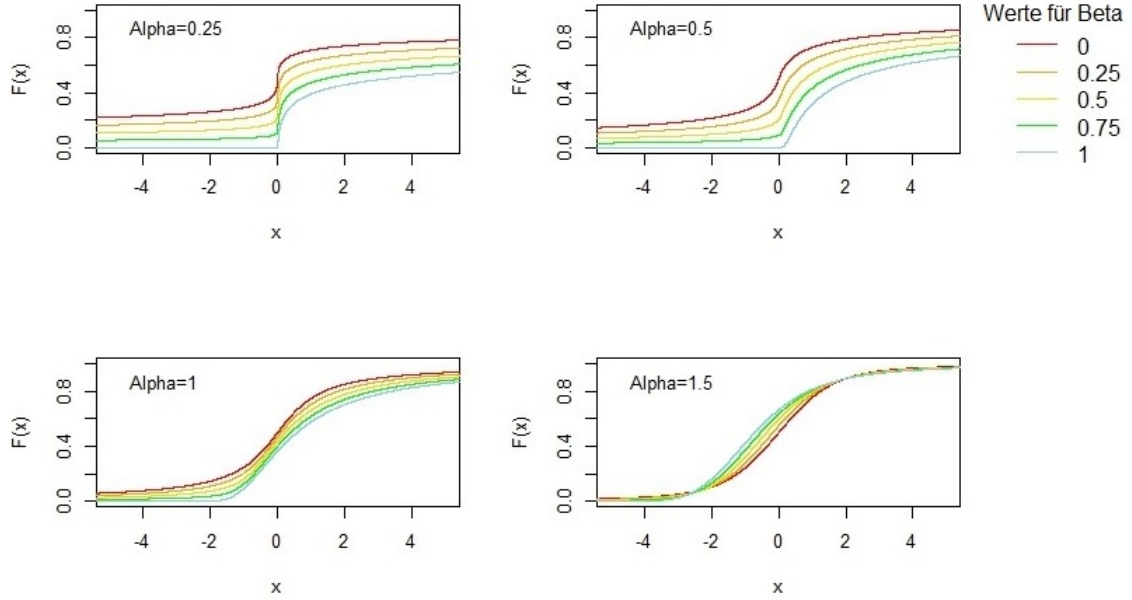


Abbildung 2.1: Verteilungsfunktionen stabiler Verteilungen für Parametrisierungen mit $\alpha \in \{0.25, 0.5, 1, 1.5\}$, $\beta \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, $\gamma = 1$ und $\delta = 0$

Wir betrachten die Parametrisierung der drei Beispiele, die in Kapitel 1 behandelt wurden:

Beispiel 2.18 (Normalverteilung)

Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ hat eine charakteristische Funktion der Form

$$\varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

und ist daher stabil mit Parametern $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\sigma^2}{2}$ und $\delta = \mu$. Es gilt also

$$X \sim \mathcal{S}(2, 0, \frac{\sigma^2}{2}, \mu).$$

Beispiel 2.19 (Cauchy-Verteilung)

Eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{C}(a, b)$ hat eine charakteristische Funktion der Form

$$\varphi_X(t) = \exp(itb - a|t|)$$

und ist somit stabil mit Parametern $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = a$ und $\delta = b$, also

$$X \sim \mathcal{S}(1, 0, a, b).$$

Beispiel 2.20 (Lévy-Verteilung)

In Kapitel 1 haben wir den Beweis der Stabilität einer Lévy-verteilten Zufallsvariable $X \sim \text{Levy}(\mu, c)$ übersprungen. Wir zeigen dies nun, indem wir, wie gerade schon gesehen, die charakteristische Funktion betrachten. Es gilt

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \sqrt{-2itc}\right) = \exp\left(i\mu t - |ct|^{\frac{1}{2}}(1 - \text{sgn}(t))\right),$$

daher sind die Stabilitätsparameter durch $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = |c|^{\frac{1}{2}}$ und $\delta = \mu$ gegeben. Es gilt also

$$X \sim \mathcal{S}\left(\frac{1}{2}, 1, |c|^{\frac{1}{2}}, \mu\right).$$

Wir können den Grenzwert der Zufallsvariablen aus Beispiel 2.6 nun noch genauer bestimmen als in (2.39).

Beispiel 2.21

Die stabile Zufallsvariable Y aus (2.39) hat den Stabilitäts-Index $\alpha = 1$. Außerdem ergibt sich wegen $\theta = \frac{1}{2}$ auch $\beta = 2^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$. Die Zufallsvariable Y ist daher Cauchy-verteilt, also gilt

$$\frac{1}{2f(0)n} \left(\frac{1}{X_1} + \cdots + \frac{1}{X_n} \right) \Rightarrow \mathcal{C}(a, b).$$

Kapitel 3

Simulationen

Wir wollen im Folgenden die Konvergenz zweier Heavy-tailed-Verteilungen gegen eine stabile Verteilung simulieren. Für die Plots in diesem Kapitel wurde das Softwarepaket **R** verwendet. Die stabilen Verteilungsfunktionen wurden mit dem Paket **stabledist** bestimmt. Für detailliertere Angaben zur Anwendung dieses Paketes sei auf Bemerkung A.13 verwiesen.

3.1 Student'sche t-Verteilung

Eine stetige Zufallsvariable X genügt der studentschen t-Verteilung mit n Freiheitsgraden, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$ besitzt. Dabei ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

die *Gamma-Funktion*. Für eine t-verteilte Zufallsvariable X mit n Freiheitsgraden schreiben wir $X \sim t_n$.

Die Varianz einer t-Verteilung existiert nur für mehr als zwei Freiheitsgrade. Für eine Verteilung mit einem Freiheitsgrad ergibt sich gerade die Dichte der Cauchy-Verteilung. Wir wollen den verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz für eine student'sche t-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden anwenden.

Die Dichte hat in diesem Fall die Form

$$f(x) = (2(1 + x^2))^{-3/2}.$$

Das zweite Moment einer t_2 -verteilten Zufallsvariablen existiert nicht. Wir überprüfen die beiden Voraussetzungen für Satz 2.10.

Aufgrund der Symmetrie einer t-Verteilung ergibt sich

$$\theta = \frac{1}{2}.$$

Zu zeigen bleibt die reguläre Variation der Tailfunktion. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(|X| > x) &= 2 \int_x^\infty f(y) dy = 2 \int_x^\infty (2(1 + y^2))^{-3/2} dy \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > tx)}{P(|X| > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{tx}{\sqrt{t^2 x^2 + 2}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}.$$

Da beide Quotienten gegen Null konvergieren, können wir die Regel von l'Hospital (vgl. Satz A.11) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > tx)}{P(|X| > x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} t \frac{(x^2 + 2)^{3/2}}{(t^2 x^2 + 2)^{3/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{t^3} \frac{(x^2 + 2)^{3/2}}{(x^2 + \frac{2}{t^2})^{3/2}} \\ &= \frac{t}{t^3} = t^{-2}. \end{aligned}$$

Somit ist die Tailfunktion regulär variierend mit Index 2.

Seien also $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch t_2 -verteilte Zufallsvariablen. Dann können wir Satz 2.10 anwenden. Als Normierungskonstante erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= \inf \left\{ x : P(|X_1| > x) \leq \frac{1}{n} \right\} \\ &= \inf \left\{ x : 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \leq \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Wir können den Ausdruck für $n > 1$ genauer bestimmen, denn es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \leq \frac{1}{n} \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{x^2 + 2} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{2}{x^2} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 - 1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{2}{x^2} \leq \frac{2n-1}{n^2 - 2n + 1} \\
 \Leftrightarrow & x \geq \sqrt{\frac{2n^2 - 4n + 2}{2n - 1}}.
 \end{aligned}$$

Daher folgt

$$a_n = \inf \left\{ x : 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \leq \frac{1}{n} \right\} = \sqrt{\frac{2n^2 - 4n + 2}{2n - 1}} \quad \text{für } n > 1.$$

Wir setzen außerdem $a_1 = 1$.

Als Zentrierungskonstante ergibt sich aufgrund der Symmetrie

$$b_n := n\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}}] = 0.$$

Somit existiert eine nicht entartete, stabile Zufallsvariable Y , mit der Eigenschaft

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} = S_n \cdot \left(\sqrt{\frac{2n^2 - 4n + 2}{2n - 1}} \right)^{-1} \Rightarrow Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Satz 2.10 gilt dann

$$Y \sim \mathcal{S}(2, 0, \gamma, \delta),$$

also ist Y normalverteilt. Wegen der Symmetrie um Null ist auch der Erwartungswert der Grenzverteilung durch $\delta = 0$ gegeben.

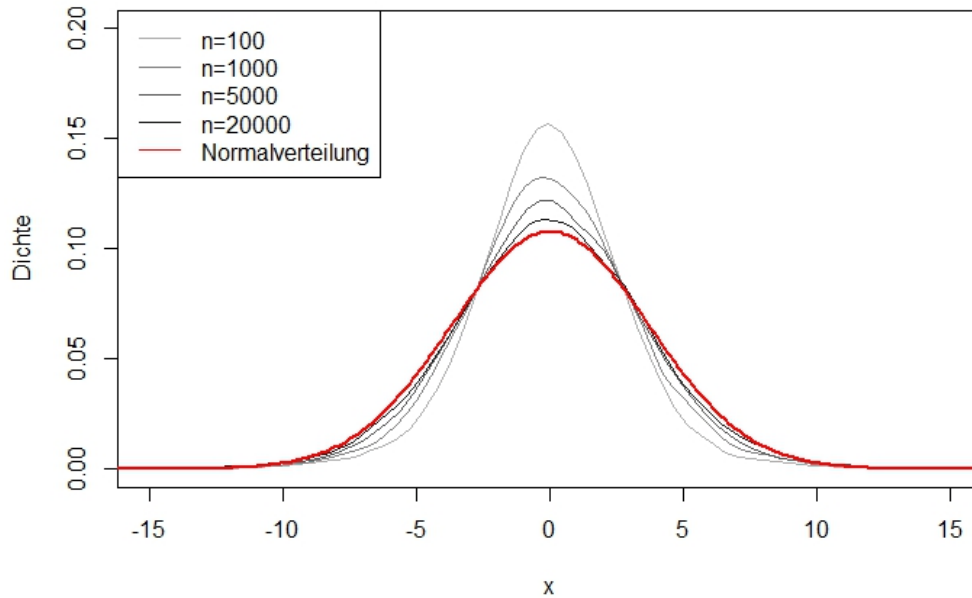


Abbildung 3.1: Dichtefunktionen normierter Summen mit n unabhängig und identisch t_2 -verteilten Summanden für $n \in \{100, 1000, 5000, 20000\}$ auf Grundlage von 20000 Realisierungen sowie die Dichtefunktion einer Normalverteilung ($\mu = 0, \sigma = 3,7$)

Um die Konvergenz zu veranschaulichen, werden wir die empirischen Dichten der normierten Summen von Realisierungen t_2 -verteilter Zufallsvariablen betrachten. In Abbildung 3.1 sind die Dichten für die Werte $n = 100, 1000, 5000$ und 20000 dargestellt. Zum Vergleich wurde in rot eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 hinzugefügt. Für die Standardabweichung wurde $\sigma = 3,7$ gewählt. Es ist anzumerken, dass sich dieser Wert nicht direkt bestimmen lässt und nur grob an die anderen Dichten angepasst wurde.

3.2 Pareto-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt Pareto-verteilt, falls sie die Dichte

$$f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{(k+x)^{\alpha+1}} \quad \text{für } x \geq k$$

für strikt positive Parameter k und α besitzt. Der Parameter k beschreibt dabei eine untere Schranke der Verteilung. Für eine Pareto-verteilte Zufallsvariable X schreiben wir $X \sim \text{Par}(k, \alpha)$. Die Verteilungsfunktion ist durch

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$$

gegeben.

Wir prüfen wieder die Voraussetzungen für den verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz. Dazu müssen wir zeigen, dass eine Pareto-verteilte Zufallsvariable auch regulär variierend ist. Da die Verteilung nur auf der positiven Halbachse definiert ist, ergibt sich

$$\theta = \frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} = 1.$$

Außerdem ist die Tailfunktion regulär variierend mit Index α , denn es gilt

$$P(|X| > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \frac{P(|X| > tx)}{P(|X| > x)} &= \left(\frac{k}{tx}\right)^\alpha \left(\frac{x}{k}\right)^\alpha \\ &= t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Für $\alpha < 2$ können wir also Satz 2.10 anwenden. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \inf \left\{ x : P(|X_1| > x) \leq \frac{1}{n} \right\} \\ &= \inf \left\{ x : \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha \leq \frac{1}{n} \right\} \\ &= \inf \left\{ x : x \geq k \sqrt[\alpha]{n} \right\} \\ &= k \sqrt[\alpha]{n}. \end{aligned}$$

Für die Simulation betrachten wir eine Pareto-Verteilung mit den Parametern $k = 1$ und $\alpha = 3/4$. Seien also $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch $\text{Par}(1, \frac{3}{4})$ -verteilte Zufallsvariablen.

Wegen Lemma 2.12 können wir die Zentrierungskonstante $b_n = 0$ wählen. Somit folgt insgesamt

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} = \frac{S_n}{n^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow Y \sim \mathcal{S}(\frac{3}{4}, 1, \gamma, \delta) \quad (3.1)$$

Für die Bestimmung der fehlenden zwei Parameter verweisen wir auf Proposition 3 aus [Fu]. Es zeigt sich, dass im Fall $\alpha < 1$ der Lageparameter $\delta = 0$ gewählt werden kann und dass der Skalierungsparameter durch

$$\gamma = k \left(\Gamma(1 - \alpha) \cos \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right)$$

gegeben ist. Für die Parameter $k = 1$ und $\alpha = \frac{3}{4}$ ergibt sich der Wert

$$\gamma \approx 1,38746.$$

Abbildung 3.2 zeigt die Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion von $n^{-\frac{4}{3}}S_n$ gegen Y . Abgebildet sind die Verteilungsfunktionen für die Werte $n = 100, 1000, 5000$ und 20000 .

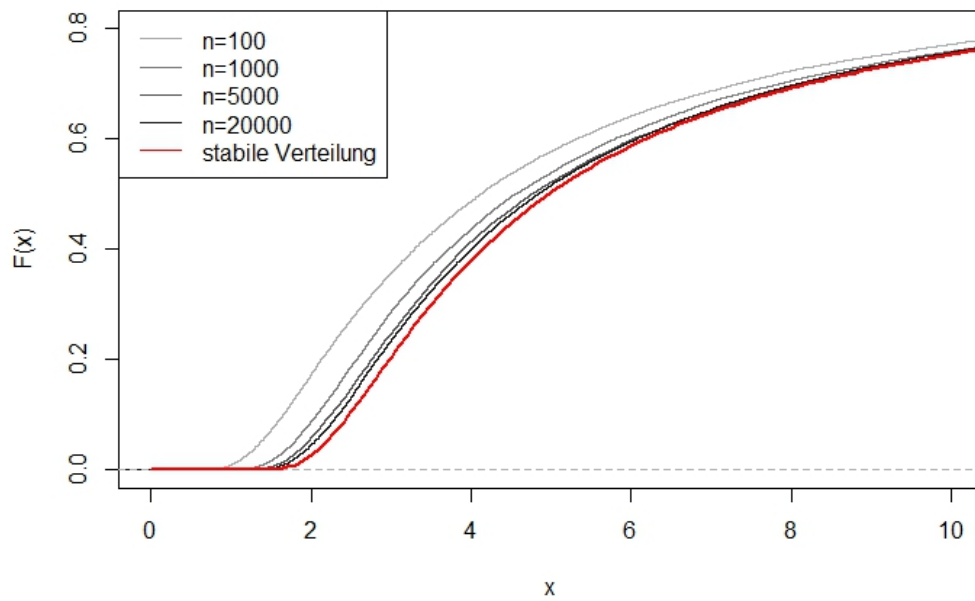


Abbildung 3.2: empirische Verteilungsfunktionen normierter Summen mit n unabhängig und identisch $\text{Par}(1, \frac{3}{4})$ -verteilten Summanden für $n \in \{100, 1000, 5000, 20000\}$ auf Grundlage von 20000 Realisierungen sowie die Verteilungsfunktion der stabilen Grenzverteilung $Y \sim \mathcal{S}(0.75, 0, 1.38746, 0)$

Anhang A

Grundlegende Aussagen

Hier sollen kurz die grundlegenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen aufgeführt werden, die in Kapitel 1 bis 3 verwendet wurden. Da die Ergebnisse nicht alle sinnvoll zusammenhängen, sind sie der Übersicht halber in der Reihenfolge aufgelistet, in der sie auch in der Arbeit auftauchen.

Es sei im Folgenden immer ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gegeben und alle Zufallsvariablen seien messbare Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$.

Satz A.1 (Convergence of Types Theorem)

Seien W und W_n Zufallsvariablen und gelte $W_n \Rightarrow W$ für $n \rightarrow \infty$. Es seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $\alpha_n > 0$ und β_n gegeben, sodass

$$W'_n = \alpha_n W_n + \beta_n \Rightarrow W'$$

für nicht entartete Zufallsvariablen W und W' erfüllt ist. Dann konvergieren auch α_n und β_n gegen Konstanten α und β .

Beweis. Siehe [Du], Theorem 3.7.5. □

Satz A.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

gilt.

Beweis. Siehe [Fo], § 18, Satz 7. □

Satz A.3 (Auszug aus dem Portmanteau-Theorem)

Es seien X_n und X Zufallsvariablen. Dann gilt

$$X_n \Rightarrow X$$

genau dann, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$$

für alle abgeschlossenen Mengen F erfüllt ist.

Beweis. Siehe [Bill2], Theorem 2.1. □

Satz A.4 (Markov Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable und $\delta > 0$. Dann gilt

$$P(|X| > \delta) \leq \frac{1}{\delta^k} \mathbb{E}[|X|^k]$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Siehe [Kle], Satz 5.11. □

Satz A.5 (Berechnung des Erwartungswertes)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable, $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton wachsend, stetig, auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar und mit $\Phi(0) = 0$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}[\Phi(X) \mathbb{1}_A] = \int_A \Phi(X) dP = \int_0^\infty \Phi'(t) P(\{X \geq t\} \cap A) dt.$$

Beweis. Siehe [Al], Satz A.1.1. □

Satz A.6 (Majorisierte Konvergenz)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen mit $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere μ -fast-überall gegen eine $\mathcal{A}$ -messbare Funktion f . Falls eine reellwertige, integrierbare, nicht-negative Funktion g , mit der Eigenschaft

$$|f_n| \leq g, \quad \text{für alle } n \geq 1$$

existiert, dann sind f_n, f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu_n = \int f d\mu.$$

Beweis. Siehe [Du], Theorem 1.5.6. □

Insbesondere gilt bei Betrachtung des messbaren Raums $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mit dem Zählmaß ν , für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ die Gleichheit

$$\int_{\mathbb{N}} f d\nu = \sum_{x=1}^{\infty} f(x).$$

Für Summen ergibt sich daher die folgende Version der majorisierten Konvergenz:

Korollar A.7 (Majorisierte Konvergenz für Summen)

Sei (f_n) eine Folge mit $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ und es gelte für alle $m \in \mathbb{N}$ die Konvergenz

$$f_n(m) \rightarrow f(m) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Existiert eine nicht-negative Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

$$|f_n| \leq g, \quad \text{für alle } n \geq 1$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} g(m) < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_n(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m) < \infty.$$

Satz A.8 (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sind μ_n, μ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$ mit charakteristischen Funktionen $\varphi_{\mu_n} =: \varphi_n$ und $\varphi_{\mu} =: \varphi$. Dann sind äquivalent:

i) $\mu_n \Rightarrow \mu$

ii) $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ und für alle } t \in \mathbb{R}^d.$

Beweis. Siehe [Du], Theorem 3.3.6. □

Satz A.9 (Poisson-Konvergenz)

Sei $(X_{n,m})_{n \geq 1, 1 \leq m \leq n}$ ein Dreiecksschema mit folgenden Eigenschaften:

- i) Für alle n sind $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ unabhängig.
- ii) $P(X_{n,m} = 1) = 1 - P(X_{n,m} = 0) =: p_{n,m}$.
- iii) $\sum_{m=1}^n p_{n,m} \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ für $n \rightarrow \infty$.
- iv) $\max_{m=1, \dots, n} p_{n,m} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Dann gilt

$$S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n} \Rightarrow Z \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Beweis. Siehe [Du], Theorem 3.6.1. □

Die Notation $Z \sim \text{Poi}(\lambda)$ steht hier kurz für eine Poisson-Verteilung mit Erwartungswert λ , genauer

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Satz A.10 (Wald'sche Identität)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte und integrierbare Zufallsvariablen und T_n für $n \in \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable mit Werten in der Menge $\{0, \dots, n\}$. Die Zufallsvariablen X_i und T_n seien unabhängig für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$S_{T_n} := \sum_{i=1}^{T_n} X_i.$$

Dann gilt $S_{T_n} \in \mathcal{L}^1$ und

$$\mathbb{E}[S_{T_n}] = \mathbb{E}[T_n] \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

Beweis. Siehe [Kle], Satz 5.5. □

Satz A.11 (Regel von l'Hospital)

Seien $I = (a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen auf I . Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ erfüllt ist, dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Siehe [Fo], § 16, Satz 10. □

Anmerkungen

Bemerkung A.12 (Abschätzung)

Da nach (2.22) np_n für $n \rightarrow \infty$ gegen $\varepsilon^{-\alpha}$ konvergiert, können wir für alle $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$np_n \in \{x : |x - \varepsilon^{-\alpha}| < \delta\}$$

für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Insbesondere können wir dann immer eine Konstante C_δ finden, die

$$np_n \leq C_\delta \quad \text{für alle } n \geq N$$

erfüllt. Da p_n als Wahrscheinlichkeit stets kleiner als 1 ist, gilt für den Fall $n < N$ die Abschätzung $np_n \leq n < N$. Insgesamt können wir dann alle Folgenglieder mit

$$C := \max\{C_\delta, N\}$$

majorisieren.

Bemerkung A.13 (Simulation)

Das **R**-Paket **stabledist** ermöglicht verschiedene Formen der Parametrisierung stabiler Verteilungen. Eine Verteilungsfunktion kann mit der Funktion **pstable** erzeugt werden, eine Dichte mit der Funktion **dstable**. Um eine größtmögliche Übereinstimmung mit der in dieser Arbeit angegebenen Parametrisierung zu erhalten, ist dabei das Argument **pm** = 1 zu wählen. Der Skalierungsparameter unterscheidet sich dann trotzdem von dem hier verwendeten. Für eine stabile Zufallsvariable

$$X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

muss

$$\text{alpha} = \alpha, \text{beta} = \beta, \text{gamma} = \gamma^\alpha \text{ und } \text{delta} = \delta$$

gesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- [Du] Durrett, R.: *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 2010
- [Bre] Breiman, L.: *Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992
- [Fe] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications - Volume II*. John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage, 1966
- [No] Nolan, J.: *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, 2015;
Anmerkung: In Arbeit,
Kapitel 1: <http://academic2.american.edu/~jpnolan>
- [Kle] Klenke, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 3. Auflage, 2013
- [Bill1] Billingsley, P.: *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc., 3. Auflage, 1995
- [Bill2] Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage, 1999
- [Fu] Fuller, H.: *Über die Konvergenz normierter und zentrierter Summen von Zufallsvariablen und ihre Auswirkungen auf die Risikomessung*. www.math.ethz.ch/~hjfurrer/publications/NormalisedSums.pdf, 2012
- [Al] Alsmeyer, G.: *Erneuerungstheorie: Analyse stochastischer Regenerationsschemata*. Springer, 1991
- [Fo] Forster, O.: *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer Spektrum, 11. Auflage, 2013

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit eigenständig verfasst habe. Ich habe mich keiner anderen als der von mir ausgewiesenen Quellen und Hilfsmittel bedient. Diese Arbeit habe ich in vorliegender oder ähnlicher Form noch nie zu Prüfungszwecken vorgelegt.

Marburg, den 02. September 2015

(Ann-Kristin Becker, Verfasserin)