



# **Nichtparametrische Schätzung in multivariaten Archimedischen Copulas**

**Diplomarbeit**

Vorgelegt von: Johannes Berens  
Betreuer: Prof. Dr. Hajo Holzmann  
Datum: 11. Juli 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Multivariate Copulas . . . . .	4
2.2	Multivariate Archimedische Copulas . . . . .	5
2.3	Charakterisierung multivariater Archimedischer Copulas . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Konstruktion eines Schätzers einer Archimedischen Copula</b>	<b>11</b>
3.1	Die Kendall Verteilung . . . . .	12
3.2	Konstruktion von Pseudobeobachtungen der Radialvariable . . . . .	17
3.3	Der Schätzer . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Konsistenz des Schätzers</b>	<b>25</b>
4.1	Identifizierbarkeit . . . . .	25
4.2	Konvergenz von Archimedischen Copulas . . . . .	27
4.3	Weitere Vorüberlegungen . . . . .	29
4.4	Die Konsistenzaussage . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Simulation</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>60</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>61</b>

# 1 Einleitung

Im Verlaufe der letzten 20 Jahre ist das Interesse an Copulas stark gestiegen. Um zu verstehen, warum sich Copulas gerade heute einer so großen Beliebtheit erfreuen, befassen wir uns zunächst mit der naheliegenden Frage, was eine Copula eigentlich ist. Auf der einen Seite ist sie eine Verteilungsfunktion, deren 1-dimensionale Randverteilungen Gleichverteilungen auf dem Einheitsintervall sind. Auf der anderen Seite können wir sie als eine Funktion beschreiben, die eine multivariate Verteilungsfunktion mit ihren 1-dimensionalen Randverteilungen verbindet. Diese Formulierung geht auf Sklar (1959) zurück und ist heute als Satz von Sklar bekannt. Eine Copula ermöglicht demnach die Zerlegung einer multivariaten Verteilungsfunktion in ihre Randverteilungen und ihre Abhängigkeitsstruktur.

Gerade im heutigen Finanzwesen spielt die Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen eine entscheidende Rolle. So ist es zum Beispiel im quantitativen Risikomanagement wichtig, nicht nur zu wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit einzelne Ereignisse eintreten, sondern vor allem mit welcher Wahrscheinlichkeit sie gemeinsam auftreten. Dabei ist insbesondere das gleichzeitige Auftreten von seltenen, aber extremen Ereignissen von Interesse, da diese zu hohen Verlusten und schlimmstenfalls zur Insolvenz eines Unternehmens führen können.

Um Abhängigkeitsstrukturen zu untersuchen, wird häufig auf skalare Abhängigkeitsmaße zurückgegriffen. Ein gängiges Instrument ist der Korrelationskoeffizient nach Pearson. Dieser besitzt allerdings einige Nachteile, auf die zum Beispiel in McNeil, Frey und Embrechts (2005) näher eingegangen wird. In diesem Zusammenhang ist die Annahme, dass dieser Korrelationskoeffizient in Verbindung mit 1-dimensionalen Randverteilungen die gemeinsame Verteilung eindeutig bestimmt, ein häufiger Trugschluss. Die Aussage ist nur für elliptische Verteilungen richtig, zu denen beispielsweise die multivariate Normalverteilung gehört. Empirische Studien in der Finanz- und Versicherungswirtschaft haben jedoch gezeigt, dass die Verteilungen der realen Welt oft nicht zu dieser Klasse gehören (s. Embrechts, McNeil und Straumann (2002)). Dieser Irrtum kann daher insbesondere zu einer falschen Modellierung von Extremwerten führen und somit fatale Folgen nach sich ziehen. Eine detaillierte Illustration dieses Sachverhalts findet sich in Donnelly und Embrechts (2010, Kapitel 4.2). Ein weiterer Irrtum ist, dass sich zu jedem Korrelationskoeffizienten und allen 1-dimensionalen Verteilungsfunktionen stets eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit gerade diesen Randverteilungen und diesem Korrelationskoeffizienten konstruieren

ren lässt. Auch hier gilt die Aussage wieder nur für elliptische Verteilungen. Um diese und weitere Probleme zu umgehen, bietet sich als Alternative die Verwendung von Copulas an.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Klasse der Archimedischen Copulas. Archimedische Copulas werden von sogenannten Archimedischen Erzeugern konstruiert, auf die sich viele ihrer Eigenschaften zurückführen lassen. Archimedische Copulas besitzen viele nützliche Eigenschaften, können leicht konstruiert werden und es gibt mittlerweile eine große Auswahl an unterschiedlichen Familien (s. Nelsen (2006)). Diese Gründe haben zu einer weiten Verbreitung dieser Klasse geführt.

Offensichtlich ist eine geeignete Wahl der Copula von entscheidender Bedeutung. Vor diesem Hintergrund ist es daher von Interesse, anhand gegebener Daten einer multivariaten Verteilungsfunktion einen sinnvollen Schätzer der zugrunde liegenden Copula zu konstruieren. Genau an dieser Stelle setzen wir in dieser Arbeit an. Unter der Annahme, dass den Daten eine Archimedische Copula zugrunde liegt, befassen wir uns mit einem von Genest, Nešlehová und Ziegel (2011) hergeleiteten nichtparametrischen Schätzer der Archimedischen Copula, der die Kenntniss der Randverteilungen nicht voraussetzt. Gerade im Risikomanagement ist es in der Regel einfacher, Aussagen über die Randverteilungen als über deren Abhängigkeitsstruktur zu treffen, weswegen für die Randverteilungen bereits weit entwickelte Modelle existieren. Diese können mit dem Schätzer der Archimedischen Copula kombiniert werden, um eine gemeinsame Verteilungsfunktion zur Modellierung der Daten zu konstruieren.

Neben der erwähnten Anwendung im Risikomanagement, beispielsweise in der Modellierung des Kreditausfallrisikos (s. McNeil et al. (2005)), finden Copulas auch in der Biostatistik (s. Oakes (1989)), im Versicherungswesen (s. Frees und Valdez (1998)) und im Finanzwesen, zum Beispiel in der Bewertung von Optionen (s. Cherubini, Luciano und Vecchiato (2004)), Verwendung.

Wir beschäftigen uns zunächst in Kapitel 2 mit einigen theoretischen Grundlagen von Archimedischen Copulas. Weiter erläutern wir eine erst kürzlich von McNeil und Nešlehová (2009) hergeleitete Charakterisierung Archimedischer Copulas anhand von Überlebenscopulas von Simplexverteilungen, deren Radialvariablen an der Stelle 0 keine Masse haben.

In Kapitel 3 rekonstruieren wir mit Hilfe der Kendall Verteilungsfunktion die Radialvariable und leiten damit zunächst einen nichtparametrischen Schätzer eines Archimedischen Erzeugers her, um darauf aufbauend einen nichtparametrischen Schätzer der Archimedischen Copula zu konstruieren.

Im nächsten Kapitel stellen wir zunächst dar, dass eine Archimedische Copula im 2- und 3-dimensionalen Fall eindeutig durch ihre Kendall Verteilungsfunktion bestimmt wird. Mit

Hilfe einiger folgenden Resultate ist es uns dann möglich, die Konsistenz unseres Schätzers in diesen Fällen zu zeigen.

Schließlich überprüfen wir in Kapitel 5 die Güte unseres Schätzers für eine endliche Anzahl an Beobachtungen und geben in Kapitel 6 einen kurzen Ausblick auf weitere Fragestellungen.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Multivariate Copulas

Wie wir bereits in der Einleitung erwähnt haben, können wir eine Copula als eine Verteilungsfunktion beschreiben, deren 1-dimensionale Randverteilungen Gleichverteilungen auf dem Einheitsintervall sind. Wir definieren zunächst die  $d$ -te Ordnungsdifferenz und die Quasi-Monotonie, um den Begriff der Copula präzise einführen zu können.

**Definition 2.1** ( $d$ -te Ordnungsdifferenz). *Seien  $f$  eine  $d$ -dimensionale reelle Funktion,  $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$  und  $h = (h_1, \dots, h_d)^T \in \mathbb{R}^d$  mit  $h_i > 0$  für  $i = 1, \dots, d$ . Dann ist die  $d$ -te Ordnungsdifferenz  $\Delta_h f$  definiert durch*

$$\Delta_h f(x) = \Delta_{h_d}^d \dots \Delta_{h_1}^1 f(x),$$

wobei  $\Delta_{h_i}^i$  der Differenzoperator erster Ordnung ist, definiert durch

$$\Delta_{h_i}^i f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

**Definition 2.2** (quasi-monoton /  $d$ -steigend). *Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^d$ , heißt quasi-monoton /  $d$ -steigend auf  $A$ , falls für alle  $x$  und  $h$ , für die alle Ecken von  $(x, x + h]$  in  $A$  liegen,  $\Delta_h f(x) \geq 0$  gilt.*

**Definition 2.3** (Copula). *Eine  $d$ -dimensionale Copula ist eine Funktion  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ , falls  $u_i = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$ .
- (ii)  $C(u_1, \dots, u_d) = u_i$ , falls  $u_j = 1$  für alle  $j \neq i$ .
- (iii)  $C$  ist quasi-monoton auf  $[0, 1]^d$ .

Ein Beispiel für eine  $d$ -dimensionale Copula ist die obere Fréchet Hoeffding Grenze, definiert durch

$$M^d(u) = \min\{u_1, \dots, u_d\}, \quad u \in [0, 1]^d.$$

Ein zentrales Resultat ist der Satz von Sklar (s. Sklar (1959)). Einerseits besagt er, dass zu jeder multivariaten Verteilungsfunktion eine Copula existiert, die die multivariate Verteilungsfunktion mit ihren 1-dimensionalen Randverteilungen verbindet. Andererseits besagt er, dass Copulas benutzt werden können, um zusammen mit 1-dimensionalen Verteilungsfunktionen multivariate Verteilungsfunktionen zu konstruieren.

**Satz 2.4** (Satz von Sklar). *Sei  $H$  eine  $d$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt*

$$H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (2.1.1)$$

Weiterhin ist  $C$  auf  $D := \text{Bild}(F_1) \times \dots \times \text{Bild}(F_d)$  eindeutig bestimmt und für alle  $u \in D$  gilt

$$C(u) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)),$$

wobei  $F_i^{-1}(u_i) = \inf\{x : F_i(x) \geq u_i\}$  für  $i = 1, \dots, d$ .

Im umgekehrten Fall, wenn wir eine Copula  $C$  und 1-dimensionale Verteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  haben, dann ist die durch (2.1.1) definierte Funktion  $H$  eine  $d$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ .

Wir verzichten hier auf einen Beweis des Satzes und verweisen auf Schweizer und Sklar (1983, Theorem 6.2.4).

**Bemerkung.** Falls die Randverteilungen stetig sind, ist die Copula offensichtlich eindeutig bestimmt.

Für einen Zufallsvektor  $X$  mit Verteilungsfunktion  $H$  ist die Überlebensfunktion von  $X$  definiert durch  $\bar{H}(x) = P(X > x)$  für  $x \in \mathbb{R}^d$ . Der Satz von Sklar lässt sich in analoger Weise auch für  $\bar{H}$  formulieren. Die zugehörige Copula bezeichnen wir dann als Überlebenscopula.

## 2.2 Multivariate Archimedische Copulas

Archimedische Copulas sind eine weitverbreitete Klasse von Copulas, die wir über den Begriff des Archimedischen Erzeugers einführen.

**Definition 2.5** (Archimedischer Erzeuger). *Eine monoton fallende und stetige Funktion  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , die  $\psi(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$  erfüllt und streng monoton fallend auf  $[0, \inf\{x : \psi(x) = 0\})$  ist, bezeichnen wir als einen Archimedischen Erzeuger. Wir setzen  $\psi(\infty) = 0$  und für die Inverse  $\phi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  setzen wir  $\phi(0) = \inf\{x : \psi(x) = 0\}$ .*

**Bemerkung.** Die Inverse ist stetig und streng monoton fallend auf  $[0, 1]$  und ihr Bild hängt von  $x_r := \inf\{x : \psi(x) = 0\}$  ab. Falls  $x_r < \infty$ , dann ist  $\psi$  streng monoton fallend auf  $[0, x_r]$  und wegen der Stetigkeit ist  $\psi$  eingeschränkt auf  $[0, x_r]$  bijektiv und bildet wegen  $\psi(0) = 1$  und  $\psi(x_r) = 0$  auf  $[0, 1]$  ab. Folglich existiert die Inverse  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, x_r]$  und ist stetig und streng monoton fallend auf  $[0, 1]$ . Falls  $x_r = \infty$ , dann ist  $\psi$  streng monoton fallend auf  $[0, \infty)$ . In diesem Fall ist jedoch der Wert 0 kein Element des Bildes von  $\psi$ , weswegen nur  $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$  bijektiv ist und somit die Inverse  $\phi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  existiert. Aus diesem Grund fordern wir in der Definition zusätzlich die Konventionen  $\phi(0) = \inf\{x : \psi(x) = 0\}$  und  $\psi(\infty) = 0$ , damit die Inverse stetig und streng monoton fallend auf  $[0, 1]$  ist.

**Definition 2.6** (Archimedische Copula). *Eine  $d$ -dimensionale Copula  $C$  nennen wir Archimedisch, falls sie die Darstellung*

$$C(u) = \psi(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)), \quad u \in [0, 1]^d, \quad (2.2.1)$$

für einen Archimedischen Erzeuger  $\psi$  erlaubt. In diesem Fall benutzen wir im Folgenden in der Regel die Notation  $C_{\psi, d}$ .

Der Name Archimedischer Erzeuger könnte zu der Vermutung führen, dass dieser mit Hilfe der Darstellung (2.2.1) immer eine Archimedische Copula erzeugt. Tatsächlich erfüllt (2.2.1) aber nur die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.3. Dies sehen wir wie folgt ein. Falls  $u_i = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  ist, dann ist  $\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d) \geq \inf\{u : \psi(u) = 0\}$  und somit ist  $\psi(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)) = 0$  aufgrund der Monotonie von  $\psi$ . Falls  $u_j = 1$  für alle  $i \neq j$  ist, dann folgt  $\psi(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)) = \psi(\phi(u_i)) = u_i$ . Die Eigenschaft (iii) kann jedoch verletzt sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 2.7.** Sei  $\psi$  eine Funktion auf  $[0, \infty)$ , gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x \in [0, 1/2], \\ 3/2 - 2x & , \quad x \in (1/2, 3/4), \\ 0 & , \quad x \in [3/4, \infty). \end{cases}$$

Offensichtlich ist  $\psi$  ein Archimedischer Erzeuger. Für den Fall  $d = 2$  ist (2.2.1) jedoch nicht quasi-monoton, weil für das Rechteck  $[\frac{11}{16}, \frac{13}{16}]^2$  gilt

$$\Delta_{(\frac{2}{16}, \frac{2}{16})} \psi \left( \phi \left( \frac{11}{16} \right) + \phi \left( \frac{11}{16} \right) \right) = -\frac{1}{8} \not\geq 0.$$

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen ein Archimedischer Erzeuger via (2.2.1) eine Archimedische Copula erzeugt. Schweizer und Sklar (1983) haben für

den bivariaten Fall gezeigt, dass ein Archimedischer Erzeuger genau dann eine Copula anhand der Darstellung (2.2.1) erzeugt, wenn er konvex ist. Die Bedingung der Konvexität ist jedoch in höheren Dimensionen nicht mehr hinreichend. Kimberling (1974) konnte beweisen, dass ein Archimedischer Erzeuger genau dann eine Copula anhand der Darstellung (2.2.1) in allen Dimensionen erzeugt, wenn er eine sogenannte vollständig monotone Funktion ist, das heißt eine unendlich oft differenzierbare Funktion, deren Ableitungen im Vorzeichen alternieren.

Wenn wir jedoch eine beliebige, aber feste Dimension  $d \geq 3$  betrachten, liefert uns Kimberling eine hinreichende, aber nicht mehr notwendige Bedingung. Obwohl mehrere Autoren schwächere Bedingungen formulierten, gelang es erst McNeil und Nešlehová (2009) mit dem Begriff der  $d$ -Monotonie eine hinreichende und zugleich notwendige Bedingung darzulegen.

**Definition 2.8** ( $d$ -monoton). *Eine reelle Funktion  $f$  heißt  $d$ -monoton auf  $(a, b)$  mit  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $a < b$  und  $d \geq 2$ , falls  $f$  auf  $(a, b)$  bis zur Ordnung  $d - 2$  differenzierbar ist und die Ableitungen die Bedingungen*

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, d - 2, \quad (2.2.2)$$

für  $x \in (a, b)$  erfüllen und zusätzlich  $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$  monoton fallend und konvex auf  $(a, b)$  ist.

Definition 2.8 definiert die  $d$ -Monotonie nur auf offenen Intervallen. Im Folgenden wird diese aber auch für Funktionen benötigt, die auf nicht offenen Intervallen definiert sind, weswegen wir noch folgende Erweiterung der obigen Definition liefern.

**Definition 2.9** ( $d$ -monoton). *Eine reelle Funktion  $f$  heißt  $d$ -monoton auf einem Intervall  $I \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ , falls  $f$  stetig auf  $I$  und eingeschränkt auf dem Inneren von  $I$   $d$ -monoton ist.*

**Satz 2.10.** *Sei  $\psi$  ein Archimedischer Erzeuger. Dann ist  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , gegeben durch*

$$C(u) = \psi(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)), \quad u \in [0, 1]^d,$$

*genau dann eine  $d$ -dimensionale Copula, wenn  $\psi$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$   $d$ -monoton ist.*

Der Beweis zu Satz 2.10 wird in McNeil und Nešlehová (2009, Theorem 2) dargelegt.

Ein  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger  $\psi$  ist offensichtlich für  $l > d$  im Allgemeinen nicht  $l$ -monoton, das heißt  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger generieren nicht notwendigerweise Archimedische Copulas in höheren Dimensionen. Dies ist auch sinnvoll, weil wir gerade durch die  $d$ -Monotonie eine schwächere Eigenschaft als die vollständige Monotonie einführen wollten.

Für  $2 \leq m < d$  ist  $\psi$  jedoch  $m$ -monoton, das heißt  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger generieren Archimedische Copulas in niedrigeren Dimensionen. Dies sehen wir wie folgt ein. Die Differenzierbarkeit bis zur Ordnung  $m - 2$  und (2.2.2) sind klar. Weiter ist wegen der  $d$ -Monotonie

$$((-1)^{m-2}\psi^{(m-2)})' = (-1)(-1)^{m-1}\psi^{(m-1)} \leq 0,$$

das heißt die Monotonie gilt. Die Konvexität folgt für  $m \leq d - 2$  aus

$$((-1)^{m-2}\psi^{(m-2)})'' = (-1)^2(-1)^m\psi^{(m)} \geq 0$$

und für  $m = d - 1$  gilt wegen der Monotonie von  $(-1)^{d-2}\psi^{(d-2)}$ , dass  $((-1)^{m-2}\psi^{(m-2)})' = (-1)(-1)^{d-2}\psi^{(d-2)}$  monoton wachsend ist.

Wenn wir zwei  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger haben, die die gleiche Archimedische Copula in Dimension  $d$  erzeugen, dann erzeugen sie auch für  $2 \leq m < d$  die gleichen  $m$ -dimensionalen Copulas. Seien dazu  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zwei  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger und gelte  $C_{\psi_1,d} = C_{\psi_2,d}$ . Dann gilt für  $u \in [0, 1]^d$

$$\psi_1(\phi_1(u_1) + \dots + \phi_1(u_d)) = \psi_2(\phi_2(u_1) + \dots + \phi_2(u_d)).$$

Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die ersten  $m$  Argumente, dann gilt insbesondere wegen  $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 0$

$$\psi_1(\phi_1(u_1) + \dots + \phi_1(u_m)) = \psi_2(\phi_2(u_1) + \dots + \phi_2(u_m)),$$

also  $C_{\psi_1,m} = C_{\psi_2,m}$ .

## 2.3 Charakterisierung multivariater Archimedischer Copulas

Um Archimedische Copulas charakterisieren zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der Simplexverteilung, der von Fang und Fang (1988) eingeführt wurde.

**Definition 2.11** (Simplexverteilung). *Ein Zufallsvektor  $X$  mit Werten in  $\mathbb{R}_+^d = [0, \infty)^d$  folgt genau dann einer Simplexverteilung, wenn eine nichtnegative Zufallsvariable  $R$  existiert, die unabhängig von einem auf dem Einheits-simplex*

$$\mathcal{S}_d = \{x \in \mathbb{R}_+^d : \|x\|_1 = 1\}$$

gleichverteiltem Zufallsvektor  $S_d$  ist, so dass gilt

$$X \stackrel{d}{=} RS_d.$$

Die Zufallsvariable  $R$  bezeichnen wir als Radialvariable und ihre Verteilung als Radialverteilung.

Für den engen Zusammenhang zwischen Archimedischen Copulas und Simplexverteilungen spielt die von McNeil und Nešlehová (2009) eingeführte Williamson  $d$ -Transformation eine wesentliche Rolle.

**Definition 2.12** (Williamson  $d$ -Transformation). Seien  $X$  eine nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$  und  $d \geq 2$ . Die Williamson  $d$ -Transformation von  $X$  ist eine reelle Funktion auf  $[0, \infty)$ , definiert durch

$$\mathfrak{W}_d F(x) = \int_x^\infty \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} dF(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{x}{X}\right)_+^{d-1} & , \quad x > 0, \\ 1 - F(0) & , \quad x = 0. \end{cases}$$

McNeil und Nešlehová (2009, Korollar 2) zeigen, dass die Menge der  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeuger genau der Menge der Williamson  $d$ -Transformationen von Verteilungsfunktionen nichtnegativer Zufallsvariablen entspricht, die an der Stelle 0 keine Masse haben.

Sie charakterisieren in Theorem 3 Archimedische Copulas vollständig, indem sie zeigen, dass eine  $d$ -dimensionale Copula genau dann Archimedisch ist, wenn sie die Überlebenscopula einer Simplexverteilung ist, deren Radialvariable an der Stelle 0 keine Masse hat. Des Weiteren zeigen sie, dass der  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger  $\psi$  einer Archimedischen Copula gerade die Williamson  $d$ -Transformation der Verteilungsfunktion  $G_{\psi,d}$  der Radialvariable  $R_{\psi,d}$  ist, das heißt für alle  $x \in [0, \infty)$  gilt

$$\psi(x) = \mathfrak{W}_d G_{\psi,d}(x) = \int_x^\infty \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{d-1} dG_{\psi,d}(r) = E \left(1 - \frac{x}{R_{\psi,d}}\right)_+^{d-1}.$$

**Bemerkung.** Die Formel gilt hier wegen  $G_{\psi,d}(0) = 0$  auch für  $x = 0$ .

Nach Proposition 5.2 der genannten Arbeit ist  $G_{\psi,d}$  eindeutig durch ihre Williamson  $d$ -Transformation bestimmt. Genauer gilt unter der Voraussetzung  $\psi = \mathfrak{W}_d G_{\psi,d}$  für  $x \in [0, \infty)$

$$G_{\psi,d}(x) = \mathfrak{W}_d^{-1} \psi(x) = 1 - \sum_{k=0}^{d-2} \frac{(-1)^k x^k \psi^{(k)}(x)}{k!} - \frac{(-1)^{d-1} x^{d-1} \overleftarrow{\psi}^{(d-1)}(x)}{(d-1)!}, \quad (2.3.1)$$

### 2.3 Charakterisierung multivariater Archimedischer Copulas

---

wobei wir mit  $\overleftarrow{\psi}^{(d-1)}$  die rechtsseitige Ableitung von  $\psi^{(d-2)}$  bezeichnen.

**Bemerkung.** Falls  $(U_1, \dots, U_d)$  die Verteilung  $C_{\psi, d}$  hat, dann gilt wegen Theorem 3.2 aus McNeil und Nešlehová (2009)

$$(\phi(U_1), \dots, \phi(U_d)) \stackrel{d}{=} RS_d.$$

$S_d$  nimmt nur Werte in  $\mathcal{S}_d = \{x \in [0, 1]^d : \|x\|_1 = 1\}$  an, weshalb wir folgern

$$\phi(U_1) + \dots + \phi(U_d) \stackrel{d}{=} R. \tag{2.3.2}$$

### 3 Konstruktion eines Schätzers einer Archimedischen Copula

Gegeben sei eine Stichprobe  $(X_{11}, \dots, X_{1d}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nd})$  einer unbekanntem Verteilungsfunktion  $H$ , deren assoziierte Copula  $C_{\psi,d}$  Archimedisch mit unbekanntem Erzeuger  $\psi$  ist. Weiter gehen wir davon aus, dass die Randverteilungen von  $H$  unbekannt sind. Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe eines Schätzers eines  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeugers von  $C_{\psi,d}$  einen nichtparametrischen Schätzer von  $C_{\psi,d}$  zu konstruieren. Die Schwierigkeit in der Konstruktion liegt darin, dass sich die gegebene Stichprobe nicht auf die Archimedische Copula, sondern auf die Verteilungsfunktion bezieht, das heißt wir haben keine direkt beobachtbaren Daten, um die Archimedische Copula zu schätzen.

Wir führen zunächst die sogenannte Kendall Verteilungsfunktion ein und zeigen, dass eine diskrete Verteilungsfunktion mit endlichem Träger unter einer gewissen Bedingung gerade die Kendall Verteilungsfunktion einer eindeutigen Archimedischen Copula ist. Im nächsten Schritt erzeugen wir aus der gegebenen Stichprobe Pseudobeobachtungen, mit denen wir einen Schätzer für die Kendall Verteilungsfunktion konstruieren, der eben diese Bedingung erfüllt. Dieser Schätzer ermöglicht es uns, anhand eines Algorithmus Pseudobeobachtungen für eine Radialvariable einer Simplexverteilung der zu schätzenden Archimedischen Copula zu erzeugen, so dass die geschätzte Radialvariable bis auf Skalierung eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe der Williamson Transformation der geschätzten Radialvariable erhalten wir einen Schätzer eines (von der Skalierung der Radialvariable abhängigen)  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeugers der zu schätzenden Archimedischen Copula. Dieser Schätzer ist aufgrund der Konstruktion ebenfalls ein  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger. Folglich ist der damit direkt herleitbare Schätzer der Archimedischen Copula selbst eine Archimedische Copula und darüber hinaus eindeutig bestimmt.

Mit diesen Erkenntnissen ist es auch möglich, einen nichtparametrischen Schätzer der von Genest und Rivest (1993) eingeführten Abbildung

$$\lambda : (0, 1] \rightarrow (-\infty, 0], \quad w \mapsto \phi(w) / \overleftarrow{\phi}'(w) \tag{3.0.1}$$

herzuleiten.

### 3.1 Die Kendall Verteilung

Sei  $X$  ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion  $H$  und Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert nach dem Satz von Sklar eine Copula  $C$  mit der Eigenschaft  $H(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Falls der  $d$ -dimensionale Zufallsvektor  $U$  die Verteilungsfunktion  $C$  hat, dann gilt:

$$H(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} C(U_1, \dots, U_d).$$

Dies sehen wir wie folgt ein. Für alle  $x \in [0, 1]^d$  gilt

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_d) &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_d^{-1}(U_d) \leq x_d), \end{aligned}$$

das heißt  $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d))$  und somit folgt

$$H(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} H(F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d)) = C(U_1, \dots, U_d).$$

Unter den obigen Voraussetzungen betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation

$$(X_1, \dots, X_d) \mapsto W = H(X_1, \dots, X_d), \quad (3.1.1)$$

die bereits von Genest und Rivest (1993) im bivariaten Fall eingeführt wurde. Diese führt uns zum Begriff der Kendall Verteilung.

**Definition 3.1** (Kendall Verteilung). *Seien  $X$  ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion  $H$  und  $W$  eine durch (3.1.1) gegebene Zufallsvariable. Dann ist die Kendall Verteilungsfunktion definiert durch*

$$K(w) = P(W \leq w), \quad w \in [0, 1].$$

Wir bemerken, dass für eine beliebige zugrundeliegende Copula  $K(w) \geq w$  für alle  $w \in [0, 1]$  gilt, denn mit der Tatsache, dass jede Copula nach oben durch die obere Fréchet Hoeffding Grenze beschränkt ist, folgt für  $w \in [0, 1]$

$$K(w) = P(C(U_1, \dots, U_d) \leq w) \geq P(\min\{U_1, \dots, U_d\} \leq w) \geq P(U_1 \leq w) = w.$$

Falls  $C$  eine Archimedische Copula ist, dann gilt

$$K(w-) = \lim_{t \uparrow w} K(t) > w, \quad w \in (0, 1). \quad (3.1.2)$$

Anders ausgedrückt, wenn (3.1.2) nicht erfüllt ist, dann kann die zu der Kendall Verteilungsfunktion assoziierte Copula nicht Archimedisch sein. Ein Beweis im bivariaten Fall wurde bereits von Genest und Rivest (1993, Proposition 1.2) erbracht. Für den Fall  $d > 2$  verweisen wir auf Genest et al. (2011, Kapitel 5.3).

Die Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$  bezüglich einer Archimedischen Copula  $C_{\psi,d}$  steht in einem engen Zusammenhang zur Radialvariable  $R_{\psi,d}$  der entsprechenden Simplexverteilung. Genauer gilt wegen (2.3.2) für alle  $w \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} K_{\psi,d}(w) &= P(C_{\psi,d}(U_1, \dots, U_d) \leq w) = P(\psi(\phi(U_1) + \dots + \phi(U_d)) \leq w) \\ &= P(\psi(R_{\psi,d}) \leq w) = P(R_{\psi,d} \geq \phi(w)). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

**Bemerkung.** Wenn wir eine  $d$ -dimensionale Archimedische Copula gegeben haben, deren Archimedischer Erzeuger unbekannt ist, dann können wir diesen nicht eindeutig bestimmen. Um dies einzusehen, betrachten wir die beiden  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeuger  $\psi(x)$  und  $\tilde{\psi}(x) := \psi(cx)$  für  $c > 0$ . Dann ist  $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)/c$ . Somit folgt für  $x \in [0, 1]^d$

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\psi},d}(x) &= \tilde{\psi}(\tilde{\phi}(x_1) + \dots + \tilde{\phi}(x_d)) = \tilde{\psi}((\phi(x_1) + \dots + \phi(x_d))/c) \\ &= \psi(\phi(x_1) + \dots + \phi(x_d)) = C_{\psi,d}(x). \end{aligned}$$

Obwohl  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  für  $c \neq 1$  verschieden sind, erzeugen sie die gleiche Archimedische Copula.

Weiter können wir mit dieser Erkenntnis folgern, dass auch die der Archimedischen Copula zugrunde liegende Simplexverteilung nicht eindeutig bestimmt ist. Dies sehen wir wie folgt ein. Seien  $R$  eine Radialvariable mit Verteilungsfunktion  $F_R$ , die  $F_R(0) = 0$  erfüllt und  $\tilde{R} = R/c$  eine weitere Radialvariable. Dann ist die Verteilungsfunktion von  $\tilde{R}$  gegeben durch  $F_{\tilde{R}}(x) = P(R/c \leq x) = F_R(cx)$  und die Bedingung  $F_{\tilde{R}}(0) = 0$  ist erfüllt. Die entsprechenden Simplexverteilungen sind verschieden und ihre Williamson  $d$ -Transformationen sind gegeben durch

$$\mathfrak{W}_d F_R(x) = \psi(x)$$

und

$$\mathfrak{W}_d F_{\tilde{R}}(x) = \mathfrak{W}_d F_R(cx) = \psi(cx) = \tilde{\psi}(x).$$

Wie wir bereits gesehen haben, erzeugen  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  die gleiche Archimedische Copula, das heißt, obwohl die beiden Radialvariablen hier für  $c \neq 1$  verschieden sind, sind es die daraus resultierenden Archimedischen Copulas nicht.

**Lemma 3.2.** Sei  $G_{\psi,d}$  die Verteilungsfunktion von  $R_{\psi,d}$ . Dann gilt für  $x \in (0, \infty)$

- (i)  $\psi(x) = 0 \iff G_{\psi,d}(x) = 1$ .
- (ii)  $\inf\{x : \psi(x) = 0\} = \inf\{x : G_{\psi,d}(x) = 1\}$ .

*Beweis.* (i) Sei  $x \in (0, \infty)$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \psi(x) = 0 &\iff E \left[ \left( 1 - \frac{x}{R_{\psi,d}} \right)_+^{d-1} \right] = 0 \iff P \left( \left( 1 - \frac{x}{R_{\psi,d}} \right)_+^{d-1} = 0 \right) = 1 \\ &\iff P \left( 1 - \frac{x}{R_{\psi,d}} \leq 0 \right) = 1 \iff P(R_{\psi,d} \leq x) = 1 \\ &\iff G_{\psi,d}(x) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Für  $x_R = \inf\{x : \psi(x) = 0\}$  ist  $\psi(x_R) = 0$  und mit (i) folgt  $G_{\psi,d}(x_R) = 1$ . Angenommen, es existiere ein  $x^* \in [0, \infty)$  mit  $G_{\psi,d}(x^*) = 1$  und  $x^* < x_R$ , dann folgt  $\psi(x^*) > 0$  und mit (i) folgt  $G_{\psi,d}(x^*) < 1$ , was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass  $K_{\psi,d}$  eine Treppenfunktion mit endlich vielen Sprüngen ist. Die Zufallsvariable

$$W_{\psi,d} = C_{\psi,d}(U_1, \dots, U_d)$$

ist also diskret und hat die gleiche Verteilung wie  $\psi(R_{\psi,d})$ . Sei  $m \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Atome von  $W_{\psi,d}$ , dann bezeichnen wir diese mit  $0 \leq w_1 < \dots < w_m \leq 1$ . Da  $P(W_{\psi,d} \leq w) = P(R_{\psi,d} \geq \phi(w))$  und  $\phi$  stetig und streng monoton ist, macht die Überlebensfunktion von  $R_{\psi,d}$  genau dann an der Stelle  $\phi(w)$  einen Sprung, wenn die Verteilungsfunktion von  $W_{\psi,d}$  an der Stelle  $w$  einen Sprung macht. Insbesondere ist  $R_{\psi,d}$  diskret und hat die gleiche Anzahl an Atomen wie  $W_{\psi,d}$ . Dadurch dass  $\phi$  streng monoton fallend ist, gilt

$$\phi(w_1) > \dots > \phi(w_m)$$

und wir setzen  $r_i = \phi(w_{m-i+1})$  für  $i = 1, \dots, m$ , was äquivalent ist zu

$$w_i = \psi(r_{m-i+1}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1.4)$$

Wegen der vorherigen Bemerkung gilt für den Fall  $w_1 = 0$

$$\phi(w_1) = \inf\{x : \psi(x) = 0\} = \inf\{x : G_{\psi,d}(x) = 1\} = r_m,$$

das heißt wir haben auch hier eine eindeutige Zuordnung. Weiter setzen wir  $p_i = P(R_{\psi,d} = r_i)$  und  $k_i = P(W_{\psi,d} = w_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Wir können folgern

$$k_i = P(\psi(R_{\psi,d}) = \psi(r_{m-i+1})) = P(R_{\psi,d} = r_{m-i+1}) = p_{m-i+1}. \quad (3.1.5)$$

Für alle  $x \geq 0$  gilt

$$\psi(x) = \mathfrak{W}_d G_{\psi,d}(x) = \sum_{i:r_i > x} \left(1 - \frac{x}{r_i}\right)^{d-1} p_i. \quad (3.1.6)$$

Wegen (3.1.4) und (3.1.6) gilt

$$w_1 = \sum_{i:r_i > r_m} \left(1 - \frac{r_m}{r_i}\right)^{d-1} p_i = 0 \quad \text{und} \quad w_m = \sum_{i=2}^m \left(1 - \frac{r_1}{r_i}\right)^{d-1} p_i < \sum_{i=2}^m p_i < 1.$$

Weiter ist  $r_1 > 0$ , das heißt  $G_{\psi,d}(0) = 0$ , denn angenommen  $r_1$  wäre gleich 0, dann würde  $\phi(w_m) = 0$  und somit  $w_m = \psi(0) = 1$  folgen, was ein Widerspruch wäre.

**Satz 3.3.** *Seien  $d \geq 2$  und  $K$  eine diskrete Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$  mit dem Träger  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , wobei  $0 \leq w_1 < \dots < w_m \leq 1$  ist. Falls Bedingung (3.1.2) erfüllt ist, dann ist  $K$  die Kendall Verteilungsfunktion einer eindeutigen Archimedischen Copula  $C_{\psi,d}$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren im Folgenden den Träger von  $R_{\psi,d}$  derart, dass die Bedingungen (3.1.4) und (3.1.5) erfüllt sind, wobei  $\psi$  durch (3.1.6) gegeben ist.

Angenommen, es gelte  $w_1 \neq 0$ , dann würde wegen (3.1.2) der Widerspruch  $0 = K(0) = K(w_1-) > w_1 > 0$  folgen. Es gilt also  $w_1 = 0$  und weiter folgt mit (3.1.2)  $w_m < K(w_m-) = K(w_{m-1}) < 1$ . Des Weiteren impliziert (3.1.2) für  $i = 2, \dots, m$

$$w_i < K(w_i-) = K(w_{i-1}) = \sum_{j=1}^{i-1} P(W = w_j) = \sum_{j=1}^{i-1} k_j.$$

Damit (3.1.5) erfüllt wird, muss für  $i = 2, \dots, m$

$$w_i < \sum_{j=1}^{i-1} k_j = \sum_{j=m-i+2}^m p_j \quad (3.1.7)$$

gelten, weil die Gleichung in (3.1.7) äquivalent ist zu (3.1.5). Durch (3.1.4) und (3.1.6)

erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \Psi(r_{m-1}) = \left(1 - \frac{r_{m-1}}{r_m}\right)^{d-1} p_m, \\
 w_3 &= \Psi(r_{m-2}) = \left(1 - \frac{r_{m-2}}{r_m}\right)^{d-1} p_m + \left(1 - \frac{r_{m-2}}{r_{m-1}}\right)^{d-1} p_{m-1}, \\
 &\vdots \\
 w_m &= \Psi(r_1) = \left(1 - \frac{r_1}{r_m}\right)^{d-1} p_m + \cdots + \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^{d-1} p_2.
 \end{aligned}$$

Wir setzen  $s_i = r_i/r_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, m-1$  und bemerken, dass  $s_i \neq 0$  und  $s_i$  wohldefiniert ist für  $i = 1, \dots, m-1$ , weil  $r_i \neq 0$  für  $i = 1, \dots, m$ . Obiges Gleichungssystem ist nun äquivalent zu dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 w_2 &= (1 - s_{m-1})^{d-1} p_m, \\
 w_3 &= (1 - s_{m-1}s_{m-2})^{d-1} p_m + (1 - s_{m-2})^{d-1} p_{m-1}, \\
 &\vdots \\
 w_m &= (1 - s_1s_2 \cdots s_{m-1})^{d-1} p_m + \cdots + (1 - s_1)^{d-1} p_2.
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem iterativ für die Variablen  $s_1, \dots, s_{m-1}$  und zeigen, dass eine eindeutige Lösung existiert. Aus der ersten Gleichung folgt

$$s_{m-1} = 1 - \left(\frac{w_2}{p_m}\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Nach (3.1.7) ist  $w_2 < p_m$  und folglich  $s_{m-1} \in (0, 1)$ .

Angenommen,  $s_{m-1}, \dots, s_{m-i+2} \in (0, 1)$  wurde bereits für  $i \geq 3$  bestimmt, dann definieren wir

$$f_i(s) = \sum_{j=m-i+2}^m p_j \left(1 - s \prod_{l=m-i+2}^{j-1} s_l\right)^{d-1},$$

wobei ein leeres Produkt gleich 1 ist. Offensichtlich ist  $f_i$  differenzierbar und somit stetig.

Für die Ableitung gilt

$$f'_i(s) = \sum_{j=m-i+2}^m p_j \left( (d-1) \left( - \prod_{l=m-i+2}^{j-1} s_l \right) \left( 1-s \prod_{l=m-i+2}^{j-1} s_l \right)^{d-2} \right) < 0$$

für  $s \in (0, 1)$ , das heißt  $f_i$  ist streng monoton fallend auf  $(0, 1)$ . Weiter folgt

$$f_i(0) = \sum_{j=m-i+2}^m p_j > w_i$$

und

$$\begin{aligned} f_i(1) &= \sum_{j=m-i+2}^m p_j \left( 1 - \frac{r_{m-i+2}}{r_j} \right)^{d-1} = \sum_{j:r_j > r_{m-i+2}} p_j \left( 1 - \frac{r_{m-i+2}}{r_j} \right)^{d-1} \\ &= \Psi(r_{m-i+2}) = w_{i-1} < w_i. \end{aligned}$$

Aus diesen Erkenntnissen können wir schließen, dass genau ein  $s_{m-i+1} \in (0, 1)$  existiert mit  $f_i(s_{m-i+1}) = w_i$ .

Wir haben nun  $s_1, \dots, s_{m-1} \in (0, 1)$  eindeutig bestimmt. Aus  $s_i = r_i/r_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, m-1$  können wir  $r_1, \dots, r_m$ , also den Träger von  $R_{\psi,d}$  bis auf Skalierung eindeutig herleiten. Wir haben in einer vorherigen Bemerkung bereits festgestellt, dass zwei Radialvariablen, die bis auf Skalierung gleich sind, die gleiche Archimedische Copula erzeugen. Aus diesem Grund bestimmt die Kendall Verteilungsfunktion die Archimedische Copula eindeutig.  $\square$

### 3.2 Konstruktion von Pseudobeobachtungen der Radialvariable

Gegeben sei eine Stichprobe  $(X_{11}, \dots, X_{1d}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nd})$  einer unbekanntem Verteilungsfunktion  $H$ , deren assoziierte Copula  $C_{\psi,d}$  Archimedisch mit unbekanntem Erzeuger  $\psi$  ist. Sei  $H_n$  die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe. Gewöhnlich werden die Pseudobeobachtungen

$$V_j = H_n(X_{j1}, \dots, X_{jd}), \quad j = 1, \dots, n,$$

bestimmt, um mit diesen eine empirische Verteilungsfunktion  $K_n$  zu konstruieren, die als Schätzer der Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$  fungiert (vgl. Genest und Rivest (1993) und Barbe, Genest, Ghoudi und Rémillard (1996)). In den beiden Arbeiten wurden die

Pseudobeobachtungen noch abgeändert zu

$$V_j^* = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^n \mathbf{1}(X_{k1} \leq X_{j1}, \dots, X_{kd} \leq X_{jd}),$$

bzw.

$$V_j^{**} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{k1} < X_{j1}, \dots, X_{kd} < X_{jd}).$$

Wir könnten die Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$  also durch die empirische Verteilungsfunktion

$$K_{n,d}^{V^*}(w) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(V_j^* \leq w)$$

schätzen. Um Satz 3.3 anwenden zu können, muss Bedingung (3.1.2) erfüllt sein.  $K_{n,d}^{V^*}$  erfüllt diese Bedingung im Allgemeinen jedoch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.4.** Sei für  $d = 2$  die folgende Stichprobe gegeben:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
(3,5)	(1,3)	(4,2)	(0,1)	(4,3)	(3,3)	(9,9)	(6,4)	(1,2)	(8,3)

Dann ergibt sich

$V_1^*$	$V_2^*$	$V_3^*$	$V_4^*$	$V_5^*$	$V_6^*$	$V_7^*$	$V_8^*$	$V_9^*$	$V_{10}^*$
4/9	2/9	2/9	0/9	5/9	3/9	9/9	6/9	1/9	6/9

Es folgt zum Beispiel

$$K_{n,d}^{V^*}\left(\frac{2}{9}\right) = K_{n,d}^{V^*}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{10} \neq \frac{2}{9},$$

wodurch wir erkennen, dass Bedingung (3.1.2) nicht erfüllt ist.

Damit Bedingung (3.1.2) erfüllt wird, müssen wir eine empirische Verteilungsfunktion konstruieren, die größer als  $K_{n,d}^{V^*}$  ist. Anders ausgedrückt, wir müssen geeignete Pseudobeobachtungen konstruieren, die kleiner als  $V_1^*, \dots, V_n^*$  sind. Dazu betrachten wir folgende Abschätzung für  $j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} V_j^* &\geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1, k \neq j}^n \mathbf{1}(X_{k1} \leq X_{j1}, \dots, X_{kd} \leq X_{jd}) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1, k \neq j}^n \mathbf{1}(X_{k1} < X_{j1}, \dots, X_{kd} < X_{jd}) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{k1} < X_{j1}, \dots, X_{kd} < X_{jd}) =: W_j. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

### 3.2 Konstruktion von Pseudobeobachtungen der Radialvariable

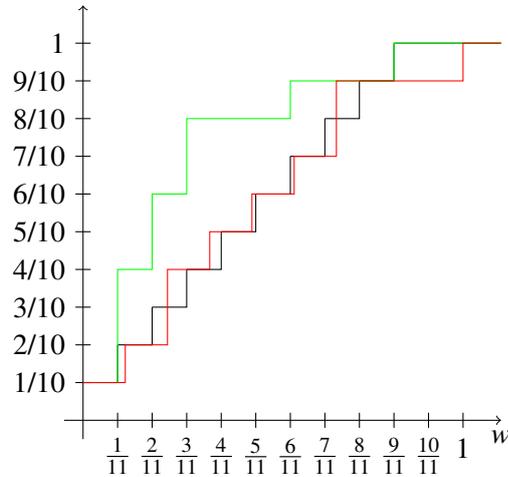


Abb.3.1: Graphen der Treppenfunktionen  $K_{10,2}$  (grün),  $K_{10,2}^{V*}$  (rot) und  $L_{10}$  (schwarz).

Somit folgt für alle  $w \in [0, 1]$

$$K_{n,d}(w) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j \leq w) \geq K_{n,d}^{V*}(w). \quad (3.2.2)$$

Barbe et al. (1996) haben gezeigt, dass der empirische Prozess  $\sqrt{n}(K_n - K)$  unter schwachen Regularitätsannahmen gegen einen zentrierten Gaußprozess in Verteilung konvergiert. Die Korrektur der Pseudobeobachtungen beeinflusst das asymptotische Grenzverhalten nicht.

**Beispiel 3.5.** Wir betrachten noch einmal die Stichprobe aus Beispiel 3.4. Dann ergibt sich

$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$	$W_8$	$W_9$	$W_{10}$
3/11	1/11	1/11	0/11	2/11	2/11	9/11	6/11	1/11	3/11

Abbildung 3.1 zeigt die Graphen der Treppenfunktionen  $K_{10,2}$  (grün),  $K_{10,2}^{V*}$  (rot) und  $L_{10}$  (schwarz), gegeben durch

$$L_{10}(w) = \frac{1}{10} \left( 1 + \sum_{j=1}^9 \mathbf{1} \left( \frac{j}{11} \leq w \right) \right), \quad w \in [0, 1].$$

$K_{10,2}$  ist an allen Stellen größer oder gleich  $L_{10}$  und erfüllt Bedingung (3.1.2), wohingegen  $K_{10,2}^{V*}$  an bestimmten Stellen echt kleiner als  $L_{10}$  ist, was dazu führen kann (aber nicht zwangsläufig muss), dass Bedingung (3.1.2) verletzt wird.

Wie wir im Folgenden zeigen werden, wird durch die geringfügige Änderung der Pseudobeobachtungen tatsächlich Bedingung (3.1.2) sichergestellt. Für den Beweis benötigen wir aber zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 3.6.** *Für  $i = 0, \dots, n-1$  gilt*

$$K_{n,d} \left( \frac{i}{n+1} \right) \geq \frac{i+1}{n}. \quad (3.2.3)$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall  $d = 1$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Beobachtungen, dann ist für  $j = 1, \dots, n$

$$W_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{k1} < X_{j1}).$$

Unser Ziel ist es,  $K_{n,d}$  nach unten abzuschätzen, indem wir uns diejenige Stichprobe wählen, die sicherstellt, dass  $K_{n,d}$  so langsam wie möglich wächst. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Beobachtungen unterschiedliche Werte aufweisen. Da die Reihenfolge der Beobachtungen keine Rolle spielt, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $W_1 = 0, W_2 = \frac{1}{n+1}, \dots, W_n = \frac{n-1}{n+1}$ . Dann folgt

$$K_{n,d} \left( \frac{i}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1} \left( W_j \leq \frac{i}{n+1} \right) = \frac{i+1}{n}$$

und für eine beliebige Stichprobe gilt

$$K_{n,d} \left( \frac{i}{n+1} \right) \geq \frac{i+1}{n}.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass  $d \geq 2$  beliebig ist. Dadurch dass bei der Berechnung von  $W_1, \dots, W_n$  in der Indikatorfunktion zu der schon im 1-dimensionalen Fall vorhandenen Bedingung noch  $d-1$  weitere Bedingungen hinzukommen, werden  $W_1, \dots, W_n$  höchstens kleiner. Aus diesem Grund kann  $K_{n,d}$  höchstens größer werden. Die Ungleichung (3.2.3) gilt also für beliebiges  $d$ .  $\square$

**Lemma 3.7.** *Die empirische Verteilungsfunktion  $K_{n,d}$ , gegeben durch*

$$K_{n,d}(w) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j \leq w), \quad w \in [0, 1],$$

*erfüllt Bedingung (3.1.2).*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die Behauptung für alle Sprungstellen gilt. Die Sprungstellen können nur an den Stellen  $\frac{i}{n+1}$  für  $i = 0, \dots, n-1$  liegen, wobei wir die erste Sprungstelle nicht beachten müssen, denn nach Lemma 3.6 ist sie an der Stelle  $w = 0$ . Seien  $w_0 < w_1$  zwei aufeinander folgende Sprünge von  $K_{n,d}$ . Wir zeigen  $K_{n,d}(w_0) > w_1$ , denn dann folgt mit  $K_{n,d}(w_1-) = K_{n,d}(w_0)$  die Behauptung. Dazu setzen wir

$$l = \mathbf{1}(W_1 \leq w_0) + \dots + \mathbf{1}(W_n \leq w_0).$$

Angenommen, es gelte  $w_1 - \frac{1}{n+1} \geq \frac{l}{n+1}$ , dann wäre wegen Lemma 3.6

$$\frac{l}{n} = K_{n,d} \left( w_1 - \frac{1}{n+1} \right) \geq K_{n,d} \left( \frac{l}{n+1} \right) \geq \frac{l+1}{n},$$

was ein Widerspruch ist. Daher folgt  $w_1 < \frac{l+1}{n+1}$  und somit

$$w_1 \leq \frac{l}{n+1} < \frac{l}{n} = K_{n,d}(w_0).$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die Aussage auch für alle  $w \in (0, 1)$  gilt, die keine Sprungstellen sind. Sei zunächst  $\bar{w} \in (0, 1)$  mit  $w_0 < \bar{w} < w_1$ . Dann gilt

$$K_{n,d}(\bar{w}-) = K_{n,d}(\bar{w}) = K_{n,d}(w_1-) > w_1 > \bar{w}.$$

Sei jetzt  $\bar{w} \in (0, 1)$  mit  $w_r < \bar{w} < 1$ , wobei  $w_r$  die letzte Sprungstelle von  $K_{n,d}$  ist. Dann gilt

$$K_{n,d}(\bar{w}-) = K_{n,d}(\bar{w}) = K_{n,d}(w_r) = 1 > \bar{w}.$$

□

Da  $K_{n,d}$  ein Schätzer für die Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$  ist, der die Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt, ist  $K_{n,d}$  selbst eine Kendall Verteilungsfunktion einer eindeutigen Archimedischen Copula  $C_{n,d}$ . Der Beweis zu Satz 3.3 bringt ein Verfahren mit sich, mit dem wir Pseudobeobachtungen für die mit  $K_{n,d}$  assoziierte Radialvariable, nennen wir sie  $R_{n,d}$ , konstruieren können. Bezeichnen wir mit  $\psi_{n,d}$  die Williamson  $d$ -Transformation der Verteilungsfunktion von  $R_{n,d}$ , so werden diese Pseudobeobachtungen in dem folgenden Algorithmus derart konstruiert, dass  $\psi_{n,d}(R_{n,d})$  gerade die Verteilungsfunktion  $K_{n,d}$  hat.

### Algorithmus

1. Berechne die durch (3.2.1) definierten Pseudobeobachtungen  $W_1, \dots, W_n$ .
2. Bezeichne mit  $0 = w_1 < \dots < w_m < 1$  die unterschiedlichen Werte von  $W_1, \dots, W_n$ .

3. Setze

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j = w_{m-i+1}), \quad i = 1, \dots, m.$$

4. Bestimme die Werte  $s_1, \dots, s_{m-1}$ , die das Gleichungssystem (3.1.8) lösen.

5. Setze  $r_m = 1$  und berechne sukzessive  $r_1, \dots, r_{m-1}$  durch die Bedingungen  $r_i/r_{i+1} = s_i$  für  $i = 1, \dots, m-1$ .

6. Ein Pseudosample für  $R_{n,d}$  besteht aus den Werten  $r_1, \dots, r_m$ . Die entsprechende empirische Verteilungsfunktion ist definiert durch

$$G_{n,d}(t) = \sum_{i:r_i \leq t} p_i, \quad t \geq 0.$$

**Bemerkung.** Im 2. Schritt des Algorithmus ist  $w_1 = 0$  und  $w_m < 1$  wegen Lemma 3.6. Im 4. Schritt stellt der Beweis zu Satz 3.3 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems (3.1.8) sicher. Des Weiteren haben wir gesehen, dass  $r_1, \dots, r_m$  nur bis auf Skalierung eindeutig bestimmt werden können. Im 5. Schritt können wir also auch  $r_m = c$  für ein beliebiges positives  $c \neq 1$  setzen. Wie wir bereits gesehen haben, hat diese Änderung keine Auswirkung auf die zugehörige Archimedische Copula. Im 6. Schritt ist  $G_{n,d}(0) = 0$ , da  $r_i > 0$  für  $i = 1, \dots, m$ .

**Bemerkung.**  $\psi_{n,d}(R_{n,d})$  hat tatsächlich die Verteilungsfunktion  $K_{n,d}$ . Um dies einzusehen, betrachten wir drei Fälle. Sei zunächst  $w_i$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$  die  $i$ -te Sprungstelle von  $K_{n,d}$ , dann folgt

$$\begin{aligned} P(\psi_{n,d}(R_{n,d}) \leq w_i) &= P(R_{n,d} \geq \phi_{n,d}(w_i)) = P(R_{n,d} \geq r_{m-i+1}) = \sum_{k=m-i+1}^m p_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=m-i+1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j = w_{m-k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^i \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j = w_l) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^i \mathbf{1}(W_j = w_l) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j \leq w_i) = K_{n,d}(w_i). \end{aligned}$$

Sei nun  $1 \geq w > w_m$ , dann ist  $\phi_{n,d}(w) < \phi_{n,d}(w_m) = r_1$  und es folgt

$$P(\psi_{n,d}(R_{n,d}) \leq w) = P(R_{n,d} \geq \phi_{n,d}(w)) = P(R_{n,d} \geq r_1) = 1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_j \leq w) = K_{n,d}(w).$$

Als letztes betrachten wir den Fall, dass  $w_i < w < w_{i+1}$  für  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ . Dann folgt

$$r_{m-i+1} = \phi_{n,d}(w_i) > \phi_{n,d}(w) > \phi_{n,d}(w_{i+1}) = r_{m-i}$$

und mit Hilfe des ersten Falles

$$P(\psi_{n,d}(R_{n,d}) \leq w) = P(R_{n,d} \geq \phi_{n,d}(w)) = P(R_{n,d} \geq r_{m-i+1}) = K_{n,d}(w_i) = K_{n,d}(w).$$

### 3.3 Der Schätzer

Wir betrachten die Williamson  $d$ -Transformation von der im Algorithmus hergeleiteten empirischen Verteilungsfunktion  $G_{n,d}$ , gegeben für  $x \in [0, \infty)$  durch

$$\psi_{n,d}(x) = E \left[ \left( 1 - \frac{x}{R_{n,d}} \right)_+^{d-1} \right] = \sum_{i:r_i > x} \left( 1 - \frac{x}{r_i} \right)^{d-1} p_i. \quad (3.3.1)$$

$R_{n,d}$  ist eine Radialvariable, für deren Verteilungsfunktion  $G_{n,d}(0) = 0$  gilt, das heißt  $\psi_{n,d}$  ist ein  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger. Des Weiteren hat  $\psi_{n,d}(R_{n,d})$  die Verteilungsfunktion  $K_{n,d}$ . Aus diesen Gründen ist  $\psi_{n,d}$  ein sinnvoller Schätzer eines Erzeugers von  $C_{\psi,d}$ .

Wie wir in (3.3.1) sehen können, ist  $\psi_{n,d}$  stückweise polynomiell vom Grad  $d-1$ , stetig und streng monoton fallend auf  $[0, r_m]$ . Für  $u \in (0, 1]$  setzen wir  $\phi_{n,d}(u) = \psi_{n,d}^{-1}(u)$  sowie  $\phi_{n,d}(0) = r_m$  und können  $\phi_{n,d}$  somit numerisch recht einfach berechnen. Auch hier ist wieder zu beachten, dass  $\phi_{n,d}$  kein Schätzer von  $\phi$ , sondern nur ein Schätzer der Inversen eines Archimedischen Erzeugers von  $C_{\psi,d}$  ist.

Wir können jedoch einen eindeutigen Plug-In-Schätzer von  $C_{\psi,d}$  herleiten, indem wir ihn für  $u \in [0, 1]^d$  wie folgt definieren

$$C_{n,d}(u_1, \dots, u_d) = \psi_{n,d}(\phi_{n,d}(u_1) + \dots + \phi_{n,d}(u_d)). \quad (3.3.2)$$

Mit Hilfe von  $\psi_{n,d}$  können wir auch einen Schätzer der in (3.0.1) definierten Abbildung  $\lambda$  konstruieren. Dazu betrachten wir die Ableitung von  $\psi_{n,d}$ , gegeben für  $x > 0$  durch

$$\psi'_{n,d}(x) = -(d-1) \sum_{i:r_i \geq x} \left( 1 - \frac{x}{r_i} \right)^{d-2} \frac{p_i}{r_i}.$$

Zu beachten ist, dass für  $d = 2$  die Differenzierbarkeit im Allgemeinen nicht gilt. In diesem Fall verstehen wir unter  $\psi'_{n,d}$  die rechtsseitige Ableitung, die aufgrund der Konvexität gegeben ist. Wir setzen dann für  $w \in (0, 1)$

$$\lambda_{n,d}(w) = \frac{\phi_{n,d}(w)}{\phi'_{n,d}(w)} = (\psi'_{n,d} \circ \phi_{n,d})(w) \cdot \phi_{n,d}(w). \quad (3.3.3)$$

Insbesondere folgt mit (2.3.1) für den bivariaten Fall

$$\begin{aligned} K_{n,2}(w) &= P(\psi_{n,2}(R_{n,2}) \leq w) = 1 - P(R_{n,2} < \phi_{n,2}(w)) \\ &= \psi_{n,2}(\phi_{n,2}(w)) - \phi_{n,2}(w) \cdot (\psi'_{n,2} \circ \phi_{n,2})(w) = w - \lambda_{n,2}(w). \end{aligned}$$

Abgesehen davon, dass wir die Pseudobeobachtungen für unseren Schätzer der Kendall Verteilungsfunktion im Vergleich zu Genest und Rivest (1993) geringfügig abgeändert haben, handelt es sich gerade um den Schätzer, der in letzterem Werk bereits eingeführt wurde.

## 4 Konsistenz des Schätzers

In diesem Kapitel zeigen wir im Fall  $d \in \{2, 3\}$  die Konsistenz der in (3.3.2) und (3.3.3) definierten Schätzer  $C_{n,d}$  und  $\lambda_{n,d}$ . In Kapitel 4.1 erläutern wir zunächst, dass eine Archimedische Copula im 2- und 3-dimensionalen Fall eindeutig durch ihre Kendall Verteilungsfunktion bestimmt wird. Im nächsten Teil folgen Sätze über die Konvergenz von Folgen Archimedischer Copulas. In Kapitel 4.3 werden wichtige Aussagen dargestellt, die für den Beweis der Konsistenzaussage notwendig sind. Eine zentrale Erkenntnis für diesen Beweis ist, dass die schwache Konvergenz von Kendall Verteilungsfunktionen die schwache Konvergenz der zugehörigen Archimedischen Copulas impliziert. Schließlich folgt in Kapitel 4.4 der Beweis der Konsistenzaussage.

Wir bezeichnen in diesem Kapitel mit  $\Rightarrow$  gleichmäßige, mit  $\rightarrow$  punktweise, mit  $\xrightarrow{P}$  stochastische und mit  $\rightsquigarrow$  schwache Konvergenz. Die Konvergenz gilt immer für  $n \rightarrow \infty$  bzw. bei einem Index  $n_l$  für  $l \rightarrow \infty$ , wenn nichts anderes gesagt wird.

### 4.1 Identifizierbarkeit

In diesem Unterkapitel geht es um die Frage, ob eine Archimedische Copula eindeutig durch ihre Kendall Verteilungsfunktion bestimmt ist. Wir möchten also untersuchen, ob für beliebige  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die folgende Aussage gilt

$$K_{\psi_1,d} = K_{\psi_2,d} \implies C_{\psi_1,d} = C_{\psi_2,d}. \quad (4.1.1)$$

Wir haben in Kapitel 3 gesehen, wie wir den in (3.2.2) definierten und konsistenten Schätzer  $K_{n,d}$  der Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$  einer in (3.3.2) definierten eindeutigen Archimedischen Copula  $C_{n,d}$  zuordnen können, die als Schätzer der wahren Archimedischen Copula  $C_{\psi,d}$  dient. Falls (4.1.1) nicht erfüllt ist, können zwei unterschiedliche Archimedische Copulas die gleiche Kendall Verteilungsfunktion haben. Aus diesem Grund würde es wenig Sinn machen, einen Schätzer der Kendall Verteilungsfunktion für Rückschlüsse auf die wahre Archimedische Copula zugrunde zu legen.

Genest und Rivest (1993) konnten die Aussage im bivariaten Fall bereits unter schwachen Regularitätsannahmen zeigen. Genest et al. (2011) gingen im bivariaten Fall noch einen

Schritt weiter. Für einen 2-monotonen Archimedischen Erzeuger  $\psi$  zeigen sie mit Hilfe von  $K_{\psi,2}(w) = P(R_{\psi,2} \geq \phi(w))$  und (2.3.1), dass für  $w \in (0, 1)$  gilt

$$K_{\psi,2}(w) = w - (\overleftarrow{\psi}' \circ \phi)(w) \cdot \phi(w) = w - \lambda(w). \quad (4.1.2)$$

Dabei nutzen sie anstelle der schwachen Regularitätsannahmen nur die 2-Monotonie von  $\psi$  aus. Weiter legen Sie in Lemma 2 dar, dass (4.1.1) im bivariaten Fall allgemein gilt. In ihrem Beweis zeigen sie mit Hilfe von (4.1.2), dass die Inverse von  $\psi_1$  ein positives Vielfaches der Inversen von  $\psi_2$  ist, um dann mit der Bemerkung auf Seite 13 die Aussage zu folgern.

Mit steigender Dimension wird die Ausgangslage jedoch schwieriger. Genauer gilt nach McNeil und Nešlehová (2009, Proposition 12) für eine  $d$ -dimensionale Archimedische Copula  $C_{\psi,d}$  für  $w \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} K_{\psi,d}(w) &= \frac{(-1)^{d-1}(\phi(w))^{d-1}}{(d-1)!} \cdot (\overleftarrow{\psi}^{(d-1)} \circ \phi)(w) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{d-2} \frac{(-1)^i(\phi(w))^i}{i!} \cdot (\psi^{(i)} \circ \phi)(w). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Offensichtlich wird die Beziehung zwischen  $K_{\psi,d}$  und  $\psi$  mit steigender Dimension zunehmend komplexer. Eine Darstellung von (4.1.3) anhand von  $\lambda$  und ihrer Ableitungen ist ebenfalls möglich und erfolgt in Genest et al. (2011, Proposition 3).

Nach Genest et al. (2011, Proposition 4) gilt (4.1.1) auch im Fall  $d = 3$  allgemein. In ihrem Beweis führen sie mit Hilfe einer in Proposition 2 dargelegten rekursiven Beziehung zwischen Kendall Verteilungsfunktionen unterschiedlicher Dimension, die aber mit dem gleichen Archimedischen Erzeuger generiert wurden, den trivariaten Fall auf den bivariaten Fall zurück, indem sie zeigen, dass  $K_{\psi_1,2} = K_{\psi_2,2}$ . Daher folgt  $C_{\psi_1,2} = C_{\psi_2,2}$  und somit  $C_{\psi_1,3} = C_{\psi_2,3}$ . Dabei nutzen sie in ihrem Beweis wieder (4.1.2) aus. Eine Rückführung eines höherdimensionalen Falls auf einen um eine Dimension niedrigeren Fall ist aufgrund der in (4.1.3) dargestellten komplizierten Beziehung jedoch nicht in analoger Weise durchführbar.

Wie zu erkennen ist, sind durch Genest et al. (2011) einige Fortschritte in der Identifizierbarkeitsfrage gemacht worden. Sie konnte bisher jedoch noch nicht abschließend geklärt werden, das heißt es konnte für  $d \geq 4$  weder ein Gegenbeispiel gefunden noch ein Beweis konstruiert werden. Wegen Satz 3.3 wissen wir insbesondere, dass (4.1.1) für eine beliebige Dimension gilt, falls die Kendall Verteilungsfunktionen diskret mit endlichem Träger sind. Vor diesem Hintergrund und der Möglichkeit, eine Kendall Verteilung als Grenze einer Folge von diskreten Approximationen darzustellen, liegt jedoch die Vermutung nahe,

dass (4.1.1) auch im Fall  $d \geq 4$  allgemein gilt.

## 4.2 Konvergenz von Archimedischen Copulas

Wie der folgende Satz zeigt, impliziert die schwache Konvergenz einer Folge von beliebigen Copulas die schwache Konvergenz der entsprechenden Kendall Verteilungsfunktionen.

**Satz 4.1.** *Seien  $(C_n)$  eine Folge von  $d$ -dimensionalen Copulas und  $(K_n)$  die Folge der entsprechenden Kendall Verteilungsfunktionen. Falls  $C_n \rightsquigarrow C$ , dann  $K_n \rightsquigarrow K$ .*

*Beweis.* Für den Beweis verwenden wir das in Kallenberg (2002, Theorem 4.27) dargelegte Continuous Mapping Theorem. Wegen der Stetigkeit von  $C$  gilt die Konvergenz von  $C_n$  gegen  $C$  punktweise auf  $[0, 1]^d$ . Die Menge  $[0, 1]^d$  ist kompakt und die Familie der Copulas ist wegen Nelsen (2006, Theorem 2.10.7) gleichgradig stetig. Daher folgt wegen Martio, Ryazanov, Srebro und Yakubov (2009, Theorem 7.1) die gleichmäßige Konvergenz von  $C_n$  gegen  $C$ . Seien  $U = (U_1, \dots, U_d)$  und  $U_n = (U_{n1}, \dots, U_{nd})$  Zufallsvektoren mit den jeweiligen Verteilungsfunktionen  $C$  und  $C_n$ .  $U_n$  konvergiert schwach gegen  $U$ , weil die entsprechenden Verteilungsfunktionen schwach gegeneinander konvergieren. Des Weiteren sind  $C_n$  und  $C$  wegen der Stetigkeit messbar. Aus  $u_n \rightarrow u \in [0, 1]^d$  folgt  $C_n(u_n) \rightarrow C(u)$ , denn

$$\begin{aligned} |C_n(u_n) - C(u)| &\leq |C_n(u_n) - C(u_n)| + |C(u_n) - C(u)| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]^d} |C_n(t) - C(t)| + |C(u_n) - C(u)| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Das Continuous Mapping Theorem liefert uns  $C_n(U_n) \rightsquigarrow C(U)$ . Die Verteilungsfunktionen von  $C_n(U_n)$  und  $C(U)$  sind aber gerade  $K_n$  und  $K$ , weswegen die Aussage folgt.  $\square$

Eine Umkehrung der Aussage für Archimedische Copulas ist jedoch selbst im 2- und 3-dimensionalen Fall, in dem Kendall Verteilungsfunktionen ihre zugehörigen Archimedischen Copulas eindeutig bestimmen, schwierig, weil Archimedische Erzeuger nur bis auf Skalierung eindeutig bestimmt sind. Genest et al. (2011, Beispiel 1) veranschaulichen dies wie folgt. Sie konstruieren anhand einer Folge von gegebenen Radialvariablen mit Hilfe der Williamson 2-Transformation eine Folge von 2-monotonen Archimedischen Erzeugern. Die zugehörige Folge von Kendall Verteilungsfunktionen konvergiert schwach gegen die Kendall Verteilungsfunktion der unteren Fréchet-Hoeffding Grenze, welche eine Archimedische Copula ist. Die Folge der Archimedischen Erzeuger konvergiert jedoch

erst durch eine geeignete Reskalierung gegen einen 2-monotonen Archimedischen Erzeuger dieser Grenzcopula. Letztere Konvergenz ist dann aber hinreichend, um die schwache Konvergenz der entsprechenden Folge von Archimedischen Copulas gegen die untere Fréchet-Hoeffding Grenze zu folgern. Diese Aussage können wir auf Charpentier und Segers (2008) zurückführen, die im 2-dimensionalen Fall zeigen, dass die schwache Konvergenz einer Folge von Archimedischen Copulas gegen eine Archimedische Grenzcopula äquivalent ist zu der Konvergenz einer geeignet reskalierten Folge von Inversen der Archimedischen Erzeuger gegen eine entsprechende Grenzinverse. Wegen Resnick (2008) können wir diese Aussage analog für Archimedische Erzeuger formulieren. In dem folgenden Satz erweitern wir die Aussage auf eine beliebige Dimension.

**Satz 4.2.** *Seien  $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots$   $d$ -monotone Archimedische Erzeuger. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i)  $C_{\psi_n, d} \rightsquigarrow C_{\psi, d}$ .

(ii) *Es existiert eine Folge  $(a_n)$  von Konstanten mit  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $x \in [0, \infty)$  gilt*

$$\psi_n(a_n x) \rightarrow \psi(x).$$

*Beweis.* Sei  $C_{\psi_n, d} \rightsquigarrow C_{\psi, d}$ . Dann gilt  $C_{\psi_n, d} \rightarrow C_{\psi, d}$  und insbesondere  $C_{\psi_n, 2} \rightarrow C_{\psi, 2}$ , denn für  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  gilt

$$\begin{aligned} C_{\psi_n, 2}(u_1, u_2) &= C_{\psi_n, d}(u_1, u_2, 1, \dots, 1) \\ &\rightarrow C_{\psi, d}(u_1, u_2, 1, \dots, 1) \\ &= C_{\psi, 2}(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Daher impliziert Proposition 2 in Charpentier und Segers (2008), dass eine Folge  $(a_n)$  von Konstanten mit  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $t \in (0, 1]$  gilt

$$\frac{\psi_n^{-1}(t)}{a_n} \rightarrow \psi^{-1}(t).$$

Proposition 0.1 in Resnick (2008) impliziert dann die Konvergenz von  $\psi_n(a_n \cdot)$ , das heißt für alle  $x \in [0, \infty)$  gilt

$$\psi_n(a_n x) \rightarrow \psi(x).$$

Für die Rückrichtung zeigen wir, dass für alle  $u_1, \dots, u_d \in [0, 1]$  gilt

$$C_{\psi_n, d}(u_1, \dots, u_d) \rightarrow C_{\psi, d}(u_1, \dots, u_d).$$

Falls mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  mit  $u_i = 0$  existiert, dann nehmen die Archimedischen Copulas den Wert 0 an und die Konvergenz ist klar. Falls mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  mit  $u_i = 1$  existiert, dann können wir die Archimedischen Copulas auf eine niedrigere Dimension reduzieren, in der alle Argumente nur noch Werte in  $[0, 1)$  annehmen. Daher reicht es im Folgenden, die Aussage für  $u_1, \dots, u_d \in (0, 1)$  zu zeigen. Die Abbildung  $\psi_n(a_n \cdot)$  bezeichnen wir im Folgenden mit  ${}^a\psi_n$ . Nach Voraussetzung gilt  ${}^a\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Da  ${}^a\psi_n$  und  $\psi$  Überlebensfunktionen sind und letztere stetig ist, gilt die Konvergenz auch gleichmäßig auf  $[0, \infty)$ . Wegen Resnick (2008, Proposition 0.1) folgt  ${}^a\psi_n^{-1} \rightarrow \psi^{-1}$  auf  $(0, 1]$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} C_{\psi_n, d}(u_1, \dots, u_d) &= \psi_n(\psi_n^{-1}(u_1) + \dots + \psi_n^{-1}(u_d)) \\ &= {}^a\psi_n({}^a\psi_n^{-1}(u_1) + \dots + {}^a\psi_n^{-1}(u_d)) \\ &\rightarrow \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)) \\ &= C_{\psi, d}(u_1, \dots, u_d). \end{aligned}$$

□

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

In diesem Teil zeigen wir eine Umkehrung von Satz 4.1 für den Fall, dass wir nicht mehr beliebige Copulas, sondern nur noch Archimedische Copulas betrachten. Wir befassen uns zunächst mit drei aufeinander aufbauenden Lemmata, die für den Beweis benötigt werden.

**Lemma 4.3.** *Seien  $X$  eine nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$  und  $f = \mathfrak{W}_d F$  ihre Williamson  $d$ -Transformation. Dann gilt für alle  $x \in (0, \infty)$  und  $k \in \{0, \dots, d-2\}$*

$$f^{(k)}(x) = \int (-1)^k \frac{(d-1)!}{(d-1-k)! t^k} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t) dF(t).$$

*Beweis.* Da  $f = \mathfrak{W}_d F$ , gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t) dF(t).$$

Wir definieren

$$g(x, t) = \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} \mathbf{1}_{(-\infty, t]}(x).$$

Für  $d > 2$  und ein festes  $t$  ist  $g$  für  $x \neq t$  offensichtlich differenzierbar. Für  $x = t$  ist  $g$  ebenfalls differenzierbar, weil der Exponent von  $(1 - x/t)$  größer gleich 2 ist und somit der linksseitige und rechtsseitige Differentialquotient jeweils 0 ist. Da sich die  $(k - 1)$ -te Ableitung von  $g$  nur durch eine multiplikative Konstante von  $g$  unterscheidet und der Exponent von  $(1 - x/t)$  weiter größer gleich 2 ist, folgt die  $k$ -fache Differenzierbarkeit von  $g$  analog.

Weiter gilt für  $0 \leq a < b$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x,t) \right| &= \sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} (-1)^k \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x) \right| \\ &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{t^k} \sup_{x \in (a,b)} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x) \\ &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{t^k} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(a) \\ &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{a^k} \\ &=: h(t), \end{aligned}$$

wobei  $h$  integrierbar ist. Für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt weiter  $|g(x, t)| \leq 1$ . Daher ist  $g(x, \cdot)$  integrierbar. Insgesamt können wir folgern

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \int \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1} \mathbf{1}_{[x,\infty)}(t) dF(t) \\ &= \int_x^\infty (-1)^k \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \mathbf{1}_{[x,\infty)}(t) dF(t). \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.4.** *Seien  $d \geq 2$ ,  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$  eine Familie von  $d$ -monotonen Funktionen, die für alle  $\alpha \in I$  die Bedingungen  $f_\alpha(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $f_\alpha(0) = p \in [0, 1]$  erfüllt. Dann ist für  $\varepsilon > 0$  und  $k \in \{0, \dots, d-2\}$  die Familie  $(f_\alpha^{(k)})_{\alpha \in I}$  auf  $[\varepsilon, \infty)$  gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt.*

*Beweis.* Für  $\alpha \in I$  ist nach Proposition 5.1 in McNeil und Nešlehová (2009)  $f_\alpha$  eine Williamson  $d$ -Transformation, das heißt es existiert eine nichtnegative Zufallsvariable  $X_\alpha$  mit Verteilungsfunktion  $F_\alpha$ , so dass  $f_\alpha = \mathfrak{W}_d F_\alpha$ .

Zunächst zeigen wir die gleichmäßige Beschränktheit. Seien  $k \in \{0, \dots, d-2\}$  und  $\varepsilon > 0$ .

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

Für  $x \in [\varepsilon, \infty)$  folgt mit Lemma 4.3

$$\begin{aligned}
 \left| f_{\alpha}^{(k)}(x) \right| &\leq \int \left| (-1)^k \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \frac{1}{t^k} \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t) \right| dF_{\alpha}(t) \\
 &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \int \frac{1}{t^k} \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t) dF_{\alpha}(t) \\
 &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{\varepsilon^k},
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

wobei die letzte Ungleichung daraus resultiert, dass für  $t < x$  gilt  $1/t^k \mathbf{1}_{[x, \infty)}(t) \leq 1/\varepsilon^k$  und für  $t \geq x$  gilt  $t \geq \varepsilon$  und damit die gleiche Abschätzung. Da die Schranke in (4.3.1) unabhängig von  $x$  und  $\alpha$  ist, ist die Familie  $(f_{\alpha}^{(k)})_{\alpha \in I}$  auf  $[\varepsilon, \infty)$  gleichmäßig beschränkt.

Nun zeigen wir die gleichgradige Stetigkeit. Seien  $k \in \{0, \dots, d-2\}$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $x, y \in [\varepsilon, \infty)$  mit  $x > y$ . Dann folgt mit Lemma 4.3

$$\begin{aligned}
 \left| f_{\alpha}^{(k)}(x) - f_{\alpha}^{(k)}(y) \right| &= \left| \int_x^{\infty} (-1)^k \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} dF_{\alpha}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \int_y^{\infty} (-1)^k \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} dF_{\alpha}(t) \right| \\
 &= \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \left| \int_x^{\infty} \frac{1}{t^k} \left[ \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} - \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} \right] dF_{\alpha}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \int_y^x \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} dF_{\alpha}(t) \right| \\
 &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \left( \int_x^{\infty} \frac{1}{t^k} \left[ \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} - \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \right] dF_{\alpha}(t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_y^x \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} dF_{\alpha}(t) \right).
 \end{aligned}$$

Wir schätzen die beiden Integrale nach oben ab. Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right)^n \leq \left(1 - \frac{y}{t}\right)^n \leq 1, \quad t \geq x \tag{4.3.2}$$

und

$$a^n - b^n = (a-b)a^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^j. \tag{4.3.3}$$

Für das erste Integral gilt wegen (4.3.2) und (4.3.3)

$$\begin{aligned}
 & \int_x^\infty \frac{1}{t^k} \left[ \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} - \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{d-1-k} \right] dF_\alpha(t) \\
 &= \int_x^\infty \frac{1}{t^k} \left[ \left( \left(1 - \frac{y}{t}\right) - \left(1 - \frac{x}{t}\right) \right) \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-2-k} \sum_{j=0}^{d-2-k} \left( \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 - \frac{y}{t}} \right)^j \right] dF_\alpha(t) \\
 &\leq \int_x^\infty \frac{1}{t^{k+1}} (x-y)(d-1-k) dF_\alpha(t) \\
 &= (d-1-k)|x-y| \int_x^\infty \frac{1}{t^{k+1}} dF_\alpha(t).
 \end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt wegen (4.3.2)

$$\begin{aligned}
 \int_y^x \frac{1}{t^k} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-1-k} dF_\alpha(t) &= \int_y^x \frac{1}{t^{k+1}} (t-y) \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{d-2-k} dF_\alpha(t) \\
 &\leq \int_y^x (x-y) \frac{1}{t^{k+1}} dF_\alpha(t) \\
 &\leq (d-1-k)|x-y| \int_y^x \frac{1}{t^{k+1}} dF_\alpha(t).
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
 \left| f_\alpha^{(k)}(x) - f_\alpha^{(k)}(y) \right| &\leq \frac{(d-1)!}{(d-1-k)!} \left( (d-1-k)|x-y| \int_x^\infty \frac{1}{t^{k+1}} dF_\alpha(t) \right. \\
 &\quad \left. + (d-1-k)|x-y| \int_y^x \frac{1}{t^{k+1}} dF_\alpha(t) \right) \\
 &\leq \frac{(d-1)!}{(d-2-k)!} \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} |x-y|.
 \end{aligned}$$

Insbesondere folgt damit die gleichgradige Stetigkeit der Familie  $(f_\alpha^{(k)})_{\alpha \in I}$  auf  $[\varepsilon, \infty)$ .  $\square$

**Lemma 4.5.** Sei  $(f_n)$  eine Folge von  $d$ -monotonen Funktionen, so dass  $f_n(0) \in [0, 1]$  und  $f_n(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dann existiert eine  $d$ -monotone Funktion  $f$  mit  $f(0) \in [0, 1]$  und eine Teilfolge  $(f_{n_i})$  von  $(f_n)$ , die auf kompakten Teilmengen von  $(0, \infty)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Des Weiteren konvergieren für  $\varepsilon > 0$  alle Ableitungen von  $(f_{n_i})$  bis zur Ordnung  $d-2$  gegen die entsprechenden Ableitungen von  $f$  auf  $[\varepsilon, \infty)$ .

*Beweis.* Teil 1: Konstruktion einer auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  konvergenten Teilfolge

Wegen Lemma 4.4 ist die Folge  $(f_n^{(d-2)})$  auf  $[\varepsilon, \infty)$  gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Daher folgt mit dem Satz von Arzelà-Ascoli (s. Renardy und Rogers (2004, Theorem 4.17)), dass  $(f_n^{(d-2)})$  eine Teilfolge  $(f_{n_i}^{(d-2)})$  enthält, die auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  gegen eine auf  $[\varepsilon, \infty)$  definierte Grenzfunktion  $f_{(d-2)}$  gleichmäßig konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz überträgt sich die Stetigkeit der Teilfolgenglieder auf die Grenzfunktion.

Wir betrachten die Folge  $(f_{n_i}^{(d-3)})$ . Es genügt uns, den Fall  $\varepsilon \leq 1$  zu betrachten. Wegen (4.3.1) folgt

$$\left| f_{n_i}^{(d-3)}(1) \right| \leq \frac{(d-1)!}{2} \varepsilon^{3-d}.$$

Aus diesem Grund existiert eine in dem Punkt 1 konvergente Teilfolge  $(f_{n_i}^{(d-3)})$ . Die Glieder dieser Folge sind wegen der  $d$ -Monotonie differenzierbar und es gilt

$$f_{n_i}^{(d-3)'} = f_{n_i}^{(d-2)} \Rightarrow f_{(d-2)} \quad (4.3.4)$$

auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$ . Aufgrund dieser Voraussetzungen folgt mit Heuser (2009, Satz 104.3), jeweils auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$ , dass

$$f_{n_i}^{(d-3)} \Rightarrow f_{(d-3)},$$

wobei  $f_{(d-3)}$  eine differenzierbare Funktion ist und

$$f_{n_i}^{(d-3)'} \Rightarrow f_{(d-3)}'.$$

Da aus gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  punktweise Konvergenz auf dem gesamten Intervall  $[\varepsilon, \infty)$  folgt, gilt wegen (4.3.4) weiter  $f_{(d-3)}' = f_{(d-2)}$  auf  $[\varepsilon, \infty)$ . Wir bezeichnen die Folgen  $(f_{n_i}^{(d-2)})$  bzw.  $(f_{n_i}^{(d-3)})$  wieder mit  $(f_{n_i}^{(d-2)})$  bzw.  $(f_{n_i}^{(d-3)})$ , da wir für die Aussage des Lemmas nur die Existenz irgendeiner Teilfolge zeigen müssen.

Der Satz von Arzelà-Ascoli hat uns eine Teilfolge  $(f_{n_i}^{(d-2)})$  geliefert, die auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  gegen eine stetige Grenzfunktion  $f_{(d-2)}$  gleichmäßig konvergiert. Ausgehend von dieser Aussage konnten wir zeigen, dass die Teilfolge  $(f_{n_i}^{(d-3)})$  auf kompakten Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  gegen eine differenzierbare Grenzfunktion  $f_{(d-3)}$  gleichmäßig konvergiert, für die gilt  $f_{(d-3)}' = f_{(d-2)}$ . Wie zu erkennen ist, können wir dieses Verfahren iterativ durchführen. Wir erhalten dann eine Teilfolge  $(f_{n_i})$  und eine auf  $[\varepsilon, \infty)$  definierte und  $(d-2)$ -mal stetig differenzierbare Grenzfunktion  $f$ , so dass auf kompakten

Teilmengen von  $[\varepsilon, \infty)$  gilt

$$f_{n_l}^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}, \quad k \in \{0, \dots, d-2\}.$$

Als nächstes zeigen wir die  $d$ -Monotonie von  $f$  auf  $[\varepsilon, \infty)$ . Da  $f_n$   $d$ -monoton ist, gilt  $(-1)^k f_{n_l}^{(k)} \geq 0$  für  $k \in \{0, \dots, d-2\}$  und  $l \in \mathbb{N}$ , weswegen wir durch punktweise Grenzwertbildung  $(-1)^k f^{(k)} \geq 0$  erhalten. Des Weiteren ist  $(-1)^{(d-2)} f_{n_l}^{(d-2)}$  monoton fallend und konvex. Man kann leicht nachrechnen, dass sich die Monotonie und Konvexität durch punktweise Grenzwertbildung auf  $(-1)^{(d-2)} f^{(d-2)}$  übertragen. Somit ist  $f$  eine auf  $[\varepsilon, \infty)$   $d$ -monotone Funktion.

Wegen der  $d$ -Monotonie von  $f$  folgt für  $k \in \{1, \dots, d-2\}$  mit Williamson (1956, Lemma 1), dass  $x^k f^{(k)}(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  und somit insbesondere  $f^{(k)}(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Analog folgt  $f_{n_l}^{(k)}(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Diese beiden Folgerungen liefern uns die gleichmäßige Konvergenz von  $f_{n_l}^{(k)}$  gegen  $f^{(k)}$  auf dem gesamten Intervall  $[\varepsilon, \infty)$  wie folgt. Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  zeigen wir, dass ein  $n_{l_*}$  existiert, so dass für alle  $n_l \geq n_{l_*}$  gilt

$$\sup_{x \geq \varepsilon} \left| f_{n_l}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| = \max \left( \sup_{\varepsilon \leq x \leq \delta} \left| f_{n_l}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right|, \sup_{x > \delta} \left| f_{n_l}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| \right) < \varepsilon.$$

Wir wählen  $\delta$  so groß, dass  $|f^{(k)}(\delta)| < \varepsilon/2$ . Einerseits existiert ein  $n_{l_0}$ , so dass für alle  $n_l \geq n_{l_0}$  gilt  $|f_{n_l}^{(k)}(\delta) - f^{(k)}(\delta)| < \varepsilon/2$ . Dann gilt für  $x > \delta$

$$\left| f_{n_l}^{(k)}(x) \right| \leq \left| f_{n_l}^{(k)}(\delta) \right| \leq \left| f_{n_l}^{(k)}(\delta) - f^{(k)}(\delta) \right| + \left| f^{(k)}(\delta) \right| < \varepsilon.$$

Da  $f_{n_l}^{(k)}(x)$  und  $f^{(k)}(x)$  entweder beide positiv oder beide negativ sind, folgt

$$\sup_{x > \delta} \left| f_{n_l}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| < \varepsilon.$$

Andererseits wählen wir ein  $n_{l_1}$ , so dass für alle  $n_l \geq n_{l_1}$  gilt

$$\sup_{\varepsilon \leq x \leq \delta} \left| f_{n_l}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| < \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt dann mit  $n_{l_*} := \max(n_{l_0}, n_{l_1})$ .

Teil 2: Konstruktion einer auf kompakten Teilmengen von  $(0, \infty)$  konvergenten Teilfolge

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

Die geforderte Teilfolge wird durch ein Diagonalfolgenargument konstruiert. Für  $\varepsilon = 1$  existieren nach Teil 1 eine Teilfolge  $(f_{n_{1,l}})$  von  $(f_n)$  und eine  $(d-2)$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f^1$ , so dass für  $k \in \{1, \dots, d-2\}$  gilt

$$f_{n_{1,l}}^{(k)} \rightrightarrows (f^1)^{(k)}$$

auf  $[1, \infty)$  und für  $k = 0$  auf kompakten Teilmengen von  $[1, \infty)$ . Dabei ist die Grenzfunktion  $f^1$  auf  $[1, \infty)$   $d$ -monoton. Die Folge  $(f_{n_{1,l}})$  erfüllt die Voraussetzungen, die auch schon von  $(f_n)$  erfüllt werden. Daher folgt für  $\varepsilon = 1/2$  wieder mit Teil 1, dass eine Teilfolge  $(f_{n_{2,l}})$  von  $(f_{n_{1,l}})$  und eine  $(d-2)$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f^2$  existieren, so dass für  $k \in \{1, \dots, d-2\}$  gilt

$$f_{n_{2,l}}^{(k)} \rightrightarrows (f^2)^{(k)}$$

auf  $[1/2, \infty)$  und für  $k = 0$  auf kompakten Teilmengen von  $[1/2, \infty)$ . Dabei ist die Grenzfunktion  $f^2$  auf  $[1/2, \infty)$   $d$ -monoton. Wie zu erkennen ist, können wir iterativ vorgehen. Für  $m \in \mathbb{N}$  existieren also Teilfolgen  $(f_{n_{m,l}})$ , so dass für  $k \in \{1, \dots, d-2\}$  gilt

$$f_{n_{m,l}}^{(k)} \rightrightarrows (f^m)^{(k)}$$

auf  $[1/m, \infty)$  und für  $k = 0$  auf kompakten Teilmengen von  $[1/m, \infty)$ . Die Grenzfunktion  $f^m$  ist auf  $[1/m, \infty)$   $d$ -monoton und es gilt

$$(f_{n_{1,l}}) \supseteq \dots \supseteq (f_{n_{m-1,l}}) \supseteq (f_{n_{m,l}}) \supseteq (f_{n_{m+1,l}}) \supseteq \dots$$

Das Inklusionszeichen besagt hier, dass alle Folgenglieder von  $(f_{n_{m+1,l}})$  in der Folge  $(f_{n_{m,l}})$  enthalten sind. Weiter wissen wir bereits, dass  $(f_{n_{m,l}})$  gegen  $f^m$  auf  $[1/m, \infty)$  und  $(f_{n_{m+1,l}})$  gegen  $f^{m+1}$  auf  $[1/(m+1), \infty)$  punktweise konvergiert. Daher gilt  $f^m = f^{m+1}$  auf  $[1/m, \infty)$ . Wir können somit eine  $d$ -monotone Funktion  $f$  auf  $(0, \infty)$  durch

$$f(x) = f^m(x), \quad x \in [1/m, \infty),$$

definieren. Die Folge  $(f_{n_{l,l}})$  konvergiert dann auf kompakten Teilmengen von  $(0, \infty)$  gleichmäßig gegen  $f$ . Dies sehen wir wie folgt ein. Sei  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $(0, \infty)$ . Für  $m$  und  $\delta$  genügend groß gilt  $A \subset [1/m, \delta]$ . Die Folge  $(f_{n_{m,l}})$  konvergiert dann insbesondere auf  $A$  gleichmäßig gegen  $f^m$ . Für  $l \geq m$  ist  $(f_{n_{l,l}})$  eine Teilfolge von  $(f_{n_{m,l}})$ . Daher folgt

$$f_{n_{l,l}} \rightrightarrows f^m = f$$

auf  $A$ . Mit der gleichen Argumentation folgt für  $k \in \{1, \dots, d-2\}$

$$f_{n_{l,l}}^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$$

auf  $[\varepsilon, \infty)$ .

Wir bezeichnen die konstruierte Diagonalfolge  $(f_{n_l, l})$  nun mit  $(f_{n_l})$  und definieren  $f(0) := \lim_{x \downarrow 0} f(x)$ . Es verbleibt zu zeigen, dass  $f(0) \in [0, 1]$ . Für  $\varepsilon \downarrow 0$  folgt

$$f(\varepsilon) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_l}(\varepsilon) \leq 1$$

und somit

$$f(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(\varepsilon) \leq 1.$$

Wegen der Monotonie von  $f$  folgt für  $x > 0$  weiter

$$f(0) \geq f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_l}(x) \geq 0.$$

□

**Bemerkung.** Die Funktion  $f$  in Lemma 4.5 ist nicht notwendigerweise ein Archimedischer Erzeuger. Dies ist im Allgemeinen selbst dann nicht der Fall, wenn die Funktionenfolge  $(f_n)$  nur aus Archimedischen Erzeugern besteht, wie Genest et al. (2011, Bemerkung 3) anhand eines Gegenbeispiels zeigen. In dem Beweis des folgenden Satz 4.6 zeigen wir, dass es sich aber gerade unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 um einen Archimedischen Erzeuger handelt. Der Beweis dazu wird sich jedoch als aufwendig erweisen.

Mit Hilfe der vorherigen Aussagen ist es nun möglich die Teilumkehrung von Satz 4.1 zu beweisen.

**Satz 4.6.** Sei  $(\psi_n)$  eine Folge  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger und gelte  $K_{\psi_n, d} \rightsquigarrow K$ , wobei  $K$  eine Verteilungsfunktion ist, die Bedingung (3.1.2) erfüllt. Falls  $d \in \{2, 3\}$ , dann existiert eine eindeutig bestimmte Archimedische Copula  $C_{\psi, d}$ , so dass  $C_{\psi_n, d} \rightsquigarrow C_{\psi, d}$  und  $K_{\psi, d} = K$ .

*Beweis.* Teil 1: Wahl einer geeignet skalierten Folge  $(a_n)$  von Konstanten

Wir betrachten die Abbildung  $f : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , die definiert ist durch

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)_+^{d-1}.$$

Die Abbildung ist stetig und auf  $[1, \infty)$  streng monoton steigend. Des Weiteren ist  $f(x) = 0$  für  $x \in (0, 1]$  und  $f(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ . Daher können wir ein  $A > 1$  wählen, so dass gilt

$$0 < f(A) < \frac{1}{2}. \quad (4.3.5)$$

Wir betrachten nun die zu  $\psi_n$  gehörige Radialvariable  $R_{\psi_n, d}$ , die wir im Folgenden mit  $R_n$  bezeichnen werden. Wir wählen eine Folge  $(a_n)$  von Konstanten mit  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $A$  der Median von  $a_n^{-1}R_n$  ist, das heißt

$$\inf\{x : P(a_n^{-1}R_n \leq x) \geq 1/2\} = A.$$

Dies impliziert insbesondere

$$P(a_n^{-1}R_n \leq A) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(a_n^{-1}R_n < A) \leq \frac{1}{2}. \quad (4.3.6)$$

Teil 2: Existenz einer konvergenten Teilfolge mit Archimedischer Grenzcopula  $C = C_{\psi, d}$

Im Folgenden benutzen wir für  $\psi_n(a_n \cdot)$  die Notation  ${}^a\psi_n$ . Nach Voraussetzung ist  $(\psi_n)$  eine Folge  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger. Dann ist aber auch  $({}^a\psi_n)$  eine Folge  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger, weswegen die Voraussetzungen von Lemma 4.5 für  ${}^a\psi_n$  erfüllt sind. Daher existiert eine auf  $[0, \infty)$  definierte  $d$ -monotone Funktion  $\psi$  mit  $\psi(0) \in [0, 1]$  und eine Teilfolge  $({}^a\psi_{n_l})$  von  $({}^a\psi_n)$ , die auf kompakten Teilmengen von  $(0, \infty)$  gleichmäßig gegen  $\psi$  konvergiert. Des Weiteren konvergieren für  $\varepsilon > 0$  alle Ableitungen von  ${}^a\psi_{n_l}$  bis zur Ordnung  $d - 2$  gegen die entsprechenden Ableitungen von  $\psi$  auf  $[\varepsilon, \infty)$ .

Wir zeigen im Folgenden, dass  $\psi$  ein Archimedischer Erzeuger ist. Wegen der  $d$ -Monotonie ist  $\psi$  stetig, monoton fallend und konvex. Die Konvexität und Monotonie implizieren die strenge Monotonie auf  $[0, \inf\{x : \psi(x) = 0\})$ . Wir setzen  $p = \psi(0)$  und  $q = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x)$  und zeigen in fünf Schritten, dass  $p = 1$  und  $q = 0$ .

1. Schritt: Wir zeigen, dass  $\psi \not\equiv 1$  und  $\psi \not\equiv 0$ . Die Radialvariable  $R_{{}^a\psi_n, d}$  ist wegen der Bemerkung auf Seite 13 gerade  $a_n^{-1}R_n$  und

$${}^a\psi_n(1) = E \left[ \left( 1 - \frac{a_n}{R_n} \right)_+^{d-1} \right] = E [f(a_n^{-1}R_n)].$$

Mit Hilfe von (4.3.5) und (4.3.6) schätzen wir  ${}^a\psi_n(1)$  nach oben ab.

$$\begin{aligned} E [f(a_n^{-1}R_n)] &= E [f(a_n^{-1}R_n) \mathbf{1}(a_n^{-1}R_n \leq A)] + E [f(a_n^{-1}R_n) \mathbf{1}(a_n^{-1}R_n > A)] \\ &\leq E [f(A)] + E [\mathbf{1}(a_n^{-1}R_n > A)] \\ &= f(A) + 1 - P(a_n^{-1}R_n \leq A) \\ &\leq f(A) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

Daher folgt wegen der punktweisen Konvergenz von  ${}^a\psi_{n_l}$  gegen  $\psi$

$$\psi(1) = \lim_{l \rightarrow \infty} {}^a\psi_{n_l}(1) \leq f(A) + \frac{1}{2} < 1,$$

das heißt  $\psi \neq 1$ . Zusammen mit der Monotonie von  $\psi$  impliziert dies insbesondere  $q \in [0, 1)$ .

In ähnlicher Weise zeigen wir, dass  $\psi \neq 0$ . Mit Hilfe von (4.3.5) und (4.3.6) folgern wir

$$\begin{aligned} E[f(a_n^{-1}R_n)] &= E[f(a_n^{-1}R_n)\mathbf{1}(a_n^{-1}R_n \geq A)] + E[f(a_n^{-1}R_n)\mathbf{1}(a_n^{-1}R_n < A)] \\ &\geq E[f(A)\mathbf{1}(a_n^{-1}R_n \geq A)] \\ &= f(A)(1 - P(a_n^{-1}R_n < A)) \\ &\geq \frac{1}{2}f(A) \end{aligned}$$

und damit

$$\psi(1) = \lim_{l \rightarrow \infty} {}^a\psi_{n_l}(1) \geq \frac{1}{2}f(A) > 0,$$

das heißt  $\psi \neq 0$ . In Verbindung mit der Monotonie von  $\psi$  impliziert dies insbesondere  $p \in (0, 1]$ .

2. Schritt: Wir zeigen, dass  $p \geq 1/2$ . Für  $0 < \varepsilon < A/2$  können wir wegen der punktweisen

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

Konvergenz von  ${}^a\psi_{n_l}$  gegen  $\psi$  ein festes  $k$  wählen, so dass  ${}^a\psi_{n_k}(\varepsilon) - \psi(\varepsilon) < \varepsilon$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 {}^a\psi_{n_k}(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{d-1} dF_{a_{n_k}^{-1}R_{n_k}}(t) \\
 &= \int_{\varepsilon}^{A-\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{d-1} dF_{a_{n_k}^{-1}R_{n_k}}(t) + \int_{A-\varepsilon}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{d-1} dF_{a_{n_k}^{-1}R_{n_k}}(t) \\
 &= \int \mathbf{1}(\varepsilon \leq a_{n_k}^{-1}R_{n_k} \leq A - \varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_{n_k}^{-1}R_{n_k}}\right)^{d-1} dP \\
 &\quad + \int \mathbf{1}(A - \varepsilon \leq a_{n_k}^{-1}R_{n_k} < \infty) \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_{n_k}^{-1}R_{n_k}}\right)^{d-1} dP \\
 &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{A - \varepsilon}\right)^{d-1} \int \mathbf{1}(A - \varepsilon \leq a_{n_k}^{-1}R_{n_k} < \infty) dP \\
 &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{A - \varepsilon}\right)^{d-1} P(a_{n_k}^{-1}R_{n_k} \geq A) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{A - \varepsilon}\right)^{d-1}.
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\psi(\varepsilon) > {}^a\psi_{n_k}(\varepsilon) - \varepsilon \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{A - \varepsilon}\right)^{d-1} - \varepsilon.$$

Daher folgt

$$p = \psi(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \psi(\varepsilon) \geq \frac{1}{2}.$$

3. Schritt: Wir zeigen, dass  $q < 1/2$ . Wegen der Monotonie von  $\psi$  wissen wir bereits, dass  $q \in [0, p]$ . Der Fall  $q = 0$  ist klar. Daher nehmen wir an, dass  $q > 0$  und zeigen, dass auch in diesem Fall  $q < 1/2$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , so dass  $q - \varepsilon > 0$  und setze

$$b_l = {}^a\psi_{n_l}^{-1}(q - \varepsilon).$$

Dann gilt  $b_l \rightarrow \infty$  für  $l \rightarrow \infty$ . Dies sehen wir wie folgt ein. Für ein beliebiges  $L > 0$  gilt

$${}^a\psi_{n_l}(L) \rightarrow \psi(L) \geq q,$$

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

das heißt es existiert ein  $l_0$ , so dass für alle  $l \geq l_0$  gilt

$${}^a\psi_{n_l}(L) > q - \varepsilon.$$

Da  ${}^a\psi_{n_l}(b_l) = q - \varepsilon$  und  ${}^a\psi_{n_l}$  monoton fallend ist, folgt  $b_l \geq L$  und damit die Behauptung.

Wir bezeichnen im Folgenden  $K_{\psi_{n_l},d}$  mit  $K_{n_l}$ . Wegen  $b_l \rightarrow \infty$  für  $l \rightarrow \infty$  gilt für ein genügend großes  $j$

$$P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} \geq b_j\right) \leq P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} > A\right)$$

und somit wegen (3.1.3)

$$\begin{aligned} K_{n_j}(q - \varepsilon) &= P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} \geq a_{n_j}^{-1}\psi_{n_j}^{-1}(q - \varepsilon)\right) \\ &= P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} \geq {}^a\psi_{n_j}^{-1}(q - \varepsilon)\right) \\ &= P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} \geq b_j\right) \leq P\left(a_{n_j}^{-1}R_{n_j} > A\right) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da  $K_{n_j}$  die Kendall Verteilungsfunktion einer Archimedischen Copula ist, gilt (3.1.2). Des Weiteren ist nach Schritt 1 und der Annahme vom Anfang dieses Schrittes  $q \in (0, 1)$ . Dies liefert uns

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{n_j}(q - \varepsilon) = K_{n_j}(q-) > q,$$

weswegen  $q < 1/2$  und insbesondere  $q < p$  folgt.

4. Schritt: Unter Berücksichtigung der kompakten Menge  $[0, 1]^d$  sehen wir, dass die Folge  $(C_{\psi_{n_l},d})$  straff ist. Sie enthält daher eine gegen eine Grenzcopula  $C$  schwach konvergierende Teilfolge, die wir wieder mit  $(C_{\psi_{n_l},d})$  bezeichnen. Dass es sich bei der Grenzfunktion  $C$  tatsächlich um eine Copula handelt, sehen wir wie folgt ein. Wegen der Stetigkeit von  $C$  gilt die Konvergenz punktweise auf  $[0, 1]^d$ . Daher folgen die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 2.3 jeweils mittels Grenzwertbildung. Für die Eigenschaft (iii) betrachten wir  $x, h \in \mathbb{R}^d$  mit  $h > 0$ , so dass alle Ecken von  $(x, x+h]$  in  $[0, 1]^d$  liegen. Wir können  $\Delta_h C(x)$  mit Hilfe von Definition 2.1 als Summe von  $2^d$  Summanden schreiben, wobei jeder Summand aus der Funktion  $C$  mit positivem oder negativem Vorzeichen besteht. Wir bilden nun den Grenzwert, machen die durchgeführten Berechnungen bezüglich  $C_{\psi_{n_l},d}$  wieder rückgängig und erhalten

$$\Delta_h C(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \Delta_h C_{\psi_{n_l},d}(x) \geq 0.$$

Seien nun  $u_1, \dots, u_d \in (q, p)$ . Diese Elemente existieren, da  $(q, p) \neq \emptyset$  wegen  $q < p$ . Wir

zeigen

$$\psi_{n_l} \left( \sum_{i=1}^d \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) \rightarrow \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right).$$

Da  $\psi^{-1}(p) = 0$  und  $\psi^{-1}$  streng monoton fallend auf  $(q, p]$  ist, folgt  $\psi^{-1}(u_i) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$  und somit  $\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) > 0$ . Sei  $0 < \varepsilon < \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i)$ . Wir wissen bereits, dass  ${}^a\psi_{n_l}$  monoton fallend ist und für alle positiven Argumente punktweise gegen  $\psi$  konvergiert. Daher folgt mit Proposition 0.1 in Resnick (2008)

$${}^a\psi_{n_l}^{-1}(x) \rightarrow \psi^{-1}(x), \quad x \in (q, p),$$

und somit

$$\sum_{i=1}^d {}^a\psi_{n_l}^{-1}(u_i) \rightarrow \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i). \quad (4.3.7)$$

Wegen der Stetigkeit von  $\psi$  folgt weiter

$$\psi \left( \sum_{i=1}^d {}^a\psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) \rightarrow \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right).$$

Wir können daher ein  $l_0$  wählen, so dass für alle  $l \geq l_0$  gilt

$$\left| \psi \left( \sum_{i=1}^d {}^a\psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3.8)$$

Wegen (4.3.7) können wir ein  $l_1 \geq l_0$  wählen, so dass für alle  $l \geq l_1$  gilt

$$\left| \sum_{i=1}^d {}^a\psi_{n_l}^{-1}(u_i) - \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right| < \varepsilon.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) - \varepsilon < \sum_{i=1}^d {}^a\psi_{n_l}^{-1}(u_i) < \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) + \varepsilon. \quad (4.3.9)$$

Aufgrund der Wahl von  $\varepsilon$  gilt  $\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) - \varepsilon > 0$ . Da  $\psi^{-1}$  auf  $(q, p)$  endlich ist, gilt weiter  $\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) + \varepsilon < \infty$ . Zusätzlich wissen wir bereits, dass  ${}^a\psi_{n_l}$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $(0, \infty)$  gegen  $\psi$  konvergiert. Aus diesen Gründen können wir

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

ein  $l_2 \geq l_1$  wählen, so dass für alle  $l \geq l_2$  gilt

$$\sup_{x \in [\sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) - \varepsilon, \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) + \varepsilon]} |{}^a \psi_{n_l}(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere gilt wegen (4.3.9)

$$\left| {}^a \psi_{n_l} \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3.10)$$

Mit Hilfe von (4.3.8) und (4.3.10) folgt die zu zeigende Konvergenz, denn

$$\begin{aligned} & \left| \psi_{n_l} \left( \sum_{i=1}^d \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right) \right| \\ &= \left| {}^a \psi_{n_l} \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right) \right| \\ &\leq \left| {}^a \psi_{n_l} \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) \right| \\ &\quad + \left| \psi \left( \sum_{i=1}^d {}^a \psi_{n_l}^{-1}(u_i) \right) - \psi \left( \sum_{i=1}^d \psi^{-1}(u_i) \right) \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit können wir weiter folgern

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \lim_{l \rightarrow \infty} C_{\psi_{n_l}, d}(u_1, \dots, u_d) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \psi_{n_l}(\psi_{n_l}^{-1}(u_1) + \dots + \psi_{n_l}^{-1}(u_d)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)). \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass die Gleichheit für  $u_1, \dots, u_d \in (q, p)$  gezeigt wurde. Wir zeigen später im 5. Schritt, dass  $q = 0$  und  $p = 1$ , das heißt die Gleichheit gilt dann auf  $(0, 1)^d$ . Dass die Gleichheit aber auch auf  $[0, 1]^d$  erfüllt ist, sehen wir wie folgt ein. Falls  $u_i = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$ , dann folgt

$$C(u_1, \dots, u_d) = 0 = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)).$$

### 4.3 Weitere Vorüberlegungen

---

Falls ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u_1 = \dots = u_m = 1$  für  $1 \leq m \leq d$ , dann folgt

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= C(u_{m+1}, \dots, u_d) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_{m+1}) + \dots + \psi^{-1}(u_d)) \\ &= \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)). \end{aligned}$$

Des Weiteren folgt wegen  $C_{\psi_{n_l}, d} \rightsquigarrow C$  mit Satz 4.1, dass  $K_{\psi_{n_l}, d} \rightsquigarrow K^*$ , wobei  $K^*$  die Kendall Verteilungsfunktion von  $C$  ist. Nach Voraussetzung gilt  $K_{\psi_n, d} \rightsquigarrow K$ , weswegen  $K = K^*$  folgt, das heißt  $K$  ist die Kendall Verteilungsfunktion von  $C$ .

5. Schritt: Als erstes zeigen wir  $p = 1$ . Sei  $x_n = (x_{n1}, \dots, x_{nd}) \uparrow (p, \dots, p)$ . Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}(x_{n1}) + \dots + \psi^{-1}(x_{nd}) = \psi^{-1}(p) + \dots + \psi^{-1}(p)$$

und somit

$$\begin{aligned} C(p, \dots, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C(x_{n1}, \dots, x_{nd}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\psi^{-1}(x_{n1}) + \dots + \psi^{-1}(x_{nd})) \\ &= \psi(\psi^{-1}(p) + \dots + \psi^{-1}(p)) \\ &= \psi(0) \\ &= p. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass  $C$  keine Masse in der Menge  $[0, 1]^d \setminus ([0, p]^d \cup [p, 1]^d)$  hat. Falls daher  $(U_1, \dots, U_d)$  die Verteilungsfunktion  $C$  hat, dann folgt

$$\begin{aligned} K(p) &= P(C(U_1, \dots, U_d) \leq p) \\ &\leq P(U_1 \leq p, \dots, U_d \leq p) \\ &= C(p, \dots, p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Somit folgt  $p = 1$ , denn angenommen es gelte  $p \neq 1$ , dann würde wegen (3.1.2) der Widerspruch  $K(p) \geq K(p-) > p$  folgen.

Jetzt zeigen wir  $q = 0$ . Falls ein  $x \in (0, \infty)$  existiert mit  $\psi(x) = 0$ , dann folgt wegen der

Monotonie  $q = 0$ . Andernfalls gilt

$$\begin{aligned}
 C(q, \dots, q) &= \lim_{x \rightarrow \infty} C(\psi(x), \dots, \psi(x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(\psi^{-1}(\psi(x)) + \dots + \psi^{-1}(\psi(x))) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(dx) \\
 &= q.
 \end{aligned}$$

Analog zu oben können wir zeigen, dass  $K(q) \leq q$  und somit  $q = 0$ . Die Funktion  $\psi$  ist also tatsächlich ein Archimedischer Erzeuger und  $C = C_{\psi,d}$ .

Teil 3: Konvergenz der Ausgangsfolge  $(C_{\psi_n,d})$  gegen eine eindeutig bestimmte Archimedische Grenzcopula  $C_{\psi,d}$

Wir wissen, dass  $(C_{\psi_n,d})$  eine straffe Folge ist und zeigen, dass jede Teilfolge von  $(C_{\psi_n,d})$ , die überhaupt schwach konvergiert, schon gegen die Grenze  $C_{\psi,d}$  schwach konvergieren muss. Dann folgt mit dem Korollar zu Theorem 25.10 in Billingsley (1995), dass

$$C_{\psi_n,d} \rightsquigarrow C_{\psi,d}.$$

Jede schwach konvergente Teilfolge von  $(C_{\psi_n,d})$  enthält wegen Teil 2 eine Teilfolge, die gegen eine Archimedische Grenzcopula schwach konvergiert, deren Kendall Verteilungsfunktion  $K$  ist. Daher konvergiert schon jede schwach konvergente Teilfolge von  $(C_{\psi_n,d})$  schwach gegen eine Archimedische Grenzcopula mit Kendall Verteilungsfunktion  $K$ . Da alle Archimedischen Grenzcopulas die gleiche Kendall Verteilungsfunktion haben, stimmen diese wegen der Aussagen aus Kapitel 4.1 überein. Nach Teil 2 existiert weiter ein  $d$ -monotoner Archimedischer Erzeuger  $\psi$  mit  $K_{\psi,d} = K$ . Somit ist die eindeutig bestimmte Archimedische Grenzcopula gerade  $C_{\psi,d}$ .  $\square$

Satz 4.6 ermöglicht es uns, die Aussage von Satz 3.3 im 2- und 3-dimensionalen Fall auf stetige und diskrete Verteilungsfunktionen mit nichtendlichem Träger zu verallgemeinern.

**Korollar 4.7.** *Sei  $K$  eine Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$ , die (3.1.2) erfüllt. Falls  $d \in \{2, 3\}$ , dann existiert eine eindeutig bestimmte Archimedische Copula  $C_{\psi,d}$ , so dass  $K = K_{\psi,d}$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $K$  eine Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$ , die (3.1.2) erfüllt. Wir zeigen mit Hilfe von Satz 3.3, dass eine Folge  $(\psi_n)$  von  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeugern existiert, so dass  $K_{\psi_n,d} \rightsquigarrow K$ . Dann folgt die Aussage direkt aus Satz 4.6.

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $w \in [0, 1]$  definieren wir

$$\kappa_n(w) = \begin{cases} K((j+1)/n) & , \quad w \in [j/n, (j+1)/n), j \in \{0, \dots, n-1\}, \\ 1 & , \quad w = 1. \end{cases}$$

$\kappa_n$  ist eine diskrete Verteilungsfunktion auf  $[0, 1]$  mit endlichem Träger. Wir zeigen, dass  $\kappa_n$  Bedingung (3.1.2) erfüllt. Für den Fall, dass  $j/n < w < (j+1)/n$  für ein  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ , folgt

$$\kappa_n(w-) = K\left(\frac{j+1}{n}\right) \geq K\left(\frac{j+1}{n}-\right) > \frac{j+1}{n} > w.$$

Für den Fall, dass  $w = j/n$  für ein  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , folgt

$$\kappa_n(w-) = K\left(\frac{j}{n}\right) > \frac{j}{n} = w.$$

Die Voraussetzungen von Satz 3.3 sind somit alle erfüllt und wir erhalten für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen  $d$ -monotonen Archimedischen Erzeuger  $\psi_n$  und eine eindeutige Archimedische Copula  $C_{\psi_n, d}$ , so dass  $K_{\psi_n, d} = \kappa_n$ .

Es verbleibt zu zeigen, dass  $\kappa_n \rightsquigarrow K$ . Der Fall  $w = 1$  ist klar. Sei also  $w \in [0, 1)$ . Dann existiert ein  $j = j(n) \in \{0, \dots, n-1\}$ , so dass  $w \in [j/n, (j+1)/n)$ . Somit folgt

$$|\kappa_n(w) - K(w)| = K\left(\frac{j+1}{n}\right) - K(w) \rightarrow K(w) - K(w) = 0,$$

wobei die Konvergenz wegen der Rechtsstetigkeit von  $K$  gilt. Somit folgt  $\kappa_n \rightsquigarrow K$ . □

Zwischen einer Archimedischen Copula und der Funktion  $\lambda$  liegt eine 1:1-Beziehung vor, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 4.8.** *Seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zwei  $d$ -monotone Archimedische Erzeuger. Dann gilt  $C_{\psi_1, d} = C_{\psi_2, d}$  genau dann, wenn  $\lambda_{\psi_1}(w) = \lambda_{\psi_2}(w)$  für alle  $w \in (0, 1]$  gilt.*

*Beweis.* Wir beweisen als erstes die Hinrichtung. Der Fall  $w = 1$  ist klar. Sei daher  $w \in (0, 1)$ . Da  $C_{\psi_1, d} = C_{\psi_2, d}$ , sind insbesondere die 2-dimensionalen Randverteilungen  $C_{\psi_1, 2}$  und  $C_{\psi_2, 2}$  gleich. Daher folgt zunächst  $K_{\psi_1, 2}(w) = K_{\psi_2, 2}(w)$  und somit wegen (4.1.2), dass  $\lambda_{\psi_1}(w) = \lambda_{\psi_2}(w)$  gilt.

Für die Rückrichtung zeigen wir, dass ein  $c > 0$  existiert, so dass  $\phi_1(w) = c \cdot \phi_2(w)$  für alle  $w \in [0, 1]$  gilt. Dann folgt die Behauptung mit der Bemerkung auf Seite 13. Sei  $y \in (0, 1)$

und setze  $c = \phi_1(y)/\phi_2(y)$ . Der Fall  $w = 1$  ist klar. Sei daher zunächst  $w \in (0, 1)$ . Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{\phi_1(w)}{\phi_1'(w)} = \frac{\phi_2(w)}{\phi_2'(w)}.$$

Damit folgt weiter

$$\log \left( \frac{\phi_1(y)}{\phi_1(w)} \right) = \int_w^y \frac{\phi_1'(z)}{\phi_1(z)} dz = \int_w^y \frac{\phi_2'(z)}{\phi_2(z)} dz = \log \left( \frac{\phi_2(y)}{\phi_2(w)} \right)$$

und somit

$$\frac{\phi_1(y)}{\phi_1(w)} = \frac{\phi_2(y)}{\phi_2(w)},$$

so dass

$$\phi_1(w) = \frac{\phi_1(y)}{\phi_2(y)} \phi_2(w) = c \cdot \phi_2(w).$$

Weiter ergibt sich

$$\phi_1(0) = \lim_{w \downarrow 0} \phi_1(w) = \lim_{w \downarrow 0} c \cdot \phi_2(w) = c \cdot \phi_2(0).$$

□

## 4.4 Die Konsistenzaussage

Seien  $\mathcal{C}([0, 1]^d)$  der mit der Supremumsnorm ausgestattete Raum der stetigen Funktionen auf  $[0, 1]^d$  und  $\mathcal{B}([0, 1])$  der mit der Supremumsnorm ausgestattete Raum der beschränkten Funktionen auf  $[0, 1]$ . Weiter sei  $\mathcal{D}([0, 1])$  der Raum der càdlàg Funktionen auf  $[0, 1]$ , das heißt der Funktionen auf  $[0, 1]$ , die rechtsstetig sind und für die alle linksseitigen Grenzwerte existieren. Wir bezeichnen mit  $\Lambda$  die Menge der stetigen und streng monoton wachsenden Funktionen von  $[0, 1]$  auf  $[0, 1]$ . Für  $f, g \in \mathcal{D}([0, 1])$  definieren wir  $d(f, g)$  als das Infimum aller  $\varepsilon \geq 0$ , für die ein  $\lambda \in \Lambda$  existiert, so dass

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| \leq \varepsilon$$

und

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon.$$

Nach Billingsley (1968, S.111) ist  $d$  eine Metrik, die sogenannte Skorohod Metrik. Wir statten den Raum  $\mathcal{D}([0, 1])$  mit dieser Metrik aus.

Mit Hilfe der vorherigen Aussagen ist es nun möglich, die Konsistenz von  $C_{n,d}$  und  $\lambda_{n,d}$  zu zeigen.

**Satz 4.9.** *Sei  $(X_{11}, \dots, X_{1d}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nd})$  eine Stichprobe einer stetigen Verteilung mit zugrundeliegender Archimedischer Copula  $C_{\psi,d}$  und Kendall Verteilungsfunktion  $K_{\psi,d}$ . Des Weiteren seien  $C_{n,d}$  der in (3.3.2) definierte Schätzer von  $C_{\psi,d}$  und  $\lambda_{n,d}$  der in (3.3.3) definierte Schätzer von  $\lambda_{\psi}$ . Falls  $d \in \{2, 3\}$  und  $K_{\psi,d}$  die Regularitätsannahmen I und II in Barbe et al. (1996) erfüllt, dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i)  $C_{n,d}$  konvergiert in  $\mathcal{C}([0, 1]^d)$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $C_{\psi,d}$ , das heißt für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^* \left( \sup_{u_1, \dots, u_d \in [0, 1]} |C_{n,d}(u_1, \dots, u_d) - C_{\psi,d}(u_1, \dots, u_d)| > \varepsilon \right) = 0,$$

wobei wir mit  $P^*$  äußere Wahrscheinlichkeit bezeichnen.

- (ii)  $\lambda_{n,d}$  konvergiert in  $\mathcal{B}([0, 1])$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\lambda_{\psi}$ , das heißt für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^* \left( \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda_{n,d}(t) - \lambda_{\psi}(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

*Beweis.* (i) Die Beweisidee sieht wie folgt aus. Nach Barbe et al. (1996) konvergiert unser Schätzer der Kendall Verteilungsfunktion in Wahrscheinlichkeit gegen die wahre Kendall Verteilungsfunktion. Wir definieren daher eine stetige Abbildung, die eine Kendall Verteilungsfunktion auf ihre eindeutig bestimmte Archimedische Copula abbildet. Die Aussage folgt dann aus dem Continuous Mapping Theorem.

Sei  $\mathcal{D}_0([0, 1]) \subset \mathcal{D}([0, 1])$  die Menge der Verteilungsfunktionen auf  $[0, 1]$ , die Bedingung (3.1.2) erfüllen. Wir definieren eine Abbildung  $f : \mathcal{D}_0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]^d)$ , die eine Kendall Verteilungsfunktion auf ihre wegen Korollar 4.7 existente und eindeutig bestimmte Archimedische Copula abbildet.

Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von  $f$ . Sei dazu  $\kappa \in \mathcal{D}_0([0, 1])$  und  $(\kappa_n)$  eine Folge in  $\mathcal{D}_0([0, 1])$ , die gegen  $\kappa$  bezüglich der Skorohod Metrik konvergiert. Dann folgt wegen Billingsley (1968, S. 112)  $\kappa_n \rightsquigarrow \kappa$ . Mit Hilfe von Satz 4.6 folgt  $f(\kappa_n) \rightsquigarrow f(\kappa)$ . Da  $f(\kappa)$  stetig ist, gilt  $f(\kappa_n) \rightarrow f(\kappa)$  auf  $[0, 1]^d$ . Die Menge  $[0, 1]^d$  ist kompakt und die Familie der Copulas ist wegen Nelsen (2006, Theorem 2.10.7) gleichgradig stetig. Somit folgt wegen Martio

et al. (2009, Theorem 7.1), dass  $f(\kappa_n) \rightrightarrows f(\kappa)$ , was gerade der Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm entspricht.

Unter den Regularitätsannahmen I und II in Barbe et al. (1996) gilt für den in (3.2.2) definierten Schätzer  $K_{n,d}$

$$K_{n,d} \xrightarrow{P} K_{\psi,d}$$

bezüglich der Skorohod Metrik. Nach Lemma 3.7 gilt  $K_{n,d} \in \mathcal{D}_0([0,1])$ . Da  $K_{\psi,d}$  die Kendall Verteilungsfunktion einer Archimedischen Copula ist, erfüllt sie Bedingung (3.1.2), das heißt  $K_{\psi,d} \in \mathcal{D}_0([0,1])$ . Daher folgt mit dem Continuous Mapping Theorem

$$C_{n,d} = f(K_{n,d}) \xrightarrow{P} f(K_{\psi,d}) = C_{\psi,d}$$

bezüglich der Supremumsnorm, das heißt für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^* \left( \sup_{u \in [0,1]^d} |C_{n,d}(u) - C_{\psi,d}(u)| > \varepsilon \right) = 0.$$

(ii) Wir verwenden eine zu (i) analoge Beweisidee.

Seien  $\mathcal{D}_0([0,1])$  und  $f$  definiert wie in Teil (i). Seien weiter  $\mathcal{D}_1([0,1]) \subset \mathcal{D}_0([0,1])$  die Menge der stetigen Verteilungsfunktionen auf  $[0,1]$ , die Bedingung (3.1.2) erfüllen und  $\mathcal{C}_0([0,1]^d) \subset \mathcal{C}([0,1]^d)$  die Menge der  $d$ -dimensionalen Archimedischen Copulas. Wegen Lemma 4.8 können wir eine Abbildung  $g : \mathcal{C}_0([0,1]^d) \rightarrow \mathcal{B}([0,1])$  definieren, die einer Archimedischen Copula ein eindeutig bestimmtes  $\lambda$  zuordnet. Weiter ist die Komposition  $h = g \circ f : \mathcal{D}_0([0,1]) \rightarrow \mathcal{B}([0,1])$  wohldefiniert.

Wir zeigen die Stetigkeit von  $h$  auf  $\mathcal{D}_1([0,1])$ . Seien  $\kappa \in \mathcal{D}_1([0,1])$  und  $(\kappa_n)$  eine Folge in  $\mathcal{D}_0([0,1])$ , die gegen  $\kappa$  bezüglich der Skorohod Metrik konvergiert. Analog zum Beweis von (i) folgt dann  $f(\kappa_n) \rightrightarrows f(\kappa)$ . Seien  $C_{n;2}$  und  $C_2$  die 2-dimensionalen Randverteilungen von  $f(\kappa_n)$  und  $f(\kappa)$ , wobei das Semikolon als Unterscheidung zu unserem in (3.3.2) hergeleiteten Schätzer dient. Es gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{u_1, u_2 \in [0,1]} |C_{n;2}(u_1, u_2) - C_2(u_1, u_2)| \\ &= \sup_{u_1, u_2 \in [0,1]} |f(\kappa_n)(u_1, u_2, 1, \dots, 1) - f(\kappa)(u_1, u_2, 1, \dots, 1)| \\ &\leq \sup_{u \in [0,1]^d} |f(\kappa_n)(u) - f(\kappa)(u)| \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

das heißt  $C_{n;2} \Rightarrow C_2$ . Somit gilt auch die schwache Konvergenz und wir können mit Satz 4.1 folgern, dass  $\kappa_{n;2} \rightsquigarrow \kappa_2$ , wobei  $\kappa_{n;2}$  und  $\kappa_2$  die Kendall Verteilungsfunktionen von  $C_{n;2}$  und  $C_2$  sind. Da  $\kappa_2$  stetig ist (s. Genest et al. (2011, Kapitel 5.3)), gilt  $\kappa_{n;2} \Rightarrow \kappa_2$ .  $\lambda$  ist unabhängig von der Dimension und somit folgt wegen (4.1.2), dass  $h(\kappa_n) = h(\kappa_{n;2}) = id - \kappa_{n;2}$  und  $h(\kappa) = h(\kappa_2) = id - \kappa_2$ , weswegen wir weiter folgern können, dass  $h(\kappa_n) \Rightarrow h(\kappa)$ .

Unter der Regularitätsannahme I in Barbe et al. (1996) gilt  $K_{\psi,d} \in \mathcal{D}_1([0,1])$ . Daher können wir mit dem Continuous Mapping Theorem folgern

$$\lambda_{n,d} = h(K_{n,d}) \xrightarrow{P} h(K_{\psi,d}) = \lambda_{\psi}$$

bezüglich der Supremumsnorm, das heißt für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^* \left( \sup_{t \in [0,1]} |\lambda_{n,d}(t) - \lambda_{\psi}(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

□

## 5 Simulation

In diesem Kapitel überprüfen wir die Güte unserer Schätzer  $\lambda_{n,d}$  und  $C_{n,d}$  für eine endliche Anzahl an Beobachtungen.

Wir betrachten zwei weitverbreitete einparametrische Familien Archimedischer Copulas, die von Frank (1979) eingeführte Frank Familie und die von Gumbel (1960) eingeführte Gumbel-Hougaard Familie. Die Archimedischen Erzeuger sowie deren Inversen und die Parameterbereiche sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Um verschiedene Abhängigkeiten zu betrachten, können wir auf den Rangkorrelationskoeffizienten Kendalls Tau  $\tau$  zurückgreifen. Dieser wird häufig zur Kalibrierung einer Copula an empirische Daten verwendet. Der genaue Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und den Parametern der zwei Familien, die wir betrachten, wird in Tabelle 5.2 dargestellt.

Wir betrachten  $\tau = 0.25$  und  $\tau = 0.5$ . Neben den Dimensionen  $d = 2$  und  $d = 3$ , für die wir die Konsistenz der Schätzer gezeigt haben, betrachten wir noch den Fall  $d = 5$ . Als Stichprobengröße wählen wir  $n = 200$  und  $n = 1000$ .

Als erstes beschäftigen wir uns mit dem Schätzer  $\lambda_{n,d}$ . Um einen ersten Eindruck des Schätzers zu erhalten, sind in den Abbildungen 5.1 und 5.2 die Ergebnisse einer Schätzung für die Frank und Gumbel-Hougaard Copula dargestellt. Durch die Erhöhung der Anzahl der Beobachtungen werden die Schätzer genauer. Dies steht in Einklang mit der bewiesenen Konsistenz des Schätzers im 2- und 3-dimensionalen Fall. Auch im 5-dimensionalen Fall, in dem die Konsistenz von der Frage abhängig ist, ob eine Archimedische Copula eindeutig durch ihre Kendall Verteilungsfunktion bestimmt ist, liefert der Schätzer ähnlich

**Tab.5.1:** Archimedischer Erzeuger, Inverse und Parameterbereich der Frank und Gumbel-Hougaard Familie.

Familie	$\psi_{\theta}(x)$	$\phi_{\theta}(y)$	$\theta \in$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + e^{-t}(e^{-\theta} - 1))$	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel-Hougaard	$e^{-x^{\frac{1}{\theta}}}$	$(-\ln y)^{\theta}$	$[1, \infty)$

**Tab.5.2:** Beziehung zwischen Kendalls Tau und dem Parameter  $\theta$  der Frank und Gumbel-Hougaard Familie.  $D_1$  ist die Debye Funktion 1. Ordnung, definiert durch  $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t-1} dt$ .

Familie	$\tau$
Frank	$1 - 4 \frac{1-D_1(\theta)}{\theta}$
Gumbel-Hougaard	$\frac{\theta-1}{\theta}$

gute Ergebnisse. Weiter ist zu beobachten, dass die Schätzer mit zunehmender Dimension glatter werden.

Um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, reicht jedoch eine einmalige Durchführung der Schätzung nicht aus. Daher erhöhen wir im Folgenden die Anzahl der Durchführungen. Wir berechnen den maximalen Abstand von  $\lambda_{n,d}$  zur wahren Funktion  $\lambda_\psi$ , definiert durch

$$\sup_{w \in (0,1]} |\lambda_\psi(w) - \lambda_{n,d}(w)|.$$

Wir führen die Schätzung mit insgesamt 10000 zufällig erzeugten Stichproben durch und erhalten damit eine empirische Verteilungsfunktion des maximalen Abstands, die wir mit  $F_d$  bezeichnen. Die empirischen Verteilungsfunktionen sind in den Abbildungen 5.3 und 5.4 für die Frank und Gumbel-Hougaard Copula dargestellt. Die vorherigen Ergebnisse der einmaligen Durchführung bestätigen sich hier. Durch die Erhöhung der Anzahl an Beobachtungen verschieben sich die empirischen Verteilungsfunktionen nach links, das heißt es erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass der maximale Abstand höchstens einem vorgegebenen Wert entspricht. Dies steht in Einklang zur Konsistenz. Eine weitere Beobachtung ist, dass sich die empirischen Verteilungsfunktionen bei fester Anzahl an Beobachtungen mit steigender Dimension ebenfalls nach links verschieben.

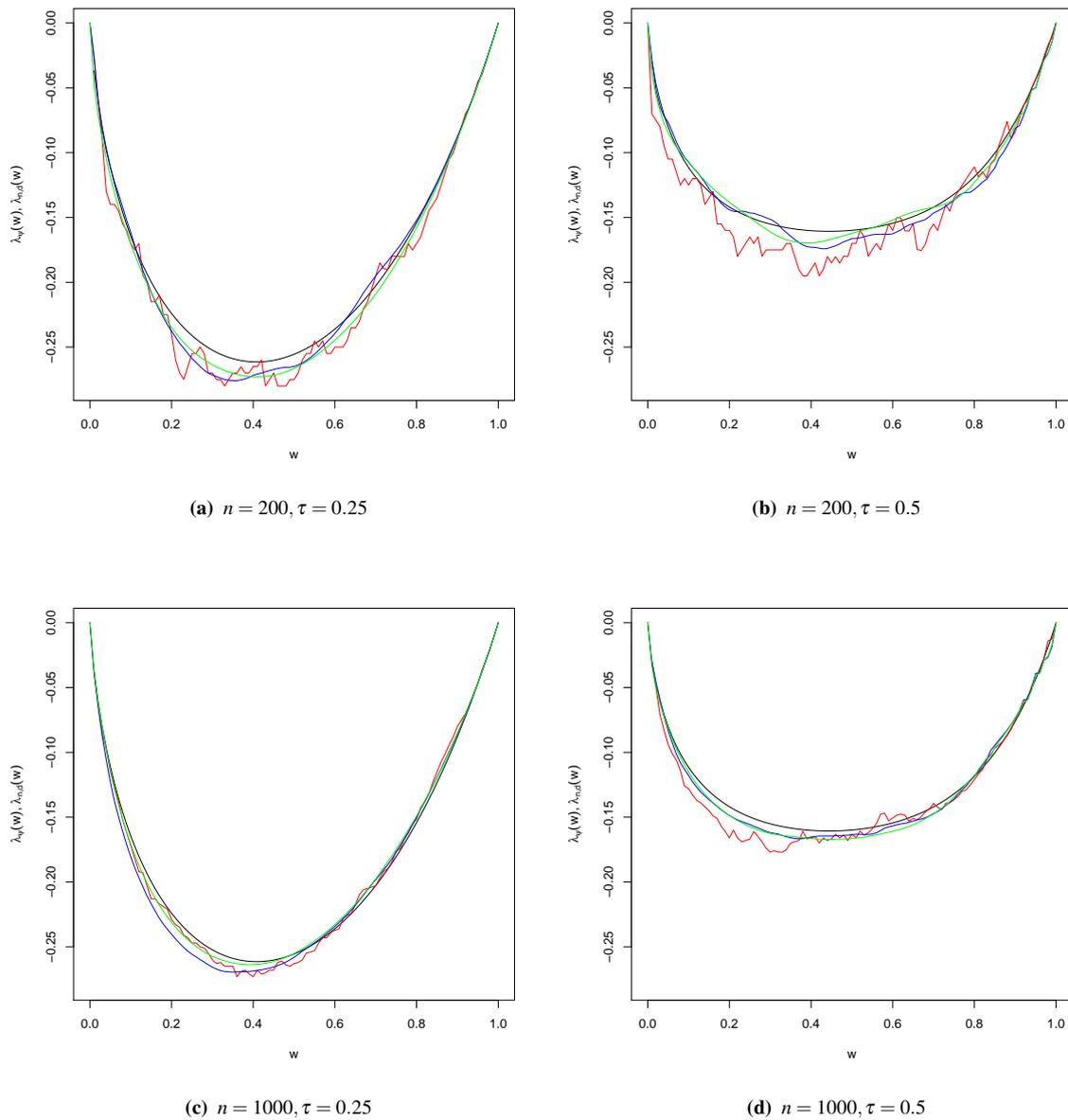
Als zweites betrachten wir den Schätzer  $C_{n,d}$ . Um einen ersten Eindruck des Schätzers im 2-dimensionalen Fall zu erhalten, vergleichen wir in Abbildung 5.5 die Konturdiagramme der zugrundeliegenden Archimedischen Copula mit den Konturdiagrammen der geschätzten Archimedischen Copula für die Frank und Gumbel-Hougaard Copula. Die Schätzer basieren dabei auf derjenigen Stichprobe, mit der auch die entsprechenden Schätzer für  $\lambda_\psi$  in den Abbildungen 5.1 und 5.2 konstruiert wurden. Wie zu erkennen ist, verbessert sich die Genauigkeit der Schätzung mit steigender Anzahl an Beobachtungen.

Jedoch müssen wir auch hier wieder auf eine größere Anzahl an Durchführungen zurückgreifen, um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten. Wir berechnen den maximalen Ab-

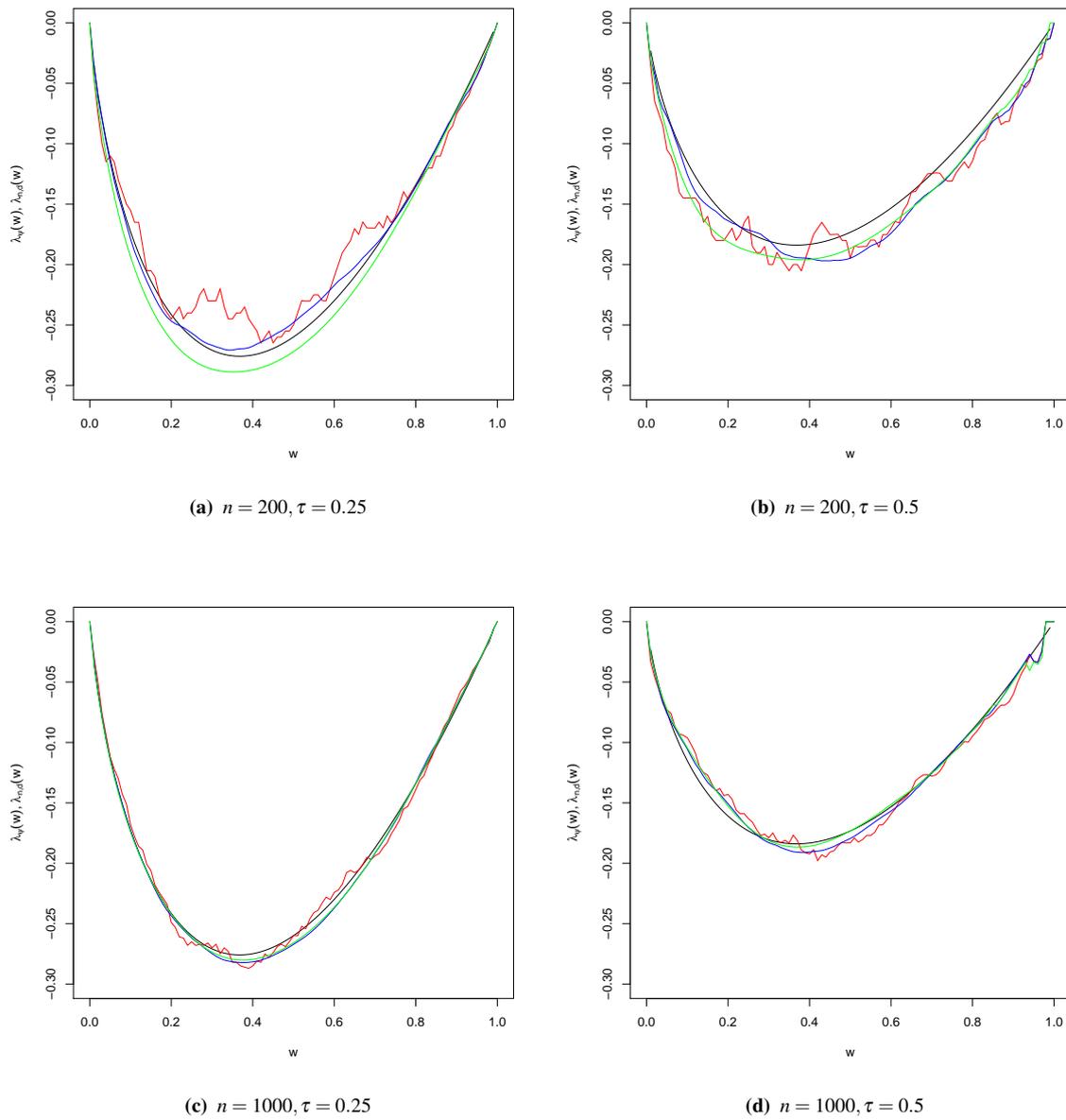
stand von  $C_{n,d}$  zur zugrundeliegenden Archimedischen Copula  $C_{\psi,d}$ , definiert durch

$$\sup_{u \in [0,1]^d} |C_{\psi,d}(u) - C_{n,d}(u)|.$$

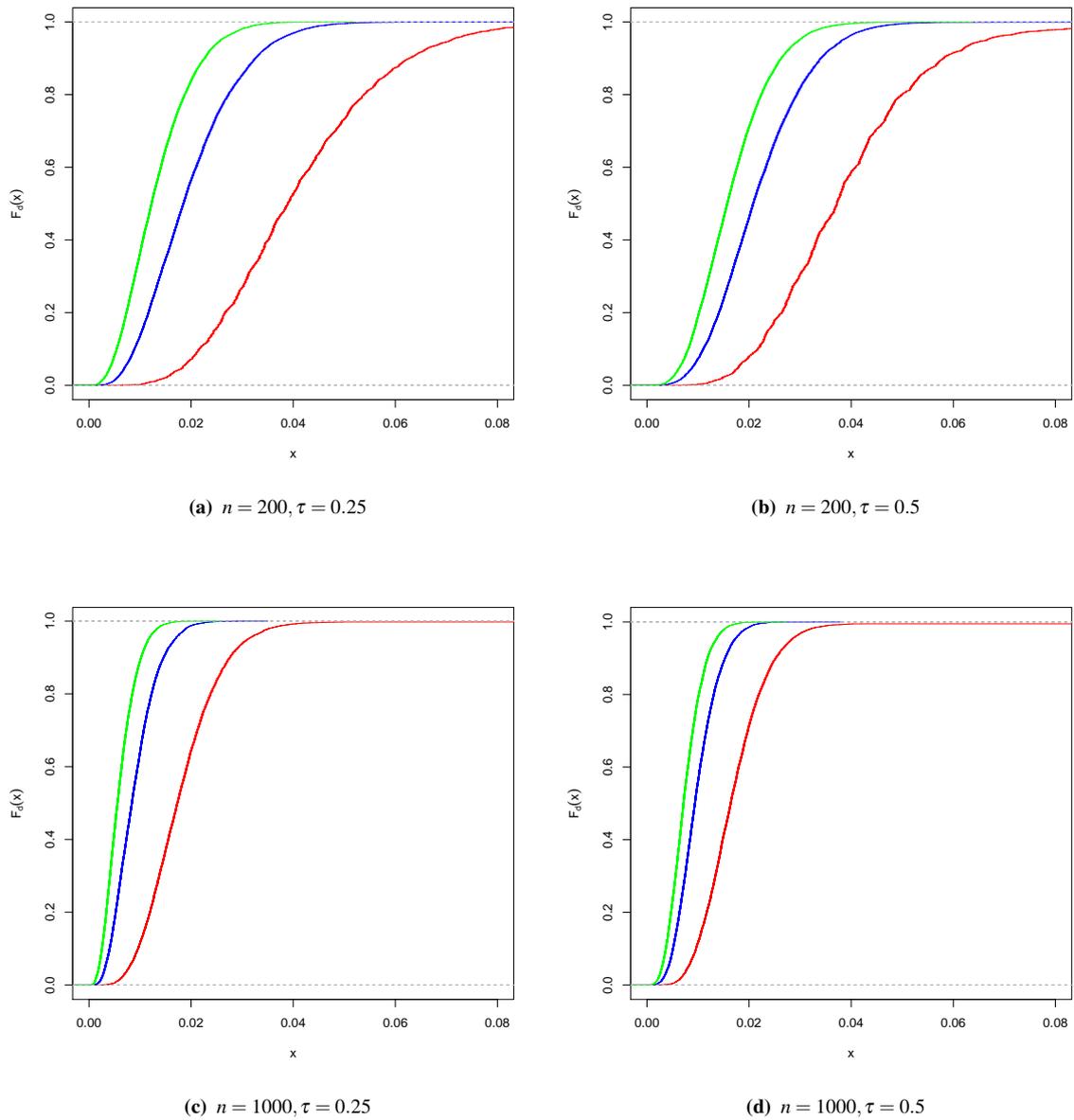
Wir führen die Schätzung für den 2-dimensionalen Fall mit insgesamt 3000 und für den 3-dimensionalen Fall mit insgesamt 2000 zufällig erzeugten Stichproben durch und erhalten damit eine empirische Verteilungsfunktion des maximalen Abstands, die wir mit  $H_d$  bezeichnen. Die empirischen Verteilungsfunktionen sind in den Abbildungen 5.6 und 5.7 für die Frank und Gumbel-Hougaard Copula jeweils für den 2- und 3-dimensionalen Fall dargestellt. Wie zu erkennen ist, erhöht sich auch hier mit steigender Anzahl an Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit für kleinere maximale Abstände.



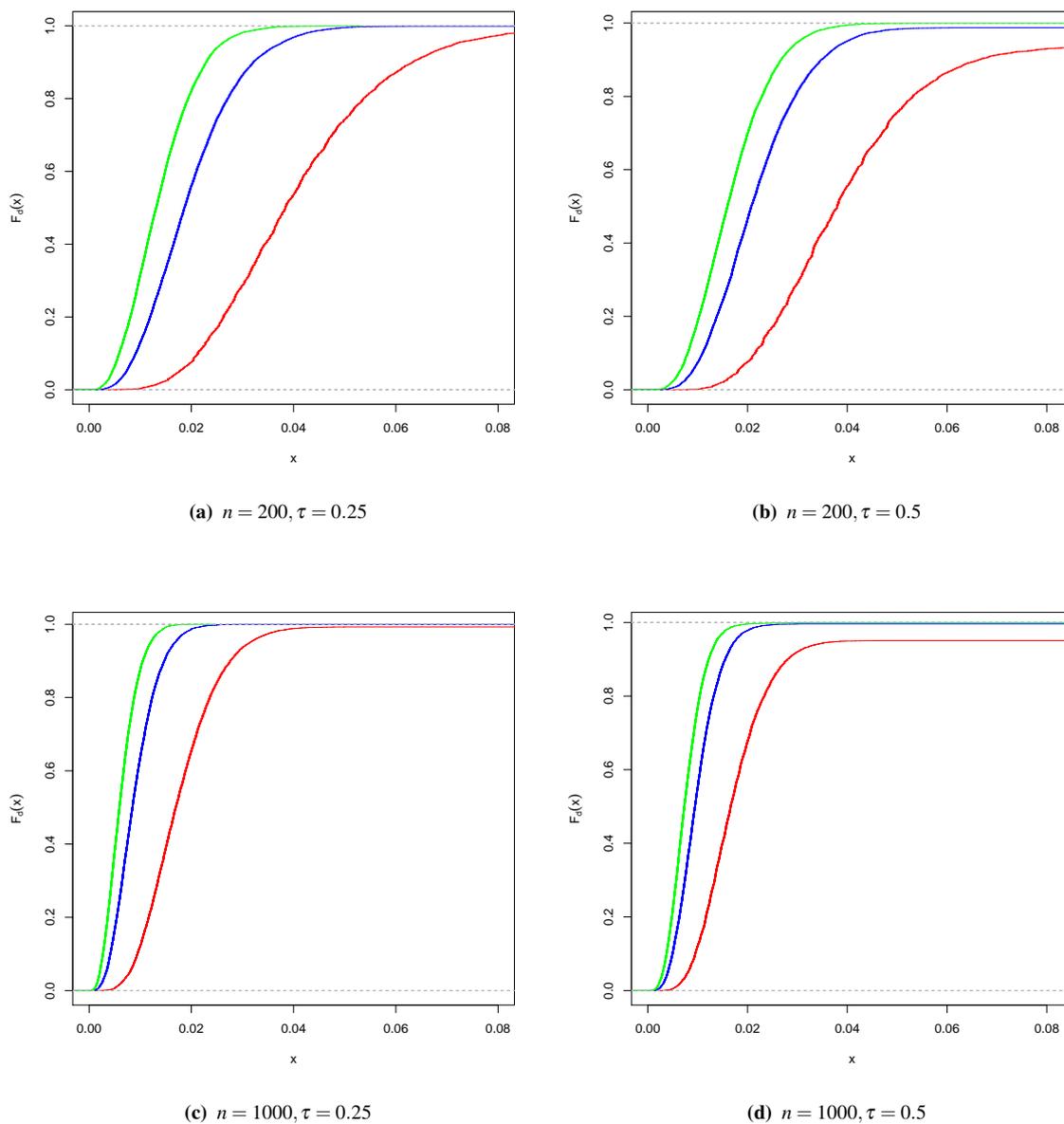
**Abb.5.1:** Schätzer  $\lambda_{n,d}$  für die wahre Funktion  $\lambda_\psi$  der Frank Copula.  $\lambda_\psi$  ist in schwarz und  $\lambda_{n,d}$  für  $d = 2, 3, 5$  jeweils in rot, blau und grün eingezeichnet.



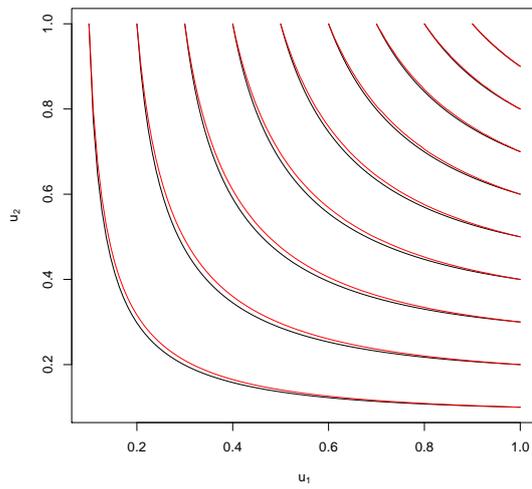
**Abb.5.2:** Schätzer  $\lambda_{n,d}$  für die wahre Funktion  $\lambda_\psi$  der Gumbel-Hougaard Copula.  $\lambda_\psi$  ist in schwarz und  $\lambda_{n,d}$  für  $d = 2, 3, 5$  jeweils in rot, blau und grün eingezeichnet.



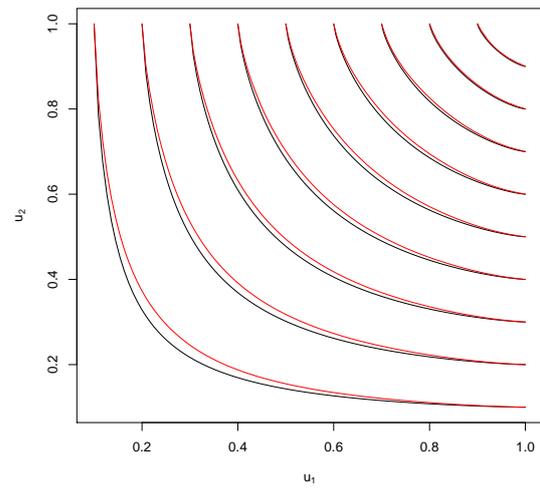
**Abb.5.3:** Empirische Verteilungsfunktionen des maximalen Abstands des Schätzers  $\lambda_{n,d}$  zur wahren Funktion  $\lambda_\psi$  der Frank Copula. Die empirischen Verteilungsfunktionen wurden jeweils anhand von 10000 zufällig erzeugten Stichproben berechnet und sind für  $d = 2, 3, 5$  jeweils in rot, blau und grün eingezeichnet.



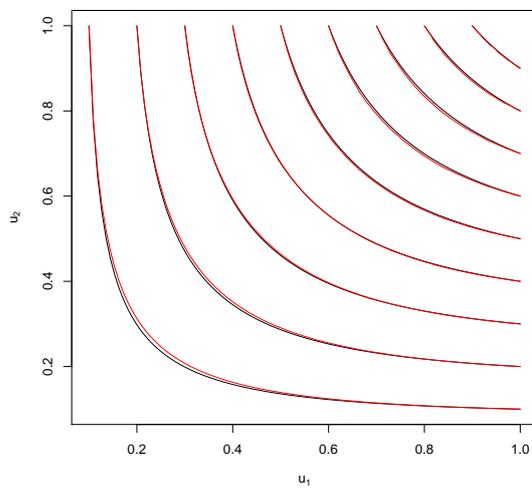
**Abb. 5.4:** Empirische Verteilungsfunktionen des maximalen Abstands des Schätzers  $\lambda_{n,d}$  zur wahren Funktion  $\lambda_\psi$  der Gumbel-Hougaard Copula. Die empirischen Verteilungsfunktionen wurden jeweils anhand von 10000 zufällig erzeugten Stichproben berechnet und sind für  $d = 2, 3, 5$  jeweils in rot, blau und grün eingezeichnet.



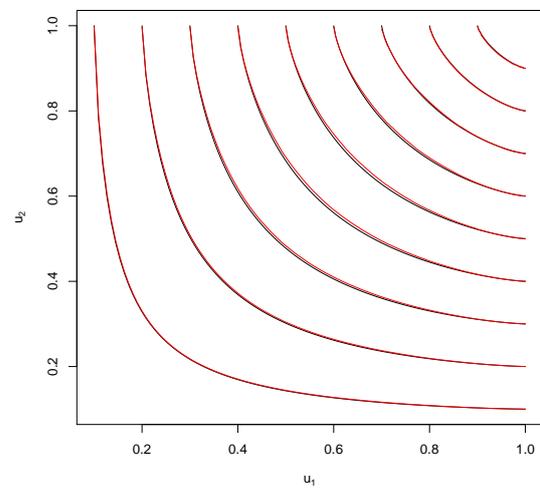
(a) Frank,  $n = 200$



(b) Gumbel-Hougaard,  $n = 200$

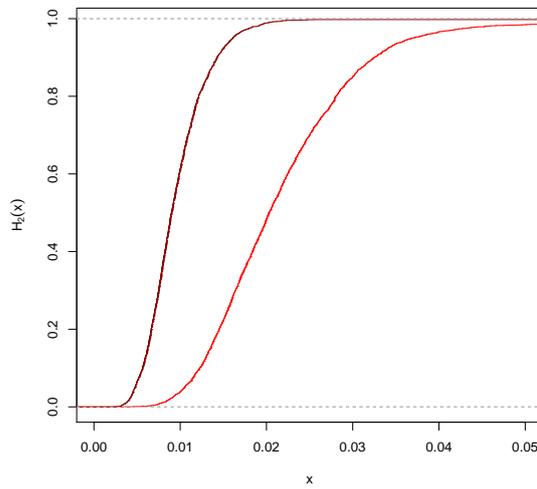


(c) Frank,  $n = 1000$

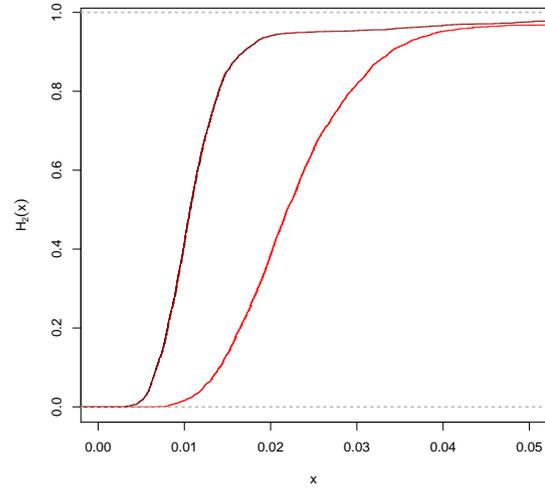


(d) Gumbel-Hougaard,  $n = 1000$

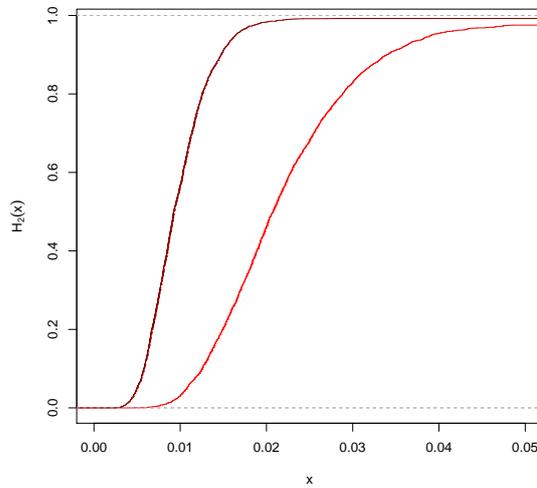
**Abb.5.5:** Konturdiagramme des Schätzers  $C_{n,2}$  für  $\tau = 0.25$  und die Niveaus  $0.1, 0.2, \dots, 0.9$ . Das Konturdiagramm der wahren Copula ist in schwarz und das Konturdiagramm der geschätzten Copula in rot eingezeichnet.



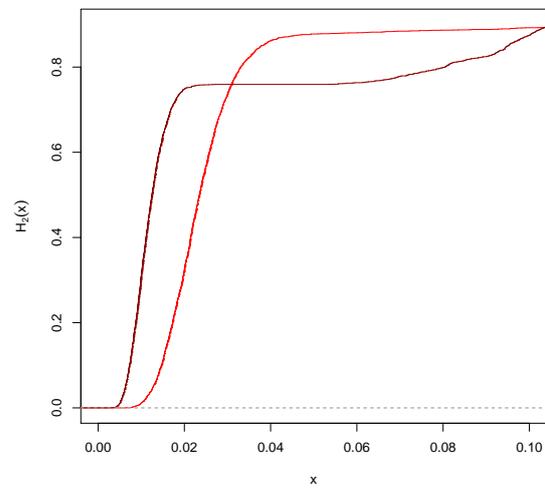
(a) Frank,  $\tau = 0.25$



(b) Frank,  $\tau = 0.5$

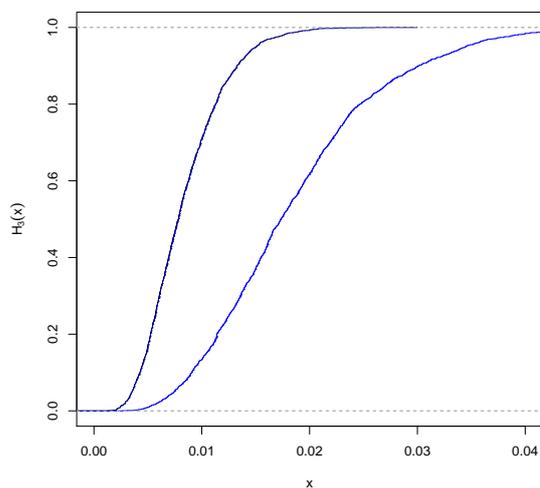


(c) Gumbel-Hougaard,  $\tau = 0.25$

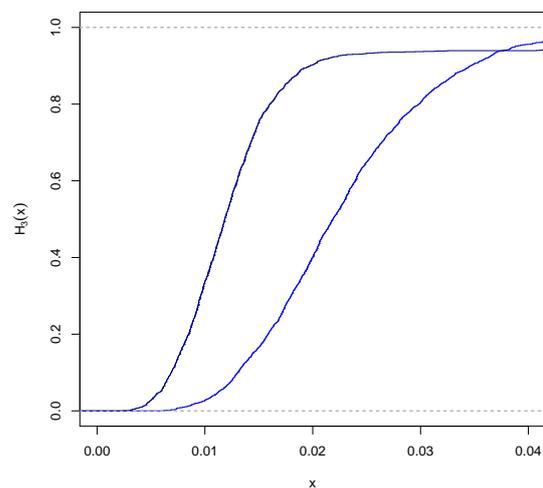


(d) Gumbel-Hougaard,  $\tau = 0.5$

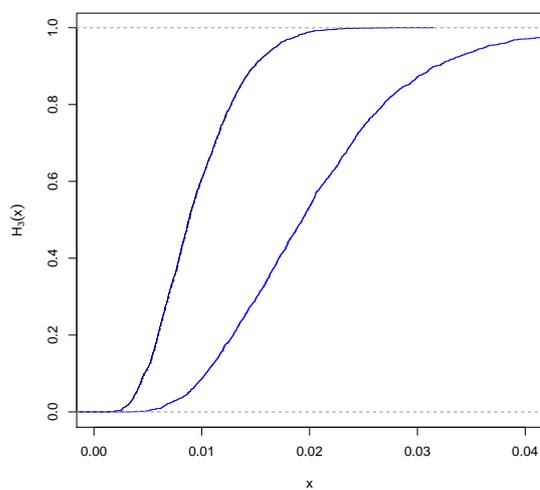
**Abb. 5.6:** Empirische Verteilungsfunktionen des maximalen Abstands des Schätzers  $C_{n,2}$  zur zugrundeliegenden Archimedischen Copula  $C_{\psi,2}$ . Die empirischen Verteilungsfunktionen wurden jeweils anhand von 3000 zufällig erzeugten Stichproben berechnet und sind für  $n = 200, 1000$  jeweils in rot und dunkelrot eingezeichnet.



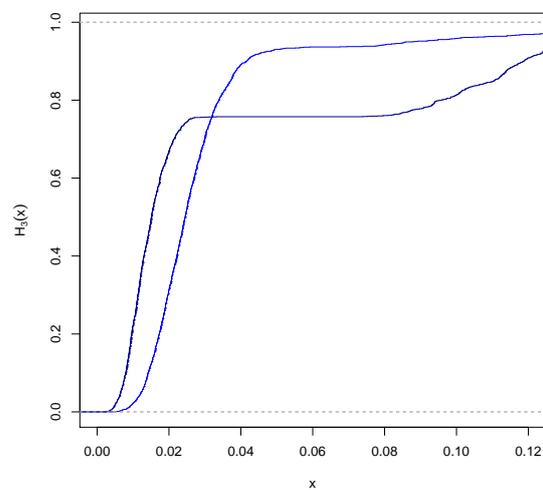
(a) Frank,  $\tau = 0.25$



(b) Frank,  $\tau = 0.5$



(c) Gumbel-Hougaard,  $\tau = 0.25$



(d) Gumbel-Hougaard,  $\tau = 0.5$

**Abb.5.7:** Empirische Verteilungsfunktionen des maximalen Abstands des Schätzers  $C_{n,3}$  zur zugrundeliegenden Archimedischen Copula  $C_{\psi,3}$ . Die empirischen Verteilungsfunktionen wurden jeweils anhand von 2000 zufällig erzeugten Stichproben berechnet und sind für  $n = 200, 1000$  jeweils in blau und dunkelblau eingezeichnet.

## 6 Ausblick

Erst kürzlich wurde festgestellt, dass eine Archimedische Copula gerade die Überlebenscopula einer Simplexverteilung ist, deren Radialvariable an der Stelle 0 keine Masse hat. Diese Charakterisierung hat es uns ermöglicht, durch eine Rekonstruktion der Radialvariable einen nichtparametrischen Schätzer einer Archimedischen Copula zu konstruieren. Im 2- und 3-dimensionalen Fall wurde die Konsistenz des Schätzers bewiesen. In diesem Zusammenhang ist eine zu verfolgende Fragestellung, ob eine Archimedische Copula in beliebiger Dimension eindeutig durch ihre Kendall Verteilungsfunktion bestimmt wird. Ein Beweis dieser Vermutung würde uns direkt die Konsistenz unabhängig von der Dimension liefern. An dieser Stelle wäre es zudem lohnenswert, das asymptotische Verhalten des Schätzers näher zu untersuchen.

Unser hergeleiteter Schätzer ist per Konstruktion eine Archimedische Copula, selbst dann, wenn den Daten keine Archimedische Copula zugrunde liegt. Daher wäre das Verhalten des Schätzers in genau diesen Fällen ein weiterer interessanter Aspekt.

Ein oft genannter Nachteil von Archimedischen Copulas ist, dass sie ein gewisses Maß an Symmetrie insofern beinhalten, als dass sie invariant unter der Permutation ihrer Argumente sind. Um dieses Problem zu umgehen, verallgemeinern McNeil und Nešlehová (2010) Archimedische Copulas zu Liouville Copulas, die die Überlebenscopulas von Liouville Verteilungen sind. Schätzer für diese Klasse von Copulas sind bisher nicht bekannt.

## Literaturverzeichnis

- BARBE, P., GENEST, C., GHOUDI, K. und RÉMILLARD, B. (1996). On Kendall's process. *Journal of Multivariate Analysis*, **58** 197–229.
- BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York.
- BILLINGSLEY, P. (1995). *Probability and Measure*. 3rd ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York.
- CHARPENTIER, A. und SEGERS, J. (2008). Convergence of Archimedean copulas. *Statistics and Probability Letters*, **78** 412–419.
- CHERUBINI, U., LUCIANO, E. und VECCHIATO, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley Finance Series, John Wiley & Sons, New York.
- DONNELLY, C. und EMBRECHTS, P. (2010). The devil is in the tails: Actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis. *ASTIN Bulletin*, **40(1)** 1–33.
- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. J. und STRAUMANN, D. (2002). *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*. In: Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, Cambridge.
- FANG, K. T. und FANG, B. Q. (1988). Some families of multivariate symmetric distributions related to exponential distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, **24** 109–122.
- FRANK, M. J. (1979). On the simultaneous associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ . *Aequationes Mathematicae*, **19** 194–226.
- FREES, E. W. und VALDEZ, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *The North American Actuarial Journal*, **2** 1–25.
- GENEST, C., NEŠLEHOVÁ, J. und ZIEGEL, J. (2011). Inference in multivariate Archimedean copula models. *Test*, **20** 223–256.
- GENEST, C. und RIVEST, L. P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, **88** 1034–1043.

- GUMBEL, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **55** 698–707.
- HEUSER, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis*. 17th ed. Mathematische Leitfäden, Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- KALLENBERG, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. 2nd ed. Probability and Its Applications, Springer, New York.
- KIMBERLING, C. H. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae*, **10** 152–164.
- MARTIO, O., RYAZANOV, V., SREBRO, U. und YAKUBOV, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory*. 1st ed. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York.
- MCNEIL, A. J., FREY, R. und EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Series in Finance, Princeton University Press, New Jersey.
- MCNEIL, A. J. und NEŠLEHOVÁ, J. (2009). Multivariate Archimedean copulas,  $d$ -monotone functions and  $l_1$ -norm symmetric distributions. *Annals of Statistics*, **37** 3059–3097.
- MCNEIL, A. J. und NEŠLEHOVÁ, J. (2010). From Archimedean to Liouville copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, **101** 1772–1790.
- NELSEN, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. 2nd ed. Springer Series in Statistics, Springer, New York.
- OAKES, D. (1989). Bivariate survival models induced by frailties. *Journal of the American Statistical Association*, **84** 487–493.
- RENARDY, M. und ROGERS, R. C. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd ed. Texts in Applied Mathematics, Springer, New York.
- RESNICK, S. I. (2008). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York.
- SCHWEIZER, B. und SKLAR, A. (1983). *Probabilistic metric spaces*. North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics, North-Holland Publishing Co., New York.
- SKLAR, A. (1959). Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8** 229–231.
- WILLIAMSON, R. E. (1956). Multiply monotone functions and their Laplace transforms. *Duke Mathematical Journal*, **23** 189–207.

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit eigenständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Sie hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Marburg, 11. Juli 2012

---

(Johannes Berens, Verfasser)