



Parameterschätzung für stochastische partielle Differentialgleichungen

Fachbereich 12 Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

vorgelegt von
Patrick Bossert

Marburg, 30. März 2020
Betreut durch Prof. Dr. Markus Bibinger

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	5
1.1 Fourierreihen	5
1.2 Sobolev-Raum und zylindrische Brownsche Bewegung	8
1.3 Stochastische Analysis und mathematische Statistik	11
1.3.1 Stochastische Analysis	11
1.3.2 Mathematische Statistik	13
2 Statistik im Modell von linearen parabolischen stochastischen partiellen Differentialgleichungen	19
2.1 Einführung	19
2.2 Grundlegendes Modell	23
2.3 Probabilistische Struktur und statistisches Modell	24
2.3.1 Probabilistische Struktur der parabolischen SPDE	24
2.3.2 Statistisches Modell	33
3 Volatilitätsschätzung im parabolischen SPDE-Modell	37
3.1 Parametrische Schätzung der Volatilität	37
3.2 Kovarianzstruktur der Inkremente mit einheitlicher Ortskoordinate	57
4 Asymptotik für die parametrische Schätzung der Volatilität	65
4.1 Zentraler Grenzwertsatz des Momentenschätzers in einer Raumkoordinate	65
4.2 Volatilitätsschätzung und Asymptotik mit mehreren Raumkoordinaten	105
5 Parametrische Schätzung mit unbekanntem Parameter im Differentialoperator	115
5.1 Vorüberlegungen	115
5.2 Zentraler Grenzwertsatz	117
6 Simulation des SPDE-Modells	125
6.1 Grundlagen des SPDE-Modells	125
6.2 Abbruchkriterium für das Faktormodell	129
6.3 Schätzer und Grenzwertsätze	132
Anhang	137
Bildverzeichnis	137
R-Code	137
Notationsverzeichnis	157

Einleitung

Als natürlich erscheinenden Zugang zu stochastischen partiellen Differentialgleichungen bieten sich mathematische Modelle auf Basis von Differentialgleichungen an. Solche Modelle versuchen im Allgemeinen die Realität in Form von Veränderungen eines Objekts in Abhängigkeiten von zeitlicher Änderung zu modellieren. Vor allem in der Physik werden solcherlei Techniken verwendet um beispielsweise Geschwindigkeitsänderungen oder Temperaturverläufe zu beschreiben. Partielle Differentialgleichungen beschreiben dabei die Veränderung eines Objekts in mehreren Abhängigkeiten. So kann zum Beispiel in Bezug auf die Temperaturänderung eines Objekts mithilfe partieller Differentialgleichungen diese in mehreren Raumkoordinaten beschrieben werden. Als potentielle Schwachstelle eines solchen Modells kann jedoch unter anderem die Abstrahierung angesehen werden. Klarerweise gewinnen Modelle zunehmend an Komplexität, je mehr externe Faktoren Berücksichtigung finden. Nichts desto trotz können physikalische Modelle, wenn auch äußerst realitätsnah, kaum die Realität exakt wiedergeben. Ein Grund dafür ist die Implikation stochastischer Elemente in der Realität. So kann im perfekten Zustand Geschwindigkeitsentwicklung einer Kugel auf einer Kurve nahezu exakt durch Differentialgleichungen beschrieben werden, jedoch werden selten externe Störfaktoren berücksichtigt. Gerade bei derzeit oft diskutierten Themen wie dem Klimawandel lassen sich veränderte Umweltbedingungen in Form von stochastischen Einflüssen in bestehende Modelle implementieren. Als Beispiel für eine mögliche Erweiterung in gerade diesem Themengebiet kann die Anomalie der Meeresoberfläche nach [Frankignoul \(1979\)](#) angegeben werden. Diese Anomalie der Meeresoberfläche T kann dabei durch

$$dT_t = (D\Delta T - \langle \nu, \nabla T \rangle - \lambda T) dt$$

modelliert werden. Die Modellierung sei hierbei in zwei Ortskoordinaten gegeben, wobei D für den Diffusionskoeffizienten, ν für die Advektion und λ für das ozeanische-atmosphärische Feedback steht. Die Berücksichtigung dieser Komponenten scheint dabei sinnvoll, jedoch beinhaltet sie noch keine unvorhersehbaren Ereignisse, welche zunehmend an Häufigkeit gewinnen und dementsprechend mit-einzubeziehen wären. So bewirken Sturmfluten, also Änderungen des Wasserspiegels die durch atmosphärische Kräfte erzeugt werden, eine teilweise erhebliche Veränderung der Oberflächentemperatur. Sie können von einige Stunden bis zu zwei oder drei Tagen andauern und haben im Vergleich zur Wassertiefe große räumliche Ausmaße. So können sie den Wasserstand im Extremfall um mehrere Meter anheben oder absenken. Die Entstehung solcher Sturmfluten ist sowohl an den Wind oberhalb der Meeresoberfläche, als auch an Schwankungen des atmosphärischen Oberflächendrucks gekoppelt.¹ Eine Berücksichtigung solcher Faktoren kann durch die Erweiterung der Differentialgleichung durch

¹siehe: <https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/atmospheric-forcing>

einen stochastischen Term σdB_t wie folgt impliziert werden:

$$dT_t = (D\Delta T - \langle \nu, \nabla T \rangle - \lambda T) dt + \sigma dB_t.$$

Stochastische partielle Differentialgleichungen verschaffen auch im Allgemeinen eine adäquate Abhilfe für eine realitätsgetreue Modellierung. Das Vorgehen ist hierbei stets identisch zum obigen Beispiel. So werden zu bestehend partiellen Differentialgleichungen jeweils stochastische Fluktuationen hinzugenommen, welche maßgeblich durch den Volatilitätsparameter σ gesteuert wird. Für die stochastische Fluktuation sorgt, ähnlich zum Konzept von White Noise, eine allgemeinere Form der Brownschen Bewegung. Wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit gezeigt wird, führt die Hinzunahme einer zufälligen Größe nicht nur zu einer Berücksichtigung externer Faktoren, sondern verändert auch die Gestalt der jeweiligen Lösung. Genauer gesagt wird die Lösung durch den Term σdB_t rauer, wie es in den Abbildungen 2.1, 2.3 und 2.4 beobachtet werden kann.

Dank der zunehmend steigenden Anzahl an Daten und der immer schneller werdenden Informationsverarbeitung von Prozessoren, gewannen stochastische partielle Differentialgleichungen in den letzten 50 Jahren immer mehr an Bedeutung. Vor allem in finanzmathematischen Anwendungsbereichen fanden in den letzten Jahren stochastische partielle Differentialgleichungen, auch SPDE genannt, häufiger Anwendung. So können beispielsweise Wertentwicklung von Portfolios und die damit verbundene Wahl eines Portfolios durch SPDEs beschrieben werden. Auch die Modellierung von mehreren Government Bonds und deren Entwicklung bieten einen sinnvollen Anwendungsbereich für SPDEs, worauf im weiteren Verlauf dieser Arbeit erneut in Kürze eingegangen werden wird. Letzteres Beispiel motiviert die Entwicklung statistischer Inferenzen in Bezug auf Volatilitätsschätzung. In dieser Arbeit werden wir die Klasse der linearen parabolischen stochastischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Hinblick auf ihre probabilistische Struktur untersuchen und weitere statistische Fragestellungen beantworten. Die Volatilität wird dabei in einem parametrischen Rahmen und somit zeitunabhängig betrachtet und geschätzt werden. Da es ebenso sinnvoll erscheint die Volatilität zeitabhängig zu betrachten sei an dieser Stelle auf [Bibinger und Trabs \(2019\)](#) verwiesen. In der genannten Quelle werden analoge Resultate ebenfalls im semiparametrischen Rahmen beschrieben. Die Herleitung dieser Resultate sowohl im parametrischen, als auch im semiparametrischen Fall benötigen weitgehend gleiche Überlegungen, auf welche wir im Verlauf der Arbeit detailliert eingehen werden.

So werden im ersten Kapitel die Grundlagen aus verschiedenen mathematischen Bereichen zusammengefasst und in den Kontext dieser Arbeit eingeordnet. Als Hauptquelle dienen hierbei [Holzmann und Bibinger \(2016\)](#) sowie [Bibinger \(2017, 2018\)](#) für den stochastischen Teil, und [Gawarecki und Mandrekar \(2010\)](#) und [Forster \(2004\)](#) für die Funktionalanalysis und diskrete Fourieranalysis.

In Kapitel 2 wird daraufhin die Struktur der SPDE eingeführt und anschließend analysiert. Hauptaugenmerk wird die Spektralzerlegung der SPDE in ein unendliches Faktormodell mithilfe der diskreten Fourieranalysis sein. Diese Zerlegung wird für alle Resultate und Beweise sowie zur Simulationen von Lösungen einer SPDE verwendet werden. Ergänzend dazu wird das Anwendungsbeispiel der Wärmeleitungsgleichung, auch Heat-Equation genannt, für diese Arbeit eingeführt, anhand derer wir in der Lage sein werden, ausgewählte Resultate dieser Arbeit grafisch zu beobachten. Die

Wärmeleitungsgleichung bietet hierbei ein weiteres prominentes Beispiel für die Erweiterung einer partiellen Differentialgleichung zu einer stochastischen partiellen Differentialgleichung. Sie beschreibt die Veränderung der Wärme eines Objekts in Abhängigkeit von Raum und Zeit. Als Quelle wurde hierbei [Khoshnevisan \(2016\)](#) verwendet. Wie schon aus dem Spezialfall der Heat-Equation bekannt, müssen für statistische Inferenzen zusätzliche Regularitätsbedingungen erfüllt sein. So ist die grundlegende Annahme, dass Daten im sogenannten High-Frequency Rahmen vorliegen, welche heuristisch das hochfrequente Sammeln von Daten über einen fixen Zeitraum bedeuten. Eine detaillierte mathematische Beschreibung von hochfrequenten Daten sowie der Regularitätsbedingungen werden am Ende von Kapitel 2.3.2 formuliert.

Hauptziel von Kapitel 3 wird die Herleitung eines Momentenschätzers für die Volatilität im parametrischen Fall in einer Ortskoordinate sein. Motiviert durch die bekannte Statistik für stochastische Prozesse werden wir die quadratischen Inkremente einer Lösung genauer untersuchen und daraufhin einen Momentenschätzer konstruieren. Im Zuge der Analyse der SPDE werden wir feststellen, dass nur gewisse Bestandteile der quadratischen Inkremente relevant sind, wohingegen andere asymptotisch vernachlässigbar sind. Aufgrund dessen wird der Volatilitätsschätzer eine vergleichsweise einfache Form aufweisen. Als bedeutender Unterschied zur bestehenden Semimartingaltheorie wird sich eine Rate von $\sqrt{\Delta_n}$ statt Δ_n für den Erwartungswert der quadratischen Inkremente des SPDE-Modells herausstellen. Ein ebenso bedeutender Unterschied wird die Autokorrelation der Inkremente sein, welche im Falle von SPDEs negativ korrelieren, wohingegen bei Semimartingalen im Martingalsanteil unkorrelierte Inkremente zu beobachten sind. Dem dritten Kapitel sowie dem weiteren Verlauf der Arbeit, wird [Bibinger und Trabs \(2019\)](#) als Hauptquelle zugrunde liegen.

Kapitel 4 wird anschließend asymptotische Aussagen für den im vorigen Kapitel gefundenen Volatilitätsschätzer herleiten. Hierbei steht die asymptotische Normalität, wie die daraus resultierende Konsistenz anfänglich im Fokus. Anschließend werden wir einen Schätzer vorstellen, welcher eine parametrische Schätzung der Volatilität über Raum und Zeit vornimmt und werden für diesen ebenfalls asymptotische Normalität nachweisen. Eine interessante Konsequenz dieser Konvergenzen wird die Effizienz im Sinne der unteren Cramér-Rao-Schranke sein. Genauer gesagt wird festgestellt werden, dass die beiden entwickelten Momentenschätzer gleiche asymptotische Varianz aufweisen, wobei der Volatilitätsschätzer eine verbesserte Konvergenzrate besitzen wird. Diese Varianz weicht nicht allzu weit von der unteren Cramér-Rao-Schranke ab, welche im Falle von unabhängigen identisch verteilten Standardnormalverteilungen auftritt. Grund für diese Abweichung werden maßgeblich die nicht vernachlässigbaren Kovarianzen der quadratischen Inkremente sein, welche erstmals in Kapitel drei untersucht werden. Die Beweise der Grenzwertsätze werden auf einem allgemeinen zentralen Grenzwertsatz für sogenannte ρ -mixing Dreiecksschemata von [Peligrad et al. \(1997\)](#) basieren. Aus diesem Grund wird zu Beginn dieses Kapitels besagtes Konzept und der erwähnte zentrale Grenzwertsatz eingeführt werden.

Bis zu diesem Zeitpunkt nehmen wir an, dass die Parameter der partiellen Komponenten in den SPDEs bekannt seien. Aus diesem Grund lässt sich die Volatilität eindeutig identifizieren. Lässt man jedoch diese Voraussetzung fallen und möchte, wie in Kapitel 5, alle Parameter des Modells schätzen, so wird sich herausstellen, dass dies unter dem gewählten Ansatz nur bedingt möglich ist. So können gewisse Parameter mit der hier vorgestellten Methodik überhaupt nicht und andere Parameter nur bedingt identifiziert werden. Dieses abschließende Kapitel des theoretischen Teils wird auf Basis der

Theorie für Minimum-Kontrast-Schätzer einen Schätzer unter den beschriebenen Umständen herleiten. Es wird ebenfalls asymptotische Normalität mit Hilfe eines Grenzwertsatzes aus der Theorie zum Minimum-Kontrast-Schätzer sowie mit dem allgemeinen zentralen Grenzwertsatz von [Peligrad et al. \(1997\)](#) aus Kapitel 4 bewiesen werden.

Kapitel 6 bildet den Abschluss dieser Arbeit und beschäftigt sich mit der Simulation von Lösungen des SPDE-Modells. Hierbei wird eine Methodik hergeleitet um besagte Lösungen zu simulieren, welche auf der rekursiven Simulationsmethodik bekannter stochastischer Prozesse basiert. Aufgrund der Spektralzerlegung der stochastischen Differentialgleichung wird dabei auf mögliche Abbruchschranken für die zugrundeliegende diskrete Fouriertransformation eingegangen. Für eine Implementierung des Modells in wirtschaftlichen Anwendungsgebieten wird es besonders bei den Abbruchschranken nötig sein, die Laufzeit für die einzelnen Abbruchschranken zu betrachten. Zusätzlich zur Laufzeit wird die Übereinstimmung der Simulationen mit ausgewählten theoretischen Resultaten als Abbruchkriterien dienen. Schlussendlich werden Resultate für Schätzer aus den vergangenen Kapitel außerhalb des Kontextes der Wärmeleitungsgleichung visuell veranschaulicht werden. Für eine interaktive Darstellung des SPDE-Modells sei auf die Internetseite [SPDE-Simulation²](#) verwiesen.

Diese Simulationen werden auf programmiertechnischer Ebene im Anhang nachvollziehbar gemacht. Aufgrund der hohen Anzahl an notationellen Kurzschreibweisen sei ebenso auf das im Anhang befindliche Notationsverzeichnis verwiesen, in welchem die wichtigsten Kurzschreibweisen für ein schnelleres Verständnis der Thematik zusammengetragen wurden.

²Link zur Internetseite: https://pbossert.shinyapps.io/SPDE_Simulation/

1 Grundlagen

In diesem ersten Kapitel der Arbeit werden wir die Grundlagen verschiedener benötigter Theorien in Kürze zusammenfassen. Ziel ist hierbei vor allem strukturelle Beschaffenheiten zu beleuchten, so dass die Entwicklung des grundlegenden Modells dieser Arbeit hinreichend klar wird. Zudem werden häufig verwendete Sätze sowie spezielle Definitionen zusammengestellt werden. Dieses Kapitel gliedert sich dabei in drei Bereiche, welche verschiedenen Spezialgebieten der Mathematik angehören. Diese beinhalten Fourieranalysis, Funktionalanalysis sowie Stochastik. Da diese Arbeit die Analyse einer bestimmten Form von stochastischer Differentialgleichung behandelt, werden geläufige Definitionen und Sätze vorausgesetzt. Als Referenz für diese dienen unter anderem [Holzmann und Bibinger \(2016\)](#) sowie [Bibinger \(2017, 2018\)](#).

1.1 Fourierreihen

Ein maßgebliches Werkzeug dieser Arbeit wird die Zerlegung einer parabolischen stochastischen partiellen Differentialgleichung in ihre Fourierentwicklung sein. In diesem Teil werden wir dabei zunächst die Theorie sowie weitere Hilfsmittel einführen.

Ziel wird es sein, eine Klasse von periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome zu approximieren. Der theoretische Ansatz ist dabei an [Forster \(2004, S. 308 ff.\)](#) angelehnt. Die Grundlagen der Fourierreihen sind darüber hinaus in den meisten Lehrbücher zur Analysis zu finden. Wir beginnen damit den Raum der periodischen Funktionen zu formulieren, hierfür sei

$$\mathcal{L}_{per}^2 := \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Die Periodizität der Klasse \mathcal{L}_{per}^2 wurde indirekt über die Einschränkung der Urbildmenge gegeben. Dabei wurde eine Periodenlänge von 2π festgelegt. Trivialerweise kann jede Funktion $f \in \mathcal{L}_{per}^2$ auf \mathbb{R} periodisch fortgesetzt werden. Zudem seien $f \in \mathcal{L}_{per}^2$ quadratintegrierbar und messbar. Die Wahl der Periodenlänge wurde dabei intuitiv gewählt, da als spätere Approximation dieser Funktionen die standardmäßigen trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ verwendet werden. Die Wahl der Periodenlänge kann allerdings beliebig durch Skalierung angepasst werden. Im Folgenden werden wir den genannten Raum zu einem Hilbertraum erweitern. Hierfür betrachten wir zunächst dessen Definition nach [Werner \(2006, Kapitel V\)](#).

Definition 1.1.1 (Hilbertraum)

Sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Weiter habe H ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ist H

vollständig bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm, so nennt man H einen Hilbertraum.

Ein bekanntes Beispiel für einen Hilbertraum ist dabei der \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. In unserem Fall müssen wir zunächst \mathcal{L}_{per}^2 mithilfe von passenden Verknüpfungen zu einem \mathbb{C} -Vektorraum formen. Sei dafür $f, g \in \mathcal{L}_{per}^2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}_{per}^2 \times \mathcal{L}_{per}^2 &\rightarrow \mathcal{L}_{per}^2 \\ (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{L}_{per}^2 &\rightarrow \mathcal{L}_{per}^2 \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Bei der Standardaddition und Standardskalarmultiplikation von Funktionen wird der Raum der Funktionen zu einem Vektorraum, hier über dem Körper \mathbb{C} . Damit \mathcal{L}_{per}^2 als ein Unterraum dessen ebenso ein \mathbb{C} -Vektorraum ist, müssen wir lediglich die Abgeschlossenheit bzw. die Wohldefiniertheit bezüglich der genannten Verknüpfungen überprüfen. Die Skalarmultiplikation ist trivialerweise abgeschlossen. Für die Addition ist nur die Quadratintegrierbarkeit zu zeigen. Hierfür betrachten wir folgende elementare Ungleichung:

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)| + |g(x)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2).$$

Da f und g jeweils quadratintegrierbar sind, ist es somit auch deren additive Verknüpfung. Somit ist \mathcal{L}_{per}^2 ein \mathbb{C} -Vektorraum. Für die Konstruktion des Skalarprodukts betrachte

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}_{per}^2 \times \mathcal{L}_{per}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx, \end{aligned}$$

wobei \bar{z} , für $z \in \mathbb{C}$ das komplex Konjugierte der entsprechenden Zahl bezeichnet. Damit die obige Abbildung ein Skalarprodukt definiert, muss $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform sein. Die Linearität im ersten Argument ist aufgrund der Linearität des Integrals direkt ersichtlich. Ebenso die Semilinearität des zweiten Arguments. Weiterhin gilt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \overline{f(x)} \, dx} = \overline{\langle g, f \rangle}$$

und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist somit eine hermitesche Sesquilinearform. Für die positive Definitheit ist offensichtlich $\langle f, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{L}_{per}^2$ erfüllt, allerdings gilt $\langle f, f \rangle = 0$, für alle $f \in \mathcal{L}_{per}^2$ mit $f = 0$ fast überall. Ein solches f entspricht somit nicht dem additiv neutralen Element und wir erhalten im strengen Sinne nur eine positiv semidefinite Abbildung. Indem wir allerdings den Raum \mathcal{L}_{per}^2 entsprechend aller Funktionen mit $f = 0$ fast überall einschränken, ergibt sich direkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Skalarprodukt.

1.1 Fourierreihen

Mithilfe der vom Skalarprodukt induzierten Norm wird \mathcal{L}_{per}^2 zum vollständigen metrischen Raum und dadurch zum Hilbertraum. Durch das bestimmen einer Orthonormalbasis können wir letztlich durch Linearkombination Funktionen aus \mathcal{L}_{per}^2 darstellen. Dafür betrachte $B = \{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Mit der Identität $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ ist $B \subset \mathcal{L}_{per}^2$. Die Vektoren aus B liegen orthogonal zueinander, da

$$\langle e^{ikx}, e^{ijx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j \\ \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{i}{k-j} e^{i(k-j)x} \right]_{-\pi}^{\pi}, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Stammfunktion für den Fall $k \neq j$ ein vielfaches von π in der komplexen Exponentialfunktion ist, entfällt der Imaginärteil und mit der Achsensymmetrie von Kosinus folgt der letzte Schritt. Außerdem sei bemerkt, dass durch die Definition des Skalarprodukts die Basis normiert wird. Dies sollte bei der Konstruktion von periodischen Funktionen mit anderer Periodizität berücksichtigt werden. Da die Vektoren in B zudem linear unabhängig sind, bilden diese eine Orthonormalbasis eines Untervektorraums $U \subset \mathcal{L}_{per}^2$. Funktionen $f \in U$ können nun durch die sogenannte Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

dargestellt werden, wobei die sogenannten Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sind. Formal gesehen haben wir auch im allgemeinen Fall für Funktionen in \mathcal{L}_{per}^2 die Fourierreihendarstellung, hierbei ist jedoch die Konvergenz gegen f nicht gesichert. Im Falle, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und stetig differenzierbar ist, so folgt, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert. Für den Beweis dieses Kriteriums sowie weitere Kriterien sei auf [Werner \(2006, Seite 163 ff.\)](#) verwiesen. Abschließend betrachten wir zudem eine Möglichkeit für die Bestimmung der Fourierkoeffizienten. Habe f eine Fourierreihendarstellung, so gilt

$$\langle f, e^{ikx} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{ijx}, e^{ikx} \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle e^{ijx}, e^{ikx} \rangle = c_k$$

aufgrund der Sesquilinearität des Skalarprodukts sowie der Orthonormalität der Basisvektoren. Dadurch ergibt sich

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Habe eine Funktion $f(x)$ nun die Periodizität L , so kann man durch einfache Variablentransformation diese auf eine Periodizität von 2π durch $f\left(\frac{L}{2\pi}x\right)$ zurückführen. Demnach lässt sich die vorgestellte Theorie beliebig modifizieren. Weiterhin sei angemerkt, dass eine Dimensionsreduktion der komplexen Basis $e^{ikx} = \cos(x) + i \sin(x)$ im Sinne von einer Beschränkung auf Real- bzw. Imaginärteil bei symmetrischen Funktionen möglich ist. Sei eine Funktion $f \in H$ eine gerade Funktion, also symmetrisch zur y -Achse, so beschränkt sich die Basis auf den Realteil. Analog beschränkt sich die Basis bei ungeraden Funktionen auf den Imaginärteil. Zum Abschluss dieses Unterkapitels betrachten wir noch einen fundamentalen Satz aus der Theorie für Fourierreihen, welcher für den Verlauf dieser Arbeit von

Bedeutung sein wird. Die Parsevalsche Identität bezieht sich dabei auf eine äquivalente Darstellung einer Orthonormalbasis in einem Hilbertraum und die Darstellung der quadratischen Norm über die Fourierreihe dieser Basis.

Satz 1.1.2 (Parsevalsche Identität)

Sei H ein Hilbertraum und $B \subset H$ ein Orthonormalsystem von H , so gilt

$$B \text{ ist Orthonormalbasis} \iff \|f\|^2 = \sum_{g \in B} |\langle f, g \rangle|^2, \quad \text{für alle } f \in H,$$

wobei $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm darstellt.

Für den Beweis sei auf [Werner \(2006, Satz V.4.9 Seite 254-255\)](#) verwiesen.

1.2 Sobolev-Raum und zylindrische Brownsche Bewegung

Es folgt eine Einführung in die Grundlagen der Funktionalanalysis. Wir beginnen dabei mit Operatoren. Für den stochastischen Term im später folgenden Modell werden wir einen Raum benötigen, der die stochastische Fluktuation in Raum und Zeit abdeckt. Aus diesem Grund führen wir anschließend den sogenannten Sobolev-Raum und die zylindrische Brownsche Bewegung ein. Als Quelle diente dabei [Lototsky und Rozovsky \(2017, S. 83-86\)](#) für Operatoren und [Gawarecki und Mandrekar \(2010, S. 11\)](#) für den Sobolev-Raum sowie [Gawarecki und Mandrekar \(2010, S. 19\)](#) für die zylindrische Brownsche Bewegung. Wir beginnen mit dem Begriff eines Operators.

Definition 1.2.1 (Operator)

Seien X, Y Banachräume auf \mathbb{R} , so nennt man eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ einen Operator, falls

$$A(ax + by) = aAx + bAy,$$

also falls A eine lineare Abbildung ist.

In der vorliegenden Definition eines Operators wurde die Stetigkeit impliziert. Je nach Quelle weicht dies allerdings von der genannten Definition ab, sodass als Operator zunächst nur eine Abbildung zwischen zwei Räumen gemeint ist. Die Eigenschaft der Linearität wird somit als linearer Operator bezeichnet. In dieser Arbeit werden wir den Begriff „Operator“ stets als eine lineare Abbildung verstehen. Der Zusatz „linear“ wird dabei als Hinweis verstanden werden, dass die Linearität des Operators verwendet wurde.

Als Nächstes folgt die Definition eines selbstadjungierten Operators.

Definition 1.2.2

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und A ein Operator mit $A : H \rightarrow H$. Dann heißt A selbstadjungiert, falls

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

für alle $x, y \in H$.

Da die von uns betrachteten Operatoren linear sind, können wir eine Verbindung zwischen der bestehenden Theorie für Matrizen und der hier eingeführten Definition für Operatoren herleiten. Diesbezüglich sei auf den Exkurs in Kapitel 2.3.1 verwiesen.

In dieser Arbeit betrachten wir ein zweidimensionales Differentialgleichungsmodell. Für eine adäquate Definition des stochastischen Rauschens führen wir die zylindrische Brownsche Bewegung ein. Mit dieser wird es möglich sein das Rauschen in Raum und Zeit darzustellen.

Definition 1.2.3 (Zylindrische Brownsche Bewegung)

Eine Familie $\{B_t\}_{t \geq 0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ heißt zylindrische Brownsche Bewegung auf dem Hilbertraum H , falls

- (i) für beliebige $t \geq 0$ die Abbildung $B_t : H \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ linear ist,
- (ii) für beliebiges $h \in H$, $B_t(h)$ eine \mathcal{F}_t -Brownsche Bewegung ist und
- (iii) für beliebige $g, h \in H$ und $t \geq 0$, gilt

$$\mathbb{E}[B_t(g)B_t(h)] = t\langle g, h \rangle_H.$$

Weiterhin nennen wir B_t aus voriger Definition eine zylindrische Zufallsvariable. Es sei für die Definition einer \mathcal{F}_t -Brownschen Bewegung auf [Holzmann und Bibinger \(2016, S. 107\)](#) verwiesen. Betrachten wir die dritte Bedingung von Definition 1.2.3 etwas genauer, so folgt direkt mit $g, h \in H$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t(g)B_s(h)] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[B_t(g)B_s(h) \mid \mathcal{F}_t]\right] \\ &= \mathbb{E}[B_t(g)B_t(h)] \\ &= t\langle g, h \rangle_H, \end{aligned}$$

wobei ohne Einschränkung $t \leq s$, für $t, s \geq 0$ verwendet wurde. Somit folgt

$$\mathbb{E}[B_t(g)B_s(h)] = (t \wedge s)\langle g, h \rangle_H.$$

Verbinden wir das Konzept der zylindrischen Brownschen Bewegung auf dem Hilbertraum H mit

dem der Fourierreihen, so erhalten wir eine Darstellung der zylindrischen Brownschen Bewegung im unendlichen Faktormodell. Sei hierfür $(e_k)_{k \geq 1}$ eine Orthonormalbasis von H . Da nach Eigenschaft (i) aus Definition 1.2.3 B_t eine lineare Abbildung in den L^2 ist, bildet $B_t(e_k)$ für alle $k \geq 1$ eine Orthogonalbasis in L^2 . Durch die Standardisierung $B_t(e_k)/\sqrt{t} := \tilde{W}_t(e_k)$ für alle $k \geq 1$ und $t > 0$ wird die Orthogonalbasis zu einer Orthonormalbasis des L^2 . Es folgt wiederum mit Eigenschaft (iii) aus Definition 1.2.3

$$\begin{aligned} B_t(h) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle B_t(h), \tilde{W}_t(e_k) \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} \tilde{W}_t(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[B_t(h) \tilde{W}_t(e_k)] \tilde{W}_t(e_k) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[B_t(h) B_t(e_k)] B_t(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle_H B_t(e_k), \end{aligned}$$

für alle $h \in H$ und $t > 0$. Die zentrierten Gaußschen Zufallsvariablen $(B_t(e_k))_{k \geq 1}$ sind unkorreliert, da für $k, j \in \mathbb{N}$ und $k \neq j$ sowie alle $t, s \geq 0$ aufgrund der Orthogonalität der Basisvektoren $(e_k)_{k \geq 1}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t(e_k), B_s(e_j)) &= \mathbb{E}[B_t(e_k) B_s(e_j)] - \mathbb{E}[B_t(e_k)] \mathbb{E}[B_s(e_j)] \\ &= (t \wedge s) \langle e_k, e_s \rangle_H - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definieren wir $W_t^k := B_t(e_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$, so lässt sich eine zylindrische Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ auf dem Hilbertraum H durch das Faktormodell

$$B_t(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle_H W_t^k$$

beschreiben, wobei $(W_t^k)_{t \geq 0}$ Brownsche Bewegungen für alle $k \geq 1$ sind. Aufgrund der Äquivalenz zwischen Unkorreliertheit und Unabhängigkeit bei Gaußschen Zufallsvariablen sind die Brownschen Bewegungen $(W_t^k)_{t \geq 0}$ sogar unabhängig.

Abschließend führen wir den Begriff des Sobolev-Raums zunächst in allgemeiner Form auf dem \mathbb{R}^d ein und spezifizieren diesen anschließend für unseren Kontext.

Definition 1.2.4 (Sobolev-Raum)

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}$ und sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Sei D^α ein Operator mit

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Weiter sei $O \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^m(O)$ für $m \in \mathbb{N}$ definiere die Norm

$$\|f\|_{m,p} := \left(\int_O \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

wobei $1 \leq p < \infty$ und die Ableitung im Sinne einer Distribution gemeint ist. Der Raum $W^{m,p}(O)$ heißt Sobolev-Raum und ist der Abschluss der Norm $\|\cdot\|_{m,p}$. Somit beinhaltet $W^{m,p}(O)$ alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^m(O)$ deren Norm $\|f\|_{m,p} < \infty$.

Anders formuliert enthält $W^{m,p}(O)$ alle Funktionen $f \in L^p(O)$, deren schwache Ableitungen bis zur Ordnung m wieder in $L^p(O)$ liegt. Somit ist $W^{m,p}(O) \subset L^p(O)$. Für das in dieser Arbeit zu betrachtende lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichungsmodell, welches wir in Kapitel 2.2 einführen werden, genügt es, den Sobolev-Raum über $O = [y_{min}, y_{max}] \subset \mathbb{R}$ und $p = 2$ zu betrachten. Des Weiteren wird der Operator in diesem Modell von der Ordnung Zwei sein, sodass wir $W^{2,2}([y_{min}, y_{max}])$ verwenden. Zu notationellen Zwecken wird hier $W^{2,2}([y_{min}, y_{max}]) = W^{2,2}([y_{min}, y_{max}]) = W([y_{min}, y_{max}])$ synonym verwendet werden. Wenn als Grundraum O des Sobolev-Raums der Abschluss einer Menge angegeben ist, wird jedoch stets das Innere der Menge $\overset{\circ}{O}$ für Definition 1.2.4 gemeint sein. Man kann zeigen, dass der eingeführte Sobolev-Raum für $p = 2$ einem Hilbertraum entspricht, sodass wir die zylindrische Brownsche Bewegung auf diesem definieren werden. Als Referenz für den Begriff der Distribution bzw. den Begriff der schwachen Ableitung sei auf [John \(2013\)](#) verwiesen. Ebenso sei für eine genauere Erläuterung für die Struktur eines Sobolevraums, etwa wann dieser zu einem Hilbertraum wird, auf [John \(2013\)](#) verwiesen.

1.3 Stochastische Analysis und mathematische Statistik

1.3.1 Stochastische Analysis

Als Voraussetzung für diese Arbeit sei die Theorie um die stochastische Integration gegeben. Für diese sei auf [Bibinger \(2018, Kapitel 3\)](#) verwiesen. Es wird an dieser Stelle lediglich auf wichtige Sätze aus der stochastischen Integration, welche für diese Arbeit von größerer Bedeutung sind, eingegangen werden. Zudem werden wir im folgenden Kapitel bezüglich einer Brownschen Bewegung in Ort und Zeit, einer zylindrischen Brownschen Bewegung, im grundlegenden Modell integrieren. Da wir diese Form der Integration aufgrund einer Zerlegung in einem unendlichdimensionalen Faktorraum nicht zwangsläufig benötigen, wird in diesem Teil nur in kurzen Zügen auf die zugrundeliegende Theorie eingegangen. Weiterführende Auskünfte bietet [Gawarecki und Mandrekar \(2010, Kapitel 2.2.4\)](#) oder [Khoshnevisan \(2016, Kapitel 2-3\)](#) für einen anderen Zugang bezüglich der stochastischen Integration in Raum und Zeit.

Wir beginnen mit zwei essentiellen Resultaten der stochastischen Integration. Die Itô-Isometrie bezieht sich dabei auf die quadratische Variation eines stochastischen Integrals bezüglich einer Brownschen Bewegung sowie einer Verbindung zwischen dem stochastischen Integral mit dem Riemann Integral. Die Itô-Formel bietet eine optionale Darstellungsmöglichkeit eines stochastischen Prozesses durch

stochastische Integration. Die zugrundeliegende Idee ist dabei die Taylorentwicklung.

Satz 1.3.1 (Itô-Isometrie, [Bibinger \(2018\)](#) Korollar 3.6.5)

Sei W eine Standard-Brownsche Bewegung und H ein adaptierter càglàd Prozess, dann gilt für die quadratische Variation an der Stelle $t > 0$

$$\left[\int_0^t H \, dW, \int_0^t H \, dW \right](t) = \int_0^t H^2(s) \, ds$$

sowie mithilfe von Fubini

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H(s) \, dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}[H^2(s)] \, ds.$$

Es folgt die Itô-Formel.

Satz 1.3.2 (Itô-Formel, [Bibinger \(2018\)](#) Satz 3.8.1)

Sei X ein d -dimensionales stetiges Semimartingal und $F \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, dann ist $F(X(t), t)$ ein stetiges Semimartingal mit

$$\begin{aligned} F(X(t), t) &= F(F(0), 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X(s), s) \, ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X(s), s) \, dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(s), s) \, d[X_i, X_j](s). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt im univariaten Fall die Differentialform

$$dF(X(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}(X(t), t) \, dt + \frac{\partial}{\partial x}(X(t), t) \, dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(t), t) \, d[X, X](t).$$

Eine entsprechende Differentialform kann ebenso für den multivariaten Fall angegeben werden.

Abschließend behandeln wir die Integration über eine zylindrische Brownsche Bewegung. Analog zu der Grundidee dieser Arbeit werden wir diese Integration über eine Orthonormalzerlegung $(e_K)_{k \geq 1}$ auf einen Hilbertraum H definieren. So beginnen wir, analog zu der stochastischen Integration, mit einfachen Prozessen.

Definition 1.3.3

Sei $\phi(t, \omega) := \sum_{i=1}^n \phi_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{(T_{i-1}, T_i]}(t, \omega)$ mit einer aufsteigenden endlichen Folge von Stopzeiten $(T_i)_{0 \leq i \leq n}$ und einer Folge von $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$ -messbaren Zufallsvariablen ϕ_{i-1} . Sei ϕ weiterhin beschränkt,

dann ist das stochastische Integral bezüglich der zylindrischen Brownschen Bewegung B_t durch

$$\int_0^t \phi(s) dB_s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \phi(s) dB_s(e_k) \right) e_k$$

definiert.

Die Integration ist demnach zurückzuführen auf das herkömmliche stochastische Integral. Diese Zerlegung wurde bezüglich einer Orthonormalbasis durchgeführt, sodass wir eine unendliche Reihe von Itô-Integralen vorfinden. Die Frage, welche man sich bei solch einer Definition und auch bei der nun folgenden Erweiterung stellen muss, ist die der Filtration. Dafür sei wiederum auf [Gawarecki und Mandrekar \(2010, Kapitel 2.2.4\)](#) verwiesen. Dies gilt ebenso für die Details der nun folgenden Erweiterung des obigen Integrals. Sei dafür Φ ein stochastischer Prozess mit $\Phi \in L^2$ und es gelte

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{L^2}^2 dt \right] < \infty.$$

Sei B_t eine zylindrische Brownsche Bewegung auf dem Hilbertraum H , dann gibt es eine eindeutige isometrische lineare Fortsetzung des stochastischen Integrals für einfache Prozesse zu dem stochastischen Integral für Prozesse aus der Klasse Φ bezüglich der zylindrischen Brownschen Bewegung. Wie schon bei der herkömmlichen stochastischen Integration, können wir mithilfe der Definition des Integrals für einfache Prozesse allgemeinere Prozesse approximieren, wobei das Integral zwischen diesen Räumen eine stetige Abbildung definiert.

1.3.2 Mathematische Statistik

In diesem Abschnitt wollen wir für diese Arbeit hilfreiche Aussagen der mathematischen Statistik in kurzen Zügen nennen. Zum einen werden wir dabei die Cramér-Rao-Ungleichung und zum anderen Resultate aus der Theorie der Minimum-Kontrast-Schätzer wiederholen. Letzteres wird dabei die Grundlage für den Beweis des in Kapitel 5 genannten zentralen Grenzwertsatzes bilden. Wir beginnen mit der Cramér-Rao-Ungleichung. Hierfür sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$, mit $\Theta \in \mathbb{R}^d$ ein von μ dominiertes statistisches Modell mit Likelihoodfunktion L . Bezeichne mit $l(\vartheta, x) := \log(L(\vartheta, x))$ die Log-Likelihoodfunktion mit der Konvention $\log(0) := \infty$. Falls $\frac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta, x)$ in $L^2(\mathbb{P}_\vartheta)$ existiert, so sei

$$I(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta, x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta, x) \right)^T \right]$$

die Fisher-Informationsmatrix. Die Fisher-Informationsmatrix kann alternativ unter Hinzunahme von Regularitätsbedingungen für die Log-Likelihoodfunktion durch

$$I(\vartheta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} l(\vartheta, x) \right]$$

berechnet werden. Genauer fordern wir hierfür die gleichmäßige Beschränkung der Log-Likelihood bis zur zweiten Ableitung, vergleiche [Bibinger \(2017, S. 45-46\)](#). Somit können wir die folgende Ungleichung formulieren.

Satz 1.3.4 (Cramér-Rao-Ungleichung)

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$, mit $\Theta \in \mathbb{R}^d$ ein statistisches Modell und sei weiter $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ und \hat{g} ein erwartungstreuer Schätzer von $g(\vartheta)$. Gelte für alle ϑ in einer Umgebung um ϑ_0 , dass $\mathbb{P}_\vartheta \ll \mathbb{P}_{\vartheta_0}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta, x) \in L^2(\mathbb{P}_{\vartheta_0})$ sowie

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \int r(x) L(\vartheta, x) \mu(dx) = \int r(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta} L(\vartheta, x) \mu(dx),$$

für $r(x) = 1$ und $r(x) = \hat{g}(x)$, so gibt die Cramér-Rao-Ungleichung im Falle einer strikt positiv definiten Fisher-Informationsmatrix $I(\vartheta_0)$ eine untere Schranke für das quadratische Risiko

$$\mathbb{E}[(\hat{g} - g(\vartheta_0))^2] = \text{Var}_{\vartheta_0}(\hat{g}) \geq \left\langle I(\vartheta_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} g, \frac{\partial}{\partial \vartheta_0} g \right\rangle$$

an.

Für den Beweis der Ungleichung sei auf [Bibinger \(2017, S. 33\)](#) verwiesen. Die Cramér-Rao-Ungleichung besagt somit, dass die ausschlaggebende Größe für eine untere Schranke des quadratischen Risikos durch die invertierte Fisher-Information gegeben ist.

Es folgt die Definition eines Minimum-Kontrast-Schätzers.

Definition 1.3.5

Es sei $(\mathcal{X}_n, \mathcal{F}_n, (\mathbb{P}_\vartheta^n)_{\vartheta \in \Theta})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge statistischer Modelle. Eine Funktion $K : \Theta \times \Theta \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt Kontrastfunktion, falls $\vartheta \mapsto K(\vartheta_0, \vartheta)$ ein eindeutiges Minimum in ϑ_0 hat. Weiter heißt $K_n : \vartheta \times \mathcal{X}_n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zugehöriger Kontrastprozess, falls folgende Bedingungen gelten:

- (i) $K_n(\vartheta, \cdot)$ ist \mathcal{F}_n -messbar für alle $\vartheta \in \Theta$.
- (ii) Für alle $\vartheta, \vartheta_0 \in \Theta$ gilt $K_n(\vartheta) \rightarrow K(\vartheta_0, \vartheta)$ $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ -stochastisch für $n \rightarrow \infty$. Dabei wurde die Kurznotation $K_n(\vartheta) := K_n(\vartheta, x_1, \dots, x_n)$ verwendet.

Der zugehörige Minimum-Kontrast-Schätzer ist dann gegeben durch $\hat{\vartheta}_n(x_n) := \text{argmin}_{\vartheta \in \Theta} K_n(\vartheta)$.

Ein Beispiel eines Minimum-Kontrast-Schätzers ist der Maximum-Likelihood-Schätzer, welcher durch die Wahl eines Produktraums als statistisches Modell entsteht. Vergleiche hierfür [Bibinger \(2017, S. 40\)](#). Im Allgemeinen muss der Minimum-Kontrast-Schätzer nicht existieren und ebenso, falls existent, nicht eindeutig sein. Im Falle der Existenz können wir jedoch folgende Aussage bezüglich der Asymptotik treffen.

Satz 1.3.6

Es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Kontrastprozess zur Kontrastfunktion K . Der Minimum-Kontrast-Schätzer ist konsistent für $\vartheta_0 \in \Theta$, falls

- (1) Θ ein kompakter Raum ist,
- (2) $\vartheta \mapsto K(\vartheta_0, \vartheta)$ stetig und $\vartheta \mapsto K_n(\vartheta) \mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ fast sicher stetig ist,
- (3) $\sup_{\vartheta \in \Theta} |K_n(\vartheta) - K(\vartheta_0, \vartheta)| \rightarrow 0 \mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ -stochastisch.

Ist zusätzlich $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ und $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ im Inneren und sei der Kontrastprozess K_n zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\vartheta_0 \mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ fast sicher, sodass für

$$U_n(\vartheta) := \dot{K}_n(\vartheta) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} K_n(\vartheta), \quad V_n(\vartheta) := \ddot{K}_n(\vartheta) = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} K_n(\vartheta)$$

folgende weitere Bedingungen unter $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ gelten:

- (4) $\sqrt{n}U_n(\vartheta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, U(\vartheta_0))$, mit $U(\vartheta_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist positiv definit.
- (5) Aus $\vartheta_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n} \vartheta_0$ folgt $V_n(\vartheta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n} V(\vartheta_0)$, mit $V(\vartheta_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ regulär.

Dann gilt weiter für den Minimum-Kontrast-Schätzer $\hat{\vartheta}_n$

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) = -\frac{1}{V(\vartheta_0)} \sqrt{n}U_n(\vartheta_0) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n}(1).$$

Insbesondere ist dann $\hat{\vartheta}_n$ unter $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$ asymptotisch normalverteilt mit

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, V(\vartheta_0)^{-1}U(\vartheta_0)V(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Da dieser Satz grundlegend für Kapitel 5 sein wird, werden wir den Beweis kurz skizzieren. Für technische Details sei auf [Bibinger \(2017, S. 43-45\)](#) verwiesen.

Beweisskizze. Wir beginnen mit der Konsistenz. Wir zeigen dabei, dass $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\|\hat{\vartheta} - \vartheta_0\| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dies ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}\left(\left\|\arg \min_{\vartheta \in \Theta} K_n(\vartheta) - \arg \min_{\vartheta \in \Theta} K(\vartheta_0, \vartheta)\right\| > \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Idee wird aus diesem Grund sein, die Behauptung mit dem continuous-mapping-Theorems zu zeigen, wofür wir zeigen, dass $\arg \min$ eine stetige Abbildung definiert. Sei nun $f_n \in C(\Theta)$, mit $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dann konvergieren ebenfalls die Minima. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz und der Eindeutigkeit des Minimums folgt, dass das Minimum von f_n im Grenzwert gerade dem Minimum von f entspricht. Da die Funktion $\arg \min$ eine stetige Abbildung bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|$ an den Stellen definiert, an denen das Minimum eindeutig ist, folgt mithilfe der Voraussetzung (3) des

Satzes und dem continuous-mapping-Theorems die Konsistenz.

Zeigen wir nun den zweiten Teil der Aussage. Definiere hierfür die Menge $\Omega_n^1 := \{[\hat{\vartheta}_n, \vartheta_0] \in \hat{\Theta}\}$, wobei das angegebene Intervall im Mehrdimensionalen als Konvexkombination zwischen $\hat{\vartheta}_n$ und ϑ_0 zu verstehen ist. Da $\vartheta_0 \in \hat{\Theta}$ im Inneren liegt, folgt aufgrund der Konsistenz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\vartheta_0}^n(\Omega_n^1) = 1$. Auf Ω_n^1 folgt weiter aufgrund der Minimumseigenschaft $\dot{K}_n(\hat{\vartheta}_n) = 0$, wobei hier die Ableitung nach dem Parameterraum gemeint ist. Mithilfe des Mittelwertsatzes folgt

$$\dot{K}_n(\hat{\vartheta}_n) - \dot{K}_n(\vartheta_0) = \ddot{K}(\bar{\vartheta}_n)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \iff -U_n(\vartheta_0) = V_n(\bar{\vartheta}_n)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0),$$

wobei $\bar{\vartheta}_n \in [\vartheta_0, \hat{\vartheta}_n]$. Definiere weiter $\Omega_n^2 := \{V_n^{-1}(\bar{\vartheta}_n) \text{ existiert}\}$. Da $V_n^{-1}(\vartheta_0)$ existiert und die Inversenbildung eine stetige Abbildung definiert, existiert diese auch in einer Umgebung von ϑ_0 . Mit Voraussetzung (5) folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\vartheta_0}^n(\Omega_n^2) = 1$ und somit $V_n^{-1}(\bar{\vartheta}_n) \mathbb{1}_{\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}^{\vartheta_0}} V^{-1}(\vartheta_0)$. Somit können wir durch Voraussetzung (4) und dem Lemma von Slutsky die Behauptung folgern. \square

Für die Verteilungskonvergenz im Multivariaten kann eine Dimensionsreduktion, wie im folgenden Satz hilfreich sein. Der Satz von Cramér-Wold wird dabei für den Beweis der asymptotischen Normalität des in Kapitel 5 vorgestellten Schätzers in Verbindung mit einem allgemeinen zentralen Grenzwertsatz benötigt.

Satz 1.3.7 (Cramér-Wold)

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X Zufallsvektoren auf dem \mathbb{R}^d , so sind äquivalent:

- (1) $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \rightarrow \infty$
- (2) Für alle $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $v^T X_n \xrightarrow{d} v^T X$ für $n \rightarrow \infty$.

Nach der Aussage dieses Satzes lässt sich multivariate Verteilungskonvergenz nachweisen, indem man die entsprechende Konvergenz in allen Linearkombinationen zeigt.

2 Statistik im Modell von linearen parabolischen stochastischen partiellen Differentialgleichungen

Dieses Kapitel wird die grundlegenden Elemente dieser Arbeit einführen. Im ersten Teil werden wir dabei das Arbeiten mit Differentialgleichungen mithilfe der Fourieranalysis vorstellen, woraufhin wir unser stochastisches partielles Differentialgleichungsmodell einführen und essentielle Eigenschaften besprechen werden. Zu dem Modell gehören unter anderem die Wahl des Fourier-Raumes sowie die Analyse des stochastischen Fourier-Koeffizienten. Wir werden abschließend statistische Annahmen treffen, anhand derer wir in den folgenden Kapiteln verschiedene Resultate folgern werden.

2.1 Einführung

Motiviert durch natürliche Phänomene bietet die Theorie der stochastischen partiellen Differentialgleichungen eine Erweiterung der bestehenden Theorie. Durch Hinzufügen eines stochastischen Terms an eine deterministische Differentialgleichung werden im Allgemeinen zufällige Fluktuationen in den entsprechenden Modellen berücksichtigt. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die sogenannte Wärmeleitungsgleichung beziehungsweise Heat-Equation, welche sowohl als motivierendes als auch als Anwendungsbeispiel für den Zugang zu linearen parabolischen stochastischen partiellen Differentialgleichungen dienen wird. Diese beschreibt durch eine partielle Differentialgleichung die zeitliche und räumliche Änderung eines Objekts in Abhängigkeit von einem initialen Zustand.

Beispiel 2.1.1 (Deterministische Heat-Equation)

Eine Abbildung $u = u(t, x)$ löst die Heat-Equation in einer Zeit- und einer Raumkoordinate, falls u folgende Bedingungen erfüllt

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} X_t(y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} X_t(y), & \text{auf } (0, \infty) \times [0, 1], \\ X_0(y) = \xi(y), & \text{auf } [0, 1], \\ X_t(0) = X_t(1) = 0, & \text{für alle } t \geq 0, \end{array} \right]$$

wobei $\xi \in L^2[0, 1]$.

In der obigen Definition der Wärmeleitungsgleichung haben wir den Raum auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt, wohingegen die Zeit auf der positiv reellen Achse definiert ist. Dies lässt sich anhand einer Stange mit einer Länge von Eins veranschaulichen. Eine solche Stange wird in ihrem initialen Zustand ξ erhitzt, wobei beide Enden dieser Stange nach der Randbedingung auf Null Grad gehalten

werden. Fortlaufend soll der eintretende Abkühlungsprozess untersucht werden. Da dieser zeitlich zunächst nicht beschränkt ist, ist es sinnvoll die Zeitvariable auf \mathbb{R}_+ zu definieren. Zum Lösen der Heat-Equation verwenden wir die Darstellung einer Lösung über eine Fourierreihe. Sei dafür

$$e_k(y) := \sqrt{2} \sin(\pi ky), \quad k \in \mathbb{N},$$

die Orthonormalbasis des Hilbertraums auf $[0, 1]$ analog zu Kapitel 1.1 mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(y)g(y) dy.$$

Die Reduktion der Basisvektoren auf den Imaginärteil bezüglich der eingeführten komplexen trigonometrischen Basis erfolgte dabei aufgrund einer angenommenen Symmetrie zur Raumachse. Weiterhin ist die Orthogonalität sowie die Normierung durch elementare Rechnungen, ebenfalls analog zu Kapitel 1.1 nachweisbar. Es gilt somit

$$\langle e_n, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k \\ 0, & \text{falls } n \neq k. \end{cases}$$

Sei $X = X_t(y)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $X \in L^2[0, 1]$, dann ist

$$X_t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)e_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 X_t(y)e_k(y) dy \right) e_k(y),$$

wobei $x_k(t) = \langle X_t, e_k \rangle = \int_0^1 X_t(y)e_k(y) dy$. Für eine explizite Form von x_k betrachten wir dessen Ableitung in der Zeit und verwenden anschließend die Struktureigenschaft der Wärmeleitungsgleichung. Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x_k(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} X_t(y)e_k(y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} X_t(y) \right) e_k(y) dy \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} X_t(y) \right) e_k(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} X_t(y) \frac{\partial}{\partial y} e_k(y) dy. \end{aligned}$$

Da $e_k(y) = \sqrt{2} \sin(\pi ky)$ entfällt die Stammfunktion und es ergibt sich mittels partieller Integration und der Randbedingung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} x_k(t) = - \left[X_t(y) \frac{\partial}{\partial y} e_k(y) \right]_0^1 + \int_0^1 X_t(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} e_k(y) dy$$

2.1 Einführung

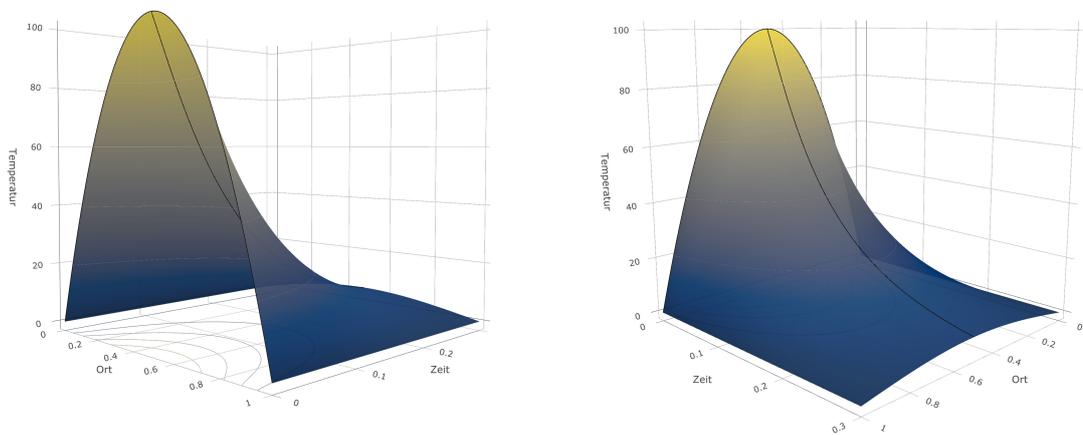


Abbildung 2.1: Darstellung der Lösung der Heat-Equation für $u_0(x) = 400(-x^2 + x)$. Dabei wurde $u(t, x)$ auf $[0, 1] \times [0, 3/10]$ simuliert. Die in schwarz eingezeichnete Kurve stellt dabei die Maximaltemperatur in der Ortskoordinate zu jedem Zeitpunkt dar.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 X_t(y) \left(-k^2 \pi^2 \sqrt{2} \sin(\pi k y) \right) dy \\
 &= -k^2 \pi^2 \int_0^1 X_t(y) e_k(y) dy \\
 &= -k^2 \pi^2 x_k(t).
 \end{aligned}$$

Daraus resultierend erhalten wir folgende gewöhnliche Differentialgleichung für die Fourierkoeffizienten

$$\frac{\partial}{\partial t} x_k(t) = -k^2 \pi^2 x_k(t),$$

deren Lösung mithilfe der Variation der Konstanten von der Form

$$x_k(t) = x_k(0) e^{-k^2 \pi^2 t} = e^{-k^2 \pi^2 t} \int_0^1 X_0(y) e_k(y) dy = e^{-k^2 \pi^2 t} \int_0^1 \xi(y) e_k(y) dy = e^{-k^2 \pi^2 t} \langle \xi, e_k \rangle$$

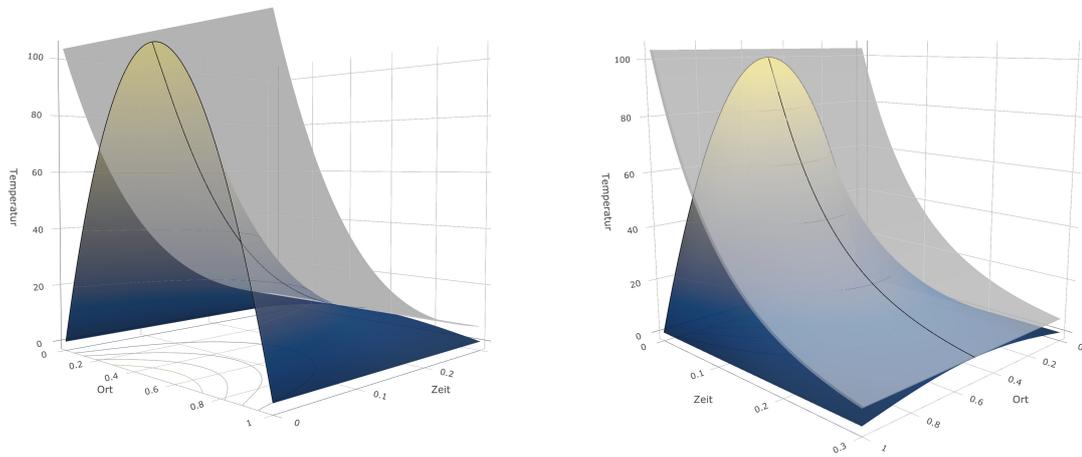


Abbildung 2.2: Darstellung der Lösung der Heat-Equation für $u_0(x) = 400(-x^2 + x)$ auf $[0, 3/10] \times [0, 1]$, mit gleichmäßiger Schranke für die Temperatur.

ist. Als Lösung der Wärmeleitungsgleichung ergibt sich

$$X_t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \left(\int_0^1 \xi(y) e_k(y) dy \right) e_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \langle \xi, e_k \rangle e_k(y).$$

Die Simulation der Lösung wird in Abbildung 2.1 dargestellt. Anhand des Lösungswegs und der Eindeutigkeit der Fourierreihenentwicklung ergibt sich außerdem die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung auf $L^2[0, 1]$. Eine kurze Betrachtung der asymptotischen Entwicklung der Lösung in der Zeit liefert

$$\sup_{x \in [0,1]} |X_t(x)| \propto \sup_{x \in [0,1]} \left| e_1(x) e^{-\pi^2 t} \int_0^1 e_1(y) \xi(y) dy \right| = 2e^{-\pi^2 t} \left| \int_0^1 \sin(\pi y) \xi(y) dy \right|, \quad t \rightarrow \infty.$$

Dies impliziert, dass die Temperatur der Stange gleichmäßig und exponentiell in der Zeit abfällt. Diese gleichmäßige Schranke wurde dabei in Abbildung 2.2 dargestellt. Bevor wir nun die stochastische Version der Wärmeleitungsgleichung betrachten, beginnen wir mit der Einführung unseres Modells und besprechen erste Eigenschaften.

2.2 Grundlegendes Modell

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachten wir folgende lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichung

$$\left[\begin{array}{l} dX_t(y) = \left(\vartheta_2 \frac{\partial^2 X_t(y)}{\partial y^2} + \vartheta_1 \frac{\partial X_t(y)}{\partial y} + \vartheta_0 X_t(y) \right) dt + \sigma_t dB_t(y), \\ X_0(y) = \xi(y), \\ X_t(y_{min}) = X_t(y_{max}) = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{auf } (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times [y_{min}, y_{max}], \\ \text{auf } [y_{min}, y_{max}], \\ \text{für alle } t \geq 0, \end{array} \right] \quad (1)$$

wobei B_t eine zylindrische Brownsche Bewegung auf dem Sobolev-Raum auf $[y_{min}, y_{max}]$ ist. Wir schränken den Sobolev-Raum entsprechend der Definition 1.2.4 weiterhin durch die zusätzliche Randbedingung $f(y_{min}) = f(y_{max}) = 1$ ein. Begründung dafür wird die Wahl des in Kürze eingeführten Hilbertraumes H_ϑ sein. Weiter sei die Anfangsbedingung ξ unabhängig von B und für die Parameter gelte $\vartheta_0, \vartheta_1 \in \mathbb{R}$ und $\vartheta_2 > 0$. Dabei lässt sich der Faktor ϑ_0 als Drift interpretieren, wohingegen ϑ_1 als eine Art Schiefe zu sehen ist. Dafür sei auf das Ende von Kapitel 2.3.1 verwiesen. Der Faktor $\sigma_t > 0$ ist hierbei die Volatilität welche im Zusammenspiel mit ϑ_2 agiert. Hierfür sei auf Kapitel 5 verwiesen. Da in vielen physikalischen Modellen die Dirichlet-Randbedingung Anwendung findet, wurde diese auch in diesem Modell als intuitive Bedingung gewählt. Darüber hinaus sei bemerkt, dass der Volatilitätsparameter eine Funktion ist, welche lediglich von der Zeit abhängt. Dieser ist für die jeweilige stochastische Fluktuation im Modell verantwortlich. Weitere Betrachtungsmöglichkeiten der genannten SPDE wären den Volatilitätsparameter σ von Ort und Zeit abhängig zu machen oder diesen gar als stochastischen Prozess in Zeit und Ort zu verstehen. In dieser Arbeit werden wir uns jedoch ausschließlich mit konstantem $\sigma_t \equiv \sigma$ beschäftigen und dabei zunächst einen geeigneten Schätzer unter der Voraussetzung von bekanntem $\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2)$ vorstellen. Eine Methode zur Schätzung von ϑ wird zudem in Kapitel 5 diskutiert werden. Ergänzend wird bei der Verwendung der Abkürzung SPDE jene eingeführte lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichung aus (1) gemeint sein. Die Wärmeleitungsgleichung aus Beispiel 2.1.1 ist folglich ein konkretes Beispiel für die obige SPDE. Hierbei sind die Parameter $\vartheta_0 = \vartheta_1 = 0$ sowie $\sigma_t \equiv 0$. Der Parameter ϑ_2 wäre nach der Definition aus Beispiel 2.1.1 auf Eins normiert. Allerdings kann diese parabolische Differentialgleichung durch $\vartheta_2 = \alpha$ auf einfache Weise erweitert werden, sodass zudem die Temperaturleitfähigkeit des Materials einkalkuliert werden kann. Eine natürliche Erweiterung der deterministischen Heat-Equation wäre durch das Hinzufügen eines stochastischen Störterms $\sigma_t dB_t$ gegeben, welcher als zufällige Wärmequelle interpretiert werden kann.

Beispiel 2.2.1 (Stochastische Heat-Equation)

Eine Abbildung $u = u(t, x)$ löst die Heat-Equation in einer Zeit- und einer Raumkoordinate, falls u die folgende Bedingungen

$$\left[\begin{array}{l} dX_t(y) = \frac{\partial^2 X_t(y)}{\partial y^2} dt + \sigma_t dB_t(x) \\ X_0(y) = \xi(y), \\ X_t(0) = X_t(1) = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{auf } (0, \infty) \times [0, 1], \\ \text{auf } [0, 1], \\ \text{für alle } t \geq 0 \end{array} \right]$$

erfüllt, wobei $\xi \in L^2[0, 1]$ und $B_t(x)$ eine zylindrische Brownsche Bewegung auf dem Sobolev-Raum von $[0, 1]$ ist.

Auch hier kann der deterministische Teil wiederum durch die Temperaturleitfähigkeit α als Vorfaktor ergänzt werden. Die stochastische Version der Wärmeleitungsgleichung ist durch die Wahl von $\vartheta_2 = 1$ bzw. $\vartheta_2 = \alpha$ sowie $\vartheta_0 = \vartheta_1 = 0$ wiederum ein Spezialfall der SPDE. Als Anwendungsbeispiel werden wir die stochastische Version der Wärmeleitungsgleichung mit einem Volatilitätsparameter gemäß $\sigma_t \equiv \sigma$ verwenden.

2.3 Probabilistische Struktur und statistisches Modell

2.3.1 Probabilistische Struktur der parabolischen SPDE

In diesem Abschnitt wird eine Darstellungsmöglichkeit für das SPDE-Modell aus (2.2) gesucht werden. Präziser werden wir die SPDE mit stochastischen Prozessen auf Hilberträumen mithilfe von Fourierreihen verbinden. Die Fourierkoeffizienten werden eine sogenannte Ornstein-Uhlenbeck-Dynamik besitzen, sodass wir die SPDE letztendlich durch ein unendlichdimensionales Faktormodell darstellen können.

Zu Beginn setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_{min} = 0$ und $y_{max} = 1$. Weiter definieren wir den Differentialoperator

$$A_\vartheta := \vartheta_0 + \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

mit $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, wodurch wir obige SPDE wie folgt in

$$dX_t = A_\vartheta X_t dt + \sigma_t dB_t.$$

umschreiben können. Für die Korrespondenz des SPDE-Modells und dem unendlichdimensionalen Faktormodell führen wir den Hilbertraum

$$H_\vartheta := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_\vartheta < \infty, f(0) = f(1) = 0\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_\vartheta := \int_0^1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] f(y)g(y) dy$$

ein. Die vom Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|_\vartheta$ ist dabei gegeben durch $\|f\|_\vartheta^2 := \langle f, f \rangle_\vartheta$. Der Exponentialterm ist dabei so gewählt, dass die im Folgenden betrachtete Basis normalisiert wird. Als

Basisvektoren von H_ϑ definiere

$$\{e_k(y), k \geq 1\} := \left\{ \sqrt{2} \sin(\pi ky) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right], k \geq 1 \right\},$$

wobei $y \in [0, 1]$. Es gilt offensichtlich, dass $e_k \in H_\vartheta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist und weiter ist für $k \neq j$

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_j \rangle_\vartheta &= \int_0^1 2 \sin(\pi ky) \sin(\pi jy) \exp \left[-\frac{2\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] dy \\ &= \int_0^1 2 \sin(\pi ky) \sin(\pi jy) dy \\ &= \int_0^1 \cos(y\pi(k-j)) - \cos(y\pi(k+j)) dy \\ &= \left[\frac{\sin(y\pi(k-j))}{\pi(k-j)} \right]_0^1 - \left[\frac{\sin(y\pi(k+j))}{\pi(k+j)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi(k-j))}{k-j} - \frac{\sin(\pi(k+j))}{k+j} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analog gilt für $k = j$

$$\langle e_j, e_j \rangle_\vartheta = \int_0^1 \left(1 - \cos(y\pi(2j)) \right) dy = 1.$$

Somit sind die Vektoren e_k aus H_ϑ orthogonal und normiert. Sie bilden daher eine Basis des von e_k aufgespannten Unterraums. Da diese Basis unendlichdimensional ist, bilden die Vektoren e_k letztlich die Basis des Hilbertraums H_ϑ . Weiter nehmen wir an, dass $\xi \in H_\vartheta$ ist. Einen anderen Zugang zu den gewählten Basisvektoren stellt dabei die Eigenwerttheorie für den Differentialoperator A_ϑ dar. Im Allgemeinen lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren und Eigenwerte zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen aus dem charakteristischen Polynom berechnen. Das Vorgehen bei solchen Funktionen ist dabei, die entsprechende lineare Funktion in Form einer darstellenden Matrix zu schreiben, und daraufhin, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen. Im Allgemeinen ist die Darstellung über eine korrespondierende Matrix auch in unendlichdimensionalen Räumen möglich, wodurch sich einige Konzepte der Eigenwerttheorie auch auf beispielsweise Hilberträume übertragen lassen. Wir werden an dieser Stelle den Zusammenhang zwischen der bekannten Eigenwerttheorie für Matrizen und der Eigenwerttheorie in unendlichdimensionalen Hilberträumen kurz erläutern. Das Eigenwertproblem für einen Operator D auf einem beliebig dimensionalen Raum lautet stets

$$Df(x) = \lambda f(x),$$

wobei wir das Skalar λ als Eigenwert und die Funktion f als Eigenfunktion bezeichnen. Sei H ein Hilbertraum mit zugehörigem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in Kapitel 1.1 eingeführt und Orthonormalbasis $\{e_k, k \geq 1\}$. Dann lässt sich mithilfe dieser Elemente eine darstellende Matrix des Operators D über

$$A_{kj} = \langle De_k, e_j \rangle = \int De_k(x) \overline{e_j(x)} dx$$

definieren, wobei A_{kj} den Eintrag der Matrix A in der k -ten Zeile und j -ten Spalte kennzeichnet. Weiterhin kann für beliebiges $f \in H$, die Verknüpfung Df , wie auch f in Form einer Fourierreihe dargestellt werden. Daraus resultiert

$$Df(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k(x) = D \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k De_k(x),$$

wobei c_k die Fourierkoeffizienten von Df und b_k jene von f darstellen. Letztere Umformung folgt dabei durch die Linearität von D . Die Verbindung zur Eigenwerttheorie folgt demnach direkt über das Skalarprodukt dieser Gleichung mit einem beliebigen Basisvektor e_j

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int e_k(x) \overline{e_j(x)} dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int De_k(x) \overline{e_j(x)} dx = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} b_k De_k, e_j \right\rangle,$$

wodurch direkt aufgrund der Orthogonalität folgt

$$c_j = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A_{kj}.$$

Demzufolge erhält man die Darstellung $Ab = c$, wobei A die Matrixdarstellung des Operators D ist und b und c die Vektordarstellungen der Fourierkoeffizienten sind. Schließlich erhalten wir eine äquivalente Darstellung des Operators D durch A . Falls f weiter eine Eigenfunktion ist und λ der Eigenwert, so erhalten wir analog die Gleichung $Ab = \lambda b$. Auch Eigenschaften wie Selbstadjungiertheit lassen sich auf gleichem Wege übertragen. So ist ein Operator selbstadjungiert, falls $A_{kj} = \overline{A_{jk}}$.

Wir möchten nun zeigen, dass die gewählten e_k das Eigenwertproblem

$$A_{\vartheta} e_k = -\lambda_k e_k$$

mit gewissen Eigenwerten λ_k lösen. Dafür betrachte

$$\begin{aligned} A_{\vartheta} e_k(y) &= \vartheta_0 e_k(y) + \sqrt{2} \vartheta_1 \left(\pi k \cos(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] + \sin(\pi k y) \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] \right) \\ &\quad + \sqrt{2} \vartheta_2 \left(\pi k \left(-\pi k \sin(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] + \cos(\pi k y) \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \left(\pi k \cos(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] + \sin(\pi k y) \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] \right) \right) \\ &= \vartheta_0 e_k(y) + \sqrt{2} \vartheta_1 \pi k \cos(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right] - \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} e_k(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\vartheta_2 \pi^2 k^2 e_k(y) + \sqrt{2} \pi k \cos(\pi k y) \frac{-\vartheta_1}{2} \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right] \\
 & + \sqrt{2} \pi k \cos(\pi k y) \frac{-\vartheta_1}{2} \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right] + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} e_k(y) \\
 = & \vartheta_0 e_k(y) - \frac{\vartheta_1^2}{2\vartheta_2} e_k(y) - \vartheta_2 \pi^2 k^2 e_k(y) + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} e_k(y) \\
 & + \sqrt{2} \vartheta_1 \pi k \cos(\pi k y) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right] - \sqrt{2} \vartheta_1 \pi k \cos(\pi k y) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right] \\
 = & \vartheta_0 e_k(y) - \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} e_k(y) - \vartheta_2 \pi^2 k^2 e_k(y) \\
 = & \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} - \vartheta_2 \pi^2 k^2\right) e_k(y).
 \end{aligned}$$

Somit sind e_k die Eigenfunktionen für $k \in \mathbb{N}$ mit den Eigenwerten $-\lambda_k$, wobei

$$\lambda_k := -\vartheta_0 + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} + \vartheta_2 \pi^2 k^2.$$

Zur Herleitung dieses Lösungsansatzes kann unter anderem die Theorie um das sogenannte Sturm–Liouville Problem genutzt werden. Hierfür vergleiche [Hartman \(1982, S.337 ff.\)](#). Die Eigenfunktionen e_k sowie die Eigenwerte λ_k werden im weiteren Verlauf der Arbeit von hoher Bedeutung sein. Dafür bemerke, dass die Eigenfunktionen

$$e_k(y) = \sqrt{2} \sin(\pi k y) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right]$$

eine Abhängigkeit zur Ortskoordinate y im Exponentialterm beinhalten, welcher zusätzlich einen oszillierenden Faktor besitzt. Die Eigenwerte fallen zudem asymptotisch mit der Rate $-\lambda_k \propto -k^2$ ab. Wie aus der Theorie zu dem Sturm–Liouville Problem bekannt, ist der Operator A_ϑ selbstadjungiert in H_ϑ . Zum Nachweis der Selbstadjungiertheit verwenden wir zweifache partielle Integration sowie die Eigenschaft, dass Funktionen aus dem Hilbertraum H_ϑ die Dirichlet-Randbedingung erfüllen. Für die Funktionen $f, g \in H_\vartheta$ folgt

$$\begin{aligned}
 \langle A_\vartheta f, g \rangle_\vartheta &= \int_0^1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] \left(\vartheta_0 f(y) + \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} f(y) + \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y)\right) g(y) \, dy \\
 &= \int_0^1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] f(y) \vartheta_0 g(y) \, dy + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y)\right) \vartheta_1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] g(y) \, dy \\
 &\quad + \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y)\right) \vartheta_2 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] g(y) \, dy \\
 &= \langle f, \vartheta_0 g \rangle_\vartheta + \left[f(y) \vartheta_1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] g(y) \right]_0^1 \\
 &\quad - \int_0^1 f(y) \vartheta_1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) \, dy - \int_0^1 f(y) \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] g(y) \, dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) \vartheta_2 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] g(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) \vartheta_1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] g(y) dy \\
 & - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) \vartheta_2 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) dy \\
 & = \langle f, \vartheta_0 g \rangle_\vartheta - \left\langle f, \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} g \right\rangle_\vartheta - \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \langle f, g \rangle_\vartheta - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) \vartheta_1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] g(y) dy \\
 & - \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} f(y) \right) \vartheta_2 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) dy \\
 & = \langle f, \vartheta_0 g \rangle_\vartheta - \left\langle f, \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} g \right\rangle_\vartheta - \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \langle f, g \rangle_\vartheta - \left[f(y) \vartheta_1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] g(y) \right]_0^1 \\
 & + \int_0^1 f(y) \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] g(y) dy + \int_0^1 f(y) \vartheta_1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) dy \\
 & - \left[f(y) \vartheta_2 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) \right]_0^1 + \int_0^1 f(y) \vartheta_1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial}{\partial y} g(y) dy \\
 & + \int_0^1 f(y) \vartheta_2 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) dy \\
 & = \langle f, \vartheta_0 g \rangle_\vartheta - \left\langle f, \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} g \right\rangle_\vartheta - \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \langle f, g \rangle_\vartheta + \frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_2} \langle f, g \rangle_\vartheta + 2 \left\langle f, \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} g \right\rangle_\vartheta + \left\langle f, \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} g \right\rangle_\vartheta \\
 & = \left\langle f, \left(\vartheta_0 + \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g \right\rangle_\vartheta \\
 & = \langle f, A_\vartheta g \rangle_\vartheta.
 \end{aligned}$$

Nachdem wir das grundlegende Modell geklärt haben, führen wir für den weiteren Verlauf dieser Arbeit eine essentielle stochastische Differentialgleichung ein. Wie bereits erwähnt, möchten wir unsere parabolische SPDE in ein unendlichdimensionales Faktormodell zerlegen, dessen einzelne Koordinaten ebenfalls einer stochastischen Differentialgleichung folgen. Für eine genauere Analyse betrachten wir folgende Definition aus [Bibinger \(2019\)](#).

Definition 2.3.1 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)

Ein stochastischer Prozess x_t heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, falls x_t die stochastische Differentialgleichung

$$dx_t = -\vartheta x_t dt + \sigma dW_t$$

löst, wobei $\vartheta \neq 0$ und W_t eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Weiter kann eine Anfangsbedingung für diese stochastische Differentialgleichung angegeben werden, im Sinne von $x_0 = \xi$, wobei ξ sowohl konstant als auch eine Zufallsvariable sein kann.

Für eine Herleitung einer expliziten Form des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses betrachten wir zunächst den Prozess $Y_t = e^{\vartheta t} x_t$, wobei trivialerweise $Y_0 = x_0$ entspricht. Wir wenden die Itô-Formel 1.3.2 in Differentialform auf Y_t an und es ergibt sich

$$\begin{aligned} dY_t &= \vartheta e^{\vartheta t} x_t dt + e^{\vartheta t} dx_t \\ &= \vartheta e^{\vartheta t} x_t dt + e^{\vartheta t} (-\vartheta x_t dt + \sigma dW_t) \\ &= e^{\vartheta t} \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Somit ist die integrierte Form

$$Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{\vartheta s} dW_s,$$

mit einem Anfangswert Y_0 . Da $x_t = e^{-\vartheta t} Y_t$, löst der Prozess

$$\begin{aligned} x_t &= e^{-\vartheta t} Y_0 + \sigma \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} dW_s \\ &= e^{-\vartheta t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} dW_s \end{aligned}$$

die Ornstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $\xi = x_0$. Anhand der Lösung lässt sich schnell erkennen, dass x_t genau dann ein Gauß-Prozess ist, falls die Startbedingung x_0 normalverteilt oder deterministisch ist. Da unser Modell im Allgemeinen eine zeitabhängige Volatilität besitzt, können wir mit der gleichen Vorgehensweise ebenso die Ornstein-Uhlenbeck-Differentialgleichung mit zeitabhängigem σ_t definieren und erhalten

$$x_t = e^{-\vartheta t} x_0 + \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} \sigma_s dW_s.$$

Da diese Vorgehensweise zu einem Lösungsbegriff für bestimmte Differentialgleichungen führt, rekapitulieren wir nochmals die Ausgangsgleichung dieser Arbeit mit dem Operator

$$dX_t = A_\vartheta X_t dt + \sigma_t dB_t(y).$$

Wenden wir dieselbe Taktik auf $Y_t = e^{A_\vartheta t} X_t$ an, so erhalten wir folgende Definition.

Definition 2.3.2 (Milde Lösung)

Ein Prozess X_t ist eine milde Lösung der SPDE $dX_t = A_\vartheta X_t dt + \sigma_t dB_t(y)$ auf $[0, T]$ für ein $T > 0$, falls X_t der integrierten Form der SPDE für alle $t \in [0, T]$

$$X_t = e^{tA_\vartheta} \xi + \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s \quad \text{f.s.}$$

genügt.

Eine milde Lösung stellt somit eine Minimalanforderung an eine Lösung im Modell der stochastischen PDEs mit einer Raumkoordinate dar. Wir betrachten hierbei die integrierte Form der SPDE ohne weitere Forderungen an den Wahrscheinlichkeitsraum und die Brownschen Bewegung zu stellen. Beginnen wir nun mit der Anwendung des eingeführten Raumes auf die parabolische Differentialgleichung. Wie schon im Beispiel der Wärmeleitungsgleichung 2.1.1 stellen wir eine Lösung auf dem hier definierten Hilbertraum via einer diskreten Fouriertransformation dar. Seien dafür $x_k(t) := \langle X_t, e_k \rangle_\vartheta$ die Fourierkoeffizienten für $t \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$X_t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) e_k(y). \quad (2)$$

Für die Fourierkoeffizienten ergibt sich

$$x_k(t) = \left\langle e^{tA_\vartheta} \xi + \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s, e_k \right\rangle_\vartheta = \langle e^{tA_\vartheta} \xi, e_k \rangle_\vartheta + \left\langle \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s, e_k \right\rangle_\vartheta.$$

Zur weiteren Bestimmung beider Skalarprodukte verwenden wir die Selbstadjungiertheit des Operators A_ϑ sowie das Eigenwertproblem $A_\vartheta e_k = -\lambda_k e_k$. Da wir hier allerdings einen Exponentialoperator vorliegen haben, werden wir nochmals beide Eigenschaften für den Exponentialoperator zeigen. Sei demzufolge $f, g \in H$, wobei der Hilbertraum H mit entsprechendem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist. Da A_ϑ selbstadjungiert ist, folgt mithilfe von Induktion

$$\langle e^{tA_\vartheta} f, g \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A_\vartheta^k f, g \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \langle A_\vartheta^k f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \langle f, A_\vartheta^k g \rangle = \left\langle f, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A_\vartheta^k g \right\rangle = \langle f, e^{tA_\vartheta} g \rangle,$$

da $\langle A_\vartheta^k f, g \rangle = \langle A_\vartheta (A_\vartheta^{k-1} f), g \rangle = \langle A_\vartheta^{k-1} f, A_\vartheta g \rangle$. Daher gilt auch für den Exponentialoperator Selbstadjungiertheit. Weiter ist $A_\vartheta e_k = -\lambda_k e_k$. Demnach folgt auch die Eigenwertgleichung für den Exponentialoperator wiederum durch Induktion mit

$$e^{tA_\vartheta} e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A_\vartheta^k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-\lambda)^k e_k = e^{-t\lambda_k} e_k,$$

da $A_\vartheta^k e_k = A_\vartheta^{k-1} A_\vartheta e_k = A_\vartheta^{k-1} (-\lambda_k) e_k$. Fügen wir beide Elemente zusammen, so folgt in unserem Fall

$$\langle e^{tA_\vartheta} \xi, e_k \rangle_\vartheta = \langle \xi, e^{tA_\vartheta} e_k \rangle_\vartheta = \langle \xi, e^{-t\lambda_k} e_k \rangle_\vartheta = e^{-t\lambda_k} \langle \xi, e_k \rangle_\vartheta.$$

Verwenden wir die Darstellung der zylindrischen Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$, wie in Kapitel 1.2 eingeführt, so ergibt sich

$$\langle B_t, f \rangle_\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle_\vartheta W_t^k,$$

für $f \in H_\vartheta, t \geq 0$ und unabhängigen Brownschen Bewegungen $(W_t^k)_{t \geq 0}$, mit $k \geq 1$. Im Vergleich zu

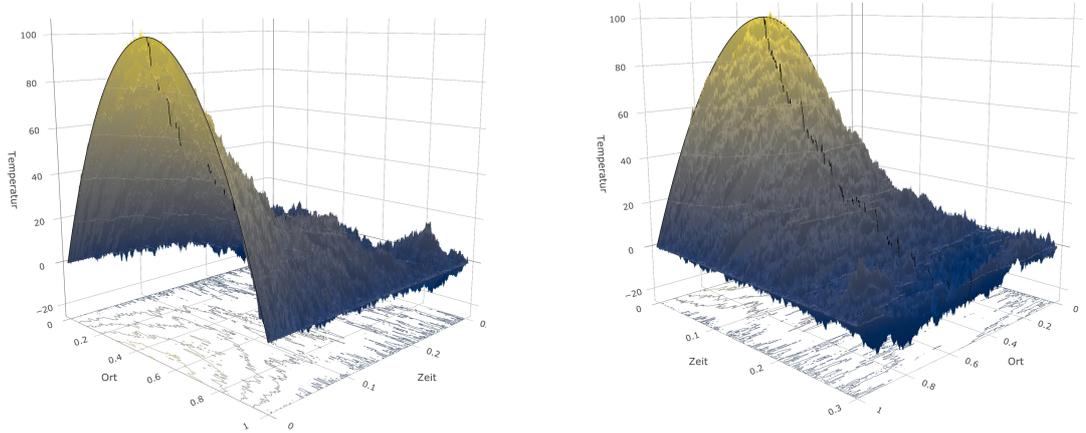


Abbildung 2.3: Darstellung der Lösung der stochastischen Heat-Equation mit deterministischer Anfangsbedingung $\xi(y) = 400(-y^2 + y)$ auf $[0, 3/10] \times [0, 1]$. Als Fluktuation wurde ein zeitunabhängiges $\sigma_s = \sigma = 1/4$ gewählt. Simuliert wurde auf 100 Gitterpunkten im Ort und 300 in der Zeit.

der hergeleiteten Darstellungsmöglichkeit der zylindrischen Brownschen Bewegung wurde als Schreibweise $B_t(f)$ eingeführt, welche den Einfluss von B_t auf f beschreibt. Gleiches gilt in diesem Falle für das Skalarprodukt des Hilbertraums H_ϑ . In diesem Sinne definieren wir die Zerlegung der zylindrischen Brownschen Bewegung im beschriebenen Skalarprodukt durch die rechte Seite der Gleichung. Des Weiteren können wir durch analoge Argumentation und der Integration bezüglich zylindrischen Brownschen Bewegungen für den zweiten Term folgern

$$\begin{aligned}
 \left\langle \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s, e_k \right\rangle_\vartheta &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s^j \right) e_j, e_k \right\rangle_\vartheta \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle e_j \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s^j, e_k \right\rangle_\vartheta \\
 &= \left\langle e_k \int_0^t e^{(t-s)A_\vartheta} \sigma_s dB_s^k, e_k \right\rangle_\vartheta \\
 &= \left\langle e_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dB_s^k, e_k \right\rangle_\vartheta \\
 &= \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dB_s^k.
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Koordinatenprozess

$$x_k(t) = e^{-t\lambda_k} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dB_s^k.$$

Der Koordinatenprozess genügt der Ornstein-Uhlenbeck-Dynamik mit Anfangswert $x_k(0) = \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}$. Aus Gründen der Übersicht verwenden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Notation $x_k(t)$. Hierbei wird die Zeit im Argument des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses festgesetzt. Der entsprechende Fourierkoeffizient ist als Index notiert. Außerdem existiert eine Modifikation der stochastischen Faltung $\int_0^t e^{(-s)A\vartheta} \sigma_s dB_s$, welche stetig in Raum und Zeit ist, sodass wir annehmen können, dass die Abbildung $(t, y) \mapsto X_t(y)$ stetig ist. Dafür sei auf [Da Prato und Zabczyk \(2014, S. 143\)](#) verwiesen. Die Verbindung des SPDE-Modells zu Hilberträumen liefert demnach eine Darstellung der Lösung X_t , welche die Zeit- und Raumkoordinate separiert.

Vergleichen wir diese Darstellungsform mit der hergeleiteten Lösung der deterministischen Wärmeleitungsgleichung, so erhalten wir direkt durch $\sigma_t \equiv 0$ sowie $\vartheta_0 = \vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_2 = 1$

$$x_k(t) = e^{-t\lambda_k} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} = e^{-\pi^2 k^2 t} \langle \xi, e_k \rangle_{(0,0,1)}$$

und somit die identische Lösung. Betrachten wir nun die stochastische Wärmeleitungsgleichung aus [Definition 2.2.1](#), so können wir mithilfe der gefundenen Darstellung diese simulieren. Alle Details zu den Simulationen werden dabei in [Kapitel 6](#) erläutert und können als Code im Anhang nachgelesen werden. Die [Darstellung 2.3](#) verdeutlicht, dass durch das Hinzufügen des stochastischen Terms die Lösung rauer wird. Der Vergleich in [Abbildung 2.4](#) zwischen beiden vorgestellten Lösungen zeigt den Unterschied zwischen deterministischer und stochastischer Wärmeleitungsgleichung nochmals präziser.

Bevor wir nun die Annahmen im statistischen Modell besprechen, gehen wir noch einmal auf die Modellierung des Hilbertraums in unserem SPDE-Modell [\(1\)](#) ein. Intuitiv würden wir anhand der Formulierung eine gewisse Symmetrie in einer Lösung von [\(1\)](#) hinsichtlich der Raumkoordinate erwarten. Die zu erwartende Symmetrie ist dabei, dass die Gestalt einer Lösung bei einer Wahl von ϑ_1 unter $\vartheta_0 = 0$ und $\xi = 0$ symmetrisch zu der Gestalt einer Lösung bei einer Wahl von $-\vartheta_1$ ist. Diese ist jedoch im Fall von $\vartheta_1 \neq 0$ im Allgemeinen nicht auf dem Intervall $y \in [0, 1]$ gegeben. Viel mehr erhalten wir eine Symmetrie unter unserem gewählten Modell in dem Bereich $[-1, 1]$. Dies motiviert dazu, durch eine Translation und Skalierung der Basis eine Symmetrie um dem Intervallsmittelpunkt $y = 1/2$ zu schaffen, sodass die Verteilung von $X_t(1/2 + r)$ für $\vartheta_0 = 0$, $\xi = 0$ und $\vartheta_1 > 0$ identisch zur Verteilung von $X_t(1/2 - r)$ mit $-\vartheta_1$ für $r \in [0, 1/2]$ ist. In der Tat erfüllt die Wahl der Basisvektoren

$$\tilde{e}_k(y) := \sqrt{2} \sin(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] = e_k(y) \exp \left[\frac{\vartheta_1}{4\vartheta_2} \right],$$

welche mit den selben Eigenwerten $-\lambda_k$ unter dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^1 e^{(y-1/2)\vartheta_1/\vartheta_2} f(y)g(y) dy$ korrespondieren, diese spezielle Form der Symmetrie. Dies ist gültig, da die Basisvektoren $\tilde{e}_k(r + 1/2)$ zum Parameter ϑ_1 gleich zu den Basisvektoren $\pm \tilde{e}_k(1/2 - r)$ mit Parameter $-\vartheta_1$ sind, wobei das Vorzeichen jeweils von k abhängig ist. Da der stochastische Term $x_k(t)$ zentriert normalverteilt ist,

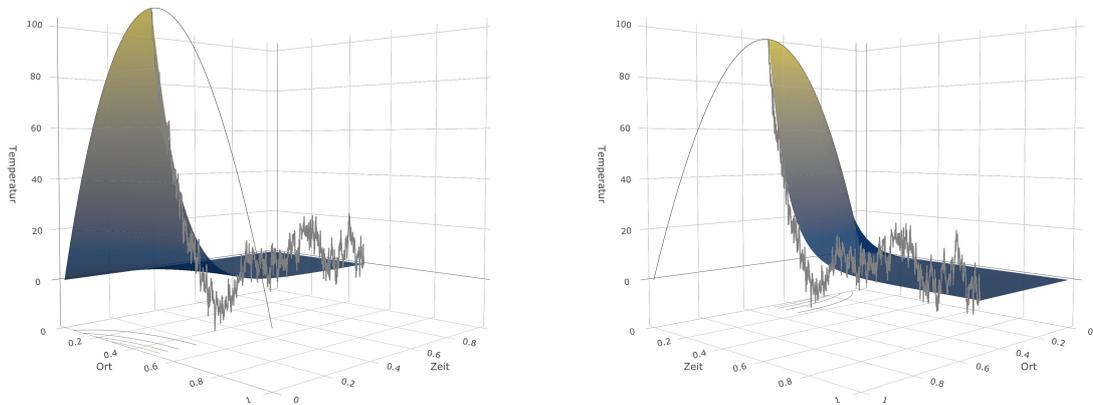


Abbildung 2.4: Darstellung der Lösung der deterministischen und stochastischen Heat-Equation mit deterministischer Anfangsbedingung $\xi(y) = 400(-y^2 + y)$ auf $[0, 3/10] \times [0, 1]$. Als Fluktuation wurde ein zeitunabhängiges $\sigma_s = \sigma = 1/4$ gewählt. Simuliert wurde auf 100 Gitterpunkten im Ort und 300 in der Zeit. Die stochastische Lösung ist dabei nur anhand der grauen Linie im Ortspunkt $y = 0.5$ dargestellt.

folgt die angesprochene Symmetrie. Da diese Änderung lediglich durch die Multiplikation eines von y und t unabhängigen Terms zustande kam, lassen sich alle Resultate unter der modifizierten Basis umsetzen.

2.3.2 Statistisches Modell

Abschließend formulieren wir in diesem Kapitel noch zwei Annahmen, auf denen die Schätzer und zentralen Grenzwertsätze dieser Arbeit basieren werden. Die erste Annahme trifft dabei eine Aussage über die Beobachtungen. So gehen wir davon aus, dass eine Lösung auf einem diskreten Gitter in Ort und Zeit beobachtet wird, wobei die Beobachtungsfrequenz zunehmend feiner werden soll.

Annahme 2.3.3 (Hochfrequente Beobachtungen)

Sei X eine milde Lösung der SPDE, dann beobachten wir diese auf einem diskreten Gitter in Zeit und Raum $(t_i, y_i) \in [0, 1]^2$, wobei

$$t_i = i\Delta_n, \text{ für } i = 0, \dots, n \quad \text{und} \quad \delta \leq y_1 < y_2 < \dots < y_m \leq 1 - \delta.$$

Dabei sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Weiter betrachten wir eine High-Frequency Asymptotik, demnach soll $n\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ und $\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für den Ort kann die Anzahl der Beobachtungen sowohl konstant bei $m \in \mathbb{N}$ sein oder bezüglich der Rate $m = m_n = \mathcal{O}(n^\rho)$ mit $\rho \in (0, 1/2)$ divergieren. Wir nehmen zusätzlich an, dass $m \cdot \min_{j=2, \dots, m} |y_j - y_{j-1}|$ nach unten gleichmäßig in n beschränkt ist.

Wir verwenden die Schreibweise $A_n = \mathcal{O}(B_n)$, falls eine Konstante $0 < C < \infty$ existiert, sodass $|A_n| \leq CB_n$, für alle $n \geq n_0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$. Wir fordern insbesondere, dass die Konstante C frei von jeglichen weiteren potentiellen Indizes ist. Die Festlegung des Zeithorizonts auf 1 kann dabei ohne weiteres auf $T < \infty$ erweitert werden. Die Bedingung $m = \mathcal{O}(n^\rho)$ für ein $\rho \in (0, 1/2)$ impliziert, dass wir eine feinere Zerlegung in der Zeit als im Ort betrachten. Insbesondere soll die Anzahl der Ortsbeobachtungen langsamer als \sqrt{n} wachsen, wodurch $m^2\Delta_n \rightarrow 0$. Die Beschränkung der Ortskoordinate um eine Breite δ vom Rand ist dabei unerlässlich, wie wir in den entsprechenden Beweisen zur Volatilitätsschätzung in Kapitel 3 sehen werden. Diese Anforderung ist auch intuitiv klar. Die in (2) gefundene Darstellungsform einer Lösung impliziert eine multiplikative Verknüpfung der Orts- und Zeitkoordinate. Hierbei ist der stochastische Anteil und somit die Volatilität in der Zeit verankert. Aufgrund der Bedingung, dass eine Lösung der SPDE zum Rand hin gegen Null tendiert, sinkt hier der Einfluss des stochastischen Anteils, sodass die Volatilität nicht mehr zuverlässig zu schätzen ist. Wir werden somit gewisse Aussagen nur im Inneren des Raumintervalls beweisen können, sodass diese nicht am Rand getroffen werden können. Des Weiteren verwenden wir die Schreibweise $\Delta_i X_t(y) := X_{i\Delta_n}(y) - X_{(i-1)\Delta_n}(y)$ für die Inkremente des marginalen Prozesses in der Zeit.

Diese erste Annahme ist zudem durch wirtschaftliche Gegebenheiten motiviert. Betrachten wir als Beispiel Futures auf Staatsanleihen, so bietet Eurex vier verschiedene Klassen von deutschen Staatsanleihen mit verschiedener Vertragslaufzeit an. Für jede werden dabei Futures mit 2-3 verschiedenen Fälligkeiten auf Hochfrequenzbasis gehandelt³. Während wir in diesen Daten bis zu 12 Ortspunkte beobachten können, stehen jeweils 5000-10000 Tagespreise zur Verfügung. Dies rechtfertigt in gewisser Weise auch das Verhältnis zwischen m_n und Δ_n .

Die zweite Annahme ist eine Regularitätsbedingung. Wir regulieren auf zwei unterschiedliche Weisen. Entweder fordern wir ein zentriertes erstes Moment mit existierendem zweiten Moment des Skalarprodukts aus Startverteilung und Basisvektor oder wir regulieren den Operator A_ϑ . In beiden Fällen fordern wir paarweise Unabhängigkeit des genannten Skalarprodukts.

³vergleiche: www.eurexchange.com/exchange-en/products/int

Annahme 2.3.4 (Regularität)

Für die SPDE aus (1) nehmen wir weiter folgende zwei Bedingungen an.

- (1) Entweder gilt $\mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta] = 0$ und $\mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2] < \infty$ für alle $k \geq 1$ oder für den Differentialoperator A_ϑ gilt $\mathbb{E}[\|A_\vartheta^{1/2} \xi\|_\vartheta^2] < \infty$.
- (2) $(\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta)_{k \geq 1}$ sind unabhängig.

Die Bedingungen sind insbesondere erfüllt, falls $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/(2\lambda_k))$ verteilt ist. Für ein genaueres Verständnis der Wahl dieser Verteilung sei auf Kapitel 4, ebenso wie auf Kapitel 6.1 verwiesen. Außerdem impliziert die Forderung $\mathbb{E}[\|A_\vartheta^{1/2} \xi\|_\vartheta^2] < \infty$, dass $\sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{E}[\langle A_\vartheta^{1/2} \xi, e_k \rangle_\vartheta^2] = \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2] < \infty$, wobei dies direkt über die Parsevalsche Identität 1.1.2 mit

$$\mathbb{E}[\|A_\vartheta^{1/2} \xi\|_\vartheta^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\langle A_\vartheta^{1/2} \xi, e_k \rangle_\vartheta^2] < \infty$$

sowie die Eigenwertgleichung ersichtlich wird. Des Weiteren wird die Unabhängigkeitsbedingung von $(\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta)_{k \geq 1}$ zur Analyse der Varianz-Kovarianzstruktur der zu betrachtenden Schätzer benötigt werden, welche jedoch durch passende Bedingungen an die Momente ersetzt werden kann.

Zuletzt nehmen wir an, dass eine Lösung

$$X = \left\{ X_t(y) \mid (t, y) \in [0, T] \times [y_{min}, y_{max}] \right\}$$

der genannten SPDE aus (1) auf einem äquidistanten diskreten Gitter $(t_i, y_j) \in [0, T] \times [y_{min}, y_{max}]$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $t_i = i\Delta_n = iT/n$, in Zeit und Ort beobachtet wird.

3 Volatilitätsschätzung im parabolischen SPDE-Modell

Dieses Kapitel beschäftigt sich weitestgehend mit einer geeigneten Art, die Volatilität aus dem SPDE-Modell (1) zu schätzen. Um dies zu bewerkstelligen, werden wir ein Hauptresultat beweisen, für welches wir noch zusätzliche Lemmas benötigen werden. Die Schätzung wird dabei, inspiriert von der klassischen Theorie der Statistik für stochastische Prozesse, anhand von quadratischen Inkrementen durchgeführt. Aus diesem Grund werden wir das erste Moment dieser Inkremente und ebenso das erste Moment der reskalierten Summen der quadratischen Inkremente untersuchen. Für Aussagen über die Asymptotik, werden wir durch ein zweites Hauptresultat ebenfalls die Kovarianz der quadratischen Inkremente analysieren. Diese Korrelation wird weiterhin in Kapitel 4 von Bedeutung sein. Wir beginnen hierfür mit einer Aufteilung der Inkremente in drei Terme, welche für beinahe alle Beweise von Interesse sein wird.

3.1 Parametrische Schätzung der Volatilität

In diesem Abschnitt werden wir zunächst einen Schätzer für einen konstanten Volatilitätsparameter σ^2 angeben und erste Eigenschaften herleiten. Unser Ziel wird zunächst die Herleitung eines solchen Schätzers anhand einer Raumkoordinate $y \in [\delta, 1 - \delta]$, wobei $\delta > 0$, sein. Hierbei nehmen wir zunächst an, dass ϑ bekannt sei. Auf die Schätzung von ϑ wird in dem späteren Abschnitt 5 eingegangen werden. Häufig werden zur Volatilitätsschätzung eines Prozesses X die zugrundeliegenden quadratischen Inkremente betrachtet. Die Betrachtung der sogenannten realisierten Volatilität wird auch der Ansatz für die Schätzung im vorliegenden SPDE-Modell sein. Dabei werden sich allerdings strukturelle Unterschiede im Vergleich zur Semimartingaltheorie ergeben. Wir können eine Lösung mithilfe der Fourier-Analyse in ein Faktormodell zerlegen, sodass sich eine Lösung durch

$$X_t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) e_k(y)$$

darstellen lässt. Dabei haben die einzelnen Koordinaten x_k die Darstellung

$$x_k(t) = \langle X_t, e_k \rangle = e^{-\lambda_k t} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dW_s^k,$$

wobei e_k sowohl ein Basisvektor des zugrundeliegenden Hilbertraums als auch die Eigenfunktion des Differentialoperators A_{ϑ} bildet. Der zugehörige negative Eigenwert wird dabei als λ_k bezeichnet. Da

wir fortan σ_s^2 als konstant annehmen, wird dies durch σ^2 in obiger Gleichung substituiert. Für die Analyse der Inkremente $\Delta_i X$ genügt es, die Inkremente der Koordinaten zu betrachten, da

$$\Delta_i X = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k(i\Delta_n) - x_k((i-1)\Delta_n) \right) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i x_k e_k.$$

Die Inkremente des Koordinatenprozesses ergeben sich als

$$\begin{aligned} \Delta_i x_k &= x_k(i\Delta_n) - x_k((i-1)\Delta_n) \\ &= \left(e^{-\lambda_k i\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k - \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k \\ &= \left(e^{-\lambda_k i\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^{(i-1)\Delta_n} \left(e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} - e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} \right) \sigma dW_s^k \\ &\quad + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k \\ &= \left(e^{-\lambda_k i\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) \sigma dW_s^k \\ &\quad + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k. \end{aligned}$$

Wir unterteilen $\Delta_i x_k = A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}$ in drei Komponenten, wobei

$$A_{i,k} = \left(e^{-\lambda_k i\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}, \quad (3)$$

$$B_{i,k} = \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) \sigma dW_s^k, \quad (4)$$

$$C_{i,k} = \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k. \quad (5)$$

Der Term $A_{i,k}$ beinhaltet demnach die Startbedingung in den Inkrementen. Die Terme $B_{i,k}$ und $C_{i,k}$ beinhalten die Brownschen Bewegungen. Während $C_{i,k}$ den reinen Zuwachs vom Zeitpunkt $(i-1)\Delta_n$ bis $i\Delta_n$ beschreibt, ist der Term $B_{i,k}$ eine Mischung aus den Koordinatenprozessen bis zum Zeitpunkt $(i-1)\Delta_n$. Bei näherer Betrachtung wird ersichtlich werden, dass die Komponenten $A_{i,k}$ und $B_{i,k}$ bei konstantem λ_k asymptotisch vernachlässigbar sind und der Exponentialterm in $C_{i,k}$ sich an den Wert Eins annähern wird, wodurch die quadratischen Inkremente einen einfachen Schätzer für σ^2 geben werden. Da sich λ_k und k^2 asymptotisch gleich verhalten, werden bei späterer Summation höhere Summanden vernachlässigbar. Unter genauerer Betrachtung können wir mit dem vorliegenden Ansatz die erste Proposition formulieren.

Satz 3.1.1

Unter den Annahmen 2.3.3 und 2.3.4 gilt für konstantes σ und ein $y \in [\delta, 1 - \delta]$ für $i = 1, \dots, n$, dass

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sqrt{\Delta_n} e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} + r_{n,i} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}),$$

wobei für die Restterme $r_{n,i}$ gilt, dass $\sup_{i=1, \dots, n} |r_{n,i}| = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$, $\sum_{i=1}^n r_{n,i} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ und die Restterme durch Summieren der quadratischen Inkremente vernachlässigbar werden, im Sinne von

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y)\right] = e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} + \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Betrachten wir zunächst diese Aussage, so fällt auf, dass der Erwartungswert eines quadratischen Inkrements zu einem Zeitpunkt $i\Delta_n$ von diesem Zeitpunkt lediglich in Form des Restterms $r_{n,i}$ abhängig ist. Wird allerdings über alle quadratischen Inkremente summiert, so wird diese Abhängigkeit vernachlässigbar. Überdies weist der führende Term des ersten Moments der quadratischen Inkremente, im Gegensatz zur strukturellen Beschaffenheit des Raumes, keinen oszillierenden Faktor in der Raumkoordinate auf. Wir beobachten lediglich einen exponentiellen Abfall, wodurch die Struktur des nachfolgenden Schätzers erheblich vereinfacht wird. Anhand dieses ersten Satzes ist es weithin möglich, einen Momentenschätzer für die quadratische Volatilität zu konstruieren. Heuristisch betrachtet setzen wir das empirische Moment der reskalierten realisierten Volatilität gleich dem entsprechenden theoretischen Moment und erhalten somit den Momentenschätzer

$$\frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) = e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\hat{\sigma}_y^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_y^2 = \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) e^{y\vartheta_1/\vartheta_2}.$$

Nach Satz 3.1.1 ist der Schätzer $\hat{\sigma}_y^2$ des Weiteren ein konsistenter Schätzer, welcher von der Raumkoordinate lediglich durch den Exponentialterm abhängig ist. Die simple Struktur dieses Schätzers entsteht maßgeblich durch das Verschwinden des Restterms $r_{n,i}$ bei Summierung. Der Beweis des Satzes 3.1.1 wird hierbei die einfache Struktur des Schätzers näher beleuchten und aus Gründen der Übersicht in mehreren Schritten vorgenommen. Es werden zunächst drei Lemmas bewiesen. Das erste Lemma wird sich dabei näher mit dem Restterm $r_{n,i}$ befassen, wohingegen das zweite Lemma für weitere Berechnungen hilfreich sein wird. Im dritten Lemma wird die Berechnung der quadratischen Inkremente anhand der vorigen Lemmas nochmals präzisiert. Schließlich werden im eigentlichen Beweis diese Elemente zusammengeführt und somit die Behauptung gefolgert. Bevor wir nun mit dem ersten Lemma beginnen, halten wir noch zwei häufig verwendete Techniken fest. Wir werden die Partialsumme der geometrischen Reihe des Öfteren benötigen, welche sich für jedes $q \neq 1$ durch

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (6)$$

darstellen lässt. Insbesondere konvergiert die geometrische Reihe für $|q| < 1$ gegen den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^n q^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}. \quad (7)$$

Zudem werden wir vermehrt folgende Abschätzung verwenden

$$\frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \leq 1-p, \quad (8)$$

mit $0 \leq p, q < 1$. Da $1-q \leq 1-pq \Leftrightarrow q \geq pq \Leftrightarrow 1 \geq p$, wobei die Fälle $p \wedge q = 0$ trivial sind, ist diese elementare Ungleichung gezeigt.

Lemma 3.1.2

Unter den Annahmen von 2.3.3 und 2.3.4 existiert eine Folge $(r_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$, mit $\sum_{i=1}^n r_{n,i} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$, sodass

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) e_k^2(y) + r_{n,i}.$$

Beweis. Wir rekapitulieren nochmals die Zerlegung der Inkremente des Koordinatenprozesses $\Delta_i x_k = A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}$, wobei

$$\begin{aligned} A_{i,k} &= \left(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle, \\ B_{i,k} &= \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) \sigma dW_s^k, \\ C_{i,k} &= \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $X_t(y) = \sum_{k \geq 1} x_k(t) e_k(y)$. Da ξ unabhängig zur Brownschen Bewegung W ist und die Inkremente von W ebenso unabhängig sind, gilt $\mathbb{E}[A_{i,k} B_{i,l}] = \mathbb{E}[A_{i,k} C_{i,l}] = \mathbb{E}[B_{i,k} C_{i,l}] = 0$, für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Somit ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k(y) \Delta_i x_k \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[e_k(y) e_l(y) \Delta_i x_k \Delta_i x_l] \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y) e_l(y) \left(\mathbb{E}[A_{i,k} A_{i,l}] + \mathbb{E}[B_{i,k} B_{i,l}] + \mathbb{E}[C_{i,k} C_{i,l}] \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbb{E}[A_{i,k} B_{i,l}] + 2\mathbb{E}[A_{i,k} C_{i,l}] + 2\mathbb{E}[B_{i,k} C_{i,l}] \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y)e_l(y) \left(\mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}] + \mathbb{E}[B_{i,k}B_{i,l}] + \mathbb{E}[C_{i,k}C_{i,l}] \right).$$

Da $\{e_k\}_{k \geq 1}$ deterministisch ist, wurde hierbei lediglich die Linearität des Erwartungswertes verwendet. Des Weiteren unterteilen wir nun die Doppelreihe in zwei Terme.

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y)e_l(y) \left(\mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}] + \mathbb{E}[B_{i,k}B_{i,l}] + \mathbb{E}[C_{i,k}C_{i,l}] \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y)e_l(y) \left(\mathbb{E}[B_{i,k}B_{i,l}] + \mathbb{E}[C_{i,k}C_{i,l}] \right) + r_{n,i}, \end{aligned}$$

wobei $r_{n,i} = \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y)e_l(y)\mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}]$. Betrachten wir nun $\mathbb{E}[B_{i,k}B_{i,l}]$ mit $k \neq l$, so gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Brownschen Bewegungen W^k, W^l , dass auch das Itô-Integral bezüglich deterministischen Integranden unabhängig und zentriert ist. Mit der gleichen Argumentation für $\mathbb{E}[C_{i,k}C_{i,l}]$ folgt

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y)e_l(y) \left(\mathbb{E}[B_{i,k}B_{i,l}] + \mathbb{E}[C_{i,k}C_{i,l}] \right) + r_{n,i} = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^2(y) \left(\mathbb{E}[B_{i,k}^2] + \mathbb{E}[C_{i,k}^2] \right) + r_{n,i}.$$

Wir berechnen nun die übrigen Terme $A_{i,k}A_{i,l}, B_{i,k}^2, C_{i,k}^2$ im Erwartungswert separat. Mithilfe der Itô-Isometrie für $B_{i,k}$ und $C_{i,k}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}] &= (e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n}) (e^{-\lambda_l i \Delta_n} - e^{-\lambda_l (i-1) \Delta_n}) \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} \langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}] \\ &= (e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n - \lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n}) (e^{-\lambda_l (i-1) \Delta_n - \lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l (i-1) \Delta_n}) \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} \langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}] \\ &= (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1) e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i-1) \Delta_n} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} \langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}] \\ &= (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}) (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}) e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i-1) \Delta_n} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} \langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}], \\ \mathbb{E}[B_{i,k}^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{(i-1) \Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1) \Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) \sigma \, dW_s \right)^2 \right] \\ &= \int_0^{(i-1) \Delta_n} \mathbb{E} \left[e^{-2\lambda_k ((i-1) \Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 \sigma^2 \right] \, ds \\ &= \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 \left[\frac{1}{2\lambda_k} e^{-2\lambda_k ((i-1) \Delta_n - s)} \right]_0^{(i-1) \Delta_n} \\ &= \sigma^2 (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k (i-1) \Delta_n}}{2\lambda_k}, \\ \mathbb{E}[C_{i,k}^2] &= \int_{(i-1) \Delta_n}^{i \Delta_n} e^{-2\lambda_k (i \Delta_n - s)} \sigma^2 \, ds = \sigma^2 \left[\frac{1}{2\lambda_k} e^{-2\lambda_k (i \Delta_n - s)} \right]_{(i-1) \Delta_n}^{i \Delta_n} = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k}, \end{aligned}$$

wobei das zweite Moment von $C_{i,k}$ analog zum zweiten Moment von $B_{i,k}$ berechnet wurde. Somit

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left((1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{2\lambda_k} + \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} \right) e_k^2(y) + r_{n,i} \\
 &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} - \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{2\lambda_k} + \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} \right) e_k^2(y) + r_{n,i} \\
 &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} - \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{2\lambda_k} \right) e_k^2(y) + r_{n,i} \\
 &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \left(1 - \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) e_k^2(y) + r_{n,i},
 \end{aligned}$$

wobei $r_{n,i}$ nun von der Form

$$r_{n,i} = \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y) e_l(y) (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}) (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}) e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i-1)\Delta_n} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} \langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}] \quad (9)$$

und daher abhängig von ξ und i ist. Schließlich verbleibt es nur noch zu zeigen, dass der aufsummierte Restterm $\sum_{i=1}^n r_{n,i}$ der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ entspricht. Dafür verwenden wir die Annahme 2.3.4. Sei nun $\mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}] = 0$ und $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2] < \infty$, so existiert ein $C > 0$ mit $\sup_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2] \leq C/\lambda_k$. Wir erhalten mithilfe der Unabhängigkeit von $(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta})_{k \geq 1}$,

$$r_{n,i} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} e_k^2(y) \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2] \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} e_k^2(y).$$

Für die Alternative in Annahme 2.3.4, sei $\mathbb{E}[\|A_{\vartheta}^{1/2} \xi\|_{\vartheta}^2] < \infty$ mit $A_{\vartheta} = \vartheta_0 + \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Wir benutzen die Selbstadjungiertheit von A_{ϑ} auf dem Hilbertraum H_{ϑ} , sodass durch das Eigenwertproblem $\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle = \langle \xi, A_{\vartheta}^{1/2} e_k \rangle = \langle \xi, -\lambda^{1/2} e_k \rangle = -\lambda^{1/2} \langle \xi, e_k \rangle$ gilt und daher

$$\begin{aligned}
 r_{n,i} &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}) e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} e_k(y) \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k^{1/2}} e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta} e_k(y) \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung $(\sum x_i y_i)^2 \leq (\sum x_i^2) (\sum y_i^2)$ folgt

$$r_{n,i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} e_k^2(y) \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right],$$

wobei nach dem deterministischen Teil $x_i = (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})/\lambda_k^{1/2} e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} e_k(y)$ und dem stochastischen Teil mit $y_i = \langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}$ getrennt wurde. Des Weiteren wenden wir die Parsevalsche Identität

1.1.2 auf das Innere des Erwartungswertes an und erhalten

$$r_{n,i} \leq 2C \mathbb{E} \left[\|A_{\vartheta}^{1/2} \xi\|_{\vartheta}^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-2\lambda_k (i-1)\Delta_n},$$

da zusätzlich $e_k^2(y) = 2 \sin^2(\pi k y) \exp(-\frac{\vartheta_1}{2} y) \leq 2C$, für $y \in [0, 1]$. Ist $\vartheta_1 \geq 0$, so ergibt sich insbesondere die Abschätzung $e_k^2(y) \leq 2$, für alle $y \in [0, 1]$. Da nach Annahme $\mathbb{E} \left[\|A_{\vartheta}^{1/2} \xi\|_{\vartheta}^2 \right] < \infty$ gilt, haben wir eine gleichmäßige Abschätzung für beide Fälle der Annahme 2.3.4 gefunden. Es folgt der letzte Beweisschritt mittels der Partialsumme der geometrischen Reihe (6)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_{n,i} &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \sum_{i=1}^n e^{-2\lambda_k (i-1)\Delta_n} \\ &= C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})} (1 - e^{-2\lambda_k n \Delta_n}) \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})} \\ &= C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die eingeführte elementare Ungleichung (8) verwendet. Durch eine Einsergänzung mit Δ_n können wir die Riemannsche-Summenapproximation verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_{n,i} &\leq C \Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} = C \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\sqrt{\lambda_k \Delta_n}^2}}{\sqrt{\lambda_k \Delta_n}^2} \sqrt{\Delta_n} \\ &\leq C \left(\sqrt{\Delta_n} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} dz + o(\sqrt{\Delta_n}) \right), \end{aligned} \tag{11}$$

wobei ein äquidistantes Gitter der Feinheit $\sqrt{\Delta_n}$ mit den Gitterpunkten $\sqrt{\lambda_k \Delta_n}$ und $\lambda_k = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} - \pi^2 k^2 \vartheta_2$ verwendet wurde. Wir fordern hierbei implizit, dass die Konstante C groß genug gewählt wurde, um zusätzlich den Fehler aus der Riemann-Approximation in Höhe von $o(\sqrt{\Delta_n})$ auszugleichen. Somit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n r_{n,i} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$$

und die Behauptung folgt. □

Der Restterm $r_{n,i}$ aus (9) beinhaltet dementsprechend alle gemischten Momente der Startbedingung über die verschiedenen Kombinationen von Indizes, welche sich in Basisvektor e_k und Intensitätsparameter λ_k widerspiegeln. Die Eigenschaft, dass die Summation über alle diese gemischten Momente konvergiert und asymptotisch verschwindet, legt die Vermutung nahe, dass die Anfangsbedingung unter stochastischer Konvergenz austauschbar ist. Wir werden auf diesen Punkt nochmal in

Kapitel 4 in Form des Lemmas 4.1.4 zurückkommen. Das nun folgende Lemma wird zur Berechnung der Summe aus Lemma 3.1.2 dienen. Der Beweis dieses Lemmas wird zunächst eine Integralapproximation für eine gegebene Reihe zu einer gewissen Fehlerrate herleiten. Bezogen auf das dritte Lemma 3.1.4 werden wir dabei nochmals eine Präzisierung dieser Rate vornehmen, sodass wir im abschließenden Lemma sehen können, dass sich schlechtere Raten der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ gegenseitig eliminieren. Hierfür sei auf das Ende des Beweises aus Lemma 3.1.4 verwiesen.

Lemma 3.1.3

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar mit $\|f(x^2)\|_{L^1([0, \infty))}, \|(1 \vee x)f'(x)\|_{L^1([0, \infty))}, \|(1 \vee x^2)f''(x^2)\|_{L^1([0, \infty))} \leq C$ und $|f(0)| \leq C$ für ein $C > 0$, dann gilt

$$(i) \quad \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) = \int_0^{\infty} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz - \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} f(0) + \mathcal{O}(\Delta_n),$$

$$(ii) \quad \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) \cos(2\pi k y) = -\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} f(0) + \mathcal{O}((\delta^{-2} \Delta_n) \wedge (\delta^{-1} \Delta_n^{1/2})), \text{ für alle } y \in [\delta, 1 - \delta],$$

und $\delta > 0$ aus Annahme 2.3.3.

Beweis. Wir beginnen mit Teil (i) des Beweises. Betrachte zunächst folgende Umformung

$$\lambda_k \Delta_n = \left(-\vartheta_0 + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} + \pi^2 k^2 \vartheta_2 \right) \Delta_n = z^2 \pi^2 \vartheta_2 + \Delta_n \left(\frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} - \vartheta_0 \right),$$

wobei die Substitution $z^2 = k^2 \Delta_n$ verwendet wurde. Im Weiteren genügt es $\lambda_k \Delta_n \approx \pi^2 z^2 \vartheta_2$ anzunehmen. Dies wird deutlich durch die Taylorentwicklung von f im Punkt a , denn es gilt

$$f(x) = f(a) + f'(\xi')(x - a),$$

wobei das Lagrange-Restglied mit einem ξ' aus dem Urbildraum verwendet wurde. Somit ist für laufendes n der Restterm $\Delta_n \left(\frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} - \vartheta_0 \right)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_n)$ und in diesem Sinne vernachlässigbar. Wir benutzen weiter die Riemann-Summenapproximation auf dem Gitter $a_k := \sqrt{\Delta_n} \left(k + \frac{1}{2} \right)$, für $k \geq 0$. Die Gitterpunkte sind somit äquidistant mit einer Feinheit von $|a_k - a_{k-1}| = \sqrt{\Delta_n}$. Für eine genauere Betrachtung der Approximation definieren wir folgende Funktion $\tilde{f}(z) := f(\pi^2 \vartheta_2 z^2)$. Hierdurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) - \int_{\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}}^{\infty} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz &= \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\pi^2 k^2 \Delta_n \vartheta_2) - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz + \mathcal{O}(\Delta_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) dz - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}(z) dz + \mathcal{O}(\Delta_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) - \tilde{f}(z) dz + \mathcal{O}(\Delta_n) =: T_1. \end{aligned}$$

Wir benutzen wiederum die Taylor-Entwicklung für $\tilde{f}(z)$ im Punkt $\sqrt{\Delta_n} k$ mit einem Restglied vom

Grad Zwei und einem Punkt $\xi_k \in [a_{k-1}, a_k]$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left(\tilde{f}(\sqrt{\Delta_n k}) - \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n k}) - \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})(y - \sqrt{\Delta_n k}) - \frac{1}{2} \tilde{f}''(\xi_k)(y - \sqrt{\Delta_n k})^2 \right) dy + \mathcal{O}(\Delta_n) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left(\tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})(y - \sqrt{\Delta_n k}) + \frac{1}{2} \tilde{f}''(\xi_k)(y - \sqrt{\Delta_n k})^2 \right) dy + \mathcal{O}(\Delta_n). \end{aligned}$$

Betrachten wir den Term erster Ordnung separiert für ein festes $k \in \mathbb{N}$, so folgt mithilfe der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})(y - \sqrt{\Delta_n k}) dy &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})y dy - \int_{a_{k-1}}^{a_k} \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})\sqrt{\Delta_n k} dy \\ &= \frac{\tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})}{2} (a_k^2 - a_{k-1}^2) - \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})\sqrt{\Delta_n k}(a_k - a_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k}) \left(\Delta_n(k + 1/2)^2 - \Delta_n(k - 1/2)^2 \right) - \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k})\sqrt{\Delta_n k}\sqrt{\Delta_n} \\ &= \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n k}) \left(\frac{1}{2} \Delta_n 2k - \Delta_n k \right) = 0. \end{aligned}$$

Da $\|(1 \vee x)f''(x^2)\|_{L^1([0, \infty))} \leq C$ ist auch $\|(1 \vee x)\tilde{f}''(x)\|_{L^1([0, \infty))} \leq C$, für ein $C > 0$ und es folgt

$$T_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{1}{2} \tilde{f}''(\xi_k)(y - \sqrt{\Delta_n k})^2 dy + \mathcal{O}(\Delta_n) = \mathcal{O}\left(\Delta_n \int_0^{\infty} |\tilde{f}''(y)| dy\right) + \mathcal{O}(\Delta_n). \quad (12)$$

Somit besitzt die Differenz zwischen Integralapproximation durch die Reihe und dem Integral eine Ordnung von $\mathcal{O}(\Delta_n)$ und es folgt

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) = \int_0^{\infty} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz - \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz + \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Das abgezogene Integral auf der rechten Seite der Gleichung lässt sich dabei approximativ durch die Länge des Intervalls multipliziert mit einem Funktionswert im Bereich des Intervalls mit einem Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_n)$ beschreiben. Mit

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) = \int_0^{\infty} f(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz + f(0) \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n) \quad (13)$$

folgt die Behauptung.

Wir beginnen mit dem Beweis von Teil (ii) des Lemmas. Seien \tilde{f} und a_k wie in Teil (i), dann können wir wie folgt umformen

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) \cos(2\pi k y) &= \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n k}) \cos(2\pi k y) + \mathcal{O}(\Delta_n) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n k}) e^{i2\pi k y} \right) + \mathcal{O}(\Delta_n), \end{aligned}$$

wobei die Identität $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ verwendet wurde. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{a_{k-1}}^{a_k} \exp\left[\frac{i2\pi uy}{\sqrt{\Delta_n}}\right] du &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{i2\pi y} \left[\exp\left[\frac{i2\pi uy}{\sqrt{\Delta_n}}\right] \right]_{a_{k-1}}^{a_k} \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{i2\pi y} \left(\exp\left[\frac{i2\pi a_k y}{\sqrt{\Delta_n}}\right] - \exp\left[\frac{i2\pi a_{k-1} y}{\sqrt{\Delta_n}}\right] \right) \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{i2\pi y} \left(\exp\left[i2\pi \left(k + \frac{1}{2}\right) y\right] - \exp\left[i2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right) y\right] \right) \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{i2\pi y} (e^{i\pi y} - e^{-i\pi y}) e^{i2\pi k y} \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta_n}}{i2\pi y} 2i \sin(\pi y) e^{i2\pi k y} = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \sqrt{\Delta_n} e^{i2\pi k y},
 \end{aligned}$$

wobei die Definition von a_k , die Identität $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ und die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen \sin und \cos verwendet wurden. Man bemerke, dass hier bereits $y \in [\delta, 1]$, für alle $\delta > 0$ benutzt wurde. Bezeichne weiter $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Fouriertransformation der Funktion $f \in L^1$, mit $\mathcal{F}[f](x) = \int f(t) e^{-ixt} dt$. Es ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) e^{i2\pi k y} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \exp\left[\frac{i2\pi uy}{\sqrt{\Delta_n}}\right] du \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \int_{a_0}^{\infty} \exp\left[\frac{i2\pi uy}{\sqrt{\Delta_n}}\right] \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]}(u) du \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \int_{a_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \exp\left[\frac{i2\pi uy}{\sqrt{\Delta_n}}\right] \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]}(u) du \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \mathcal{F} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]} \right] \left(-\frac{2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right) \\
 &= T_2 + T_3,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 T_2 &:= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \mathcal{F} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]} - \tilde{f} \mathbb{1}_{(a_0, \infty]} \right] \left(\frac{-2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right), \\
 T_3 &:= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \mathcal{F} \left[\tilde{f} \mathbb{1}_{(a_0, \infty]} \right] \left(\frac{-2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle fordern wir für die Wohldefiniertheit $y \in [\delta, 1 - \delta]$, für alle $\delta > 0$. Außerdem ist die Aufteilung in T_2 und T_3 aufgrund der Linearität der Fouriertransformation gültig. Vergleiche hierfür [Werner \(2006, S.206 ff.\)](#). Zusätzlich gilt folgende Abschätzung bezüglich der Fouriertransformation

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{\infty} = \sup_x \left| \int f(t) e^{ixt} dt \right| \leq \sup_x \int |f(t)| |e^{ixt}| dt = \sup_x \int |f(t)| dt = \int |f(t)| dt = \|f\|_{L^1},$$

für eine beliebige Funktion $f \in L^1$. Für eine beliebige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt ebenso, dass $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$. Somit können wir T_2 zunächst wie in (12) beschränken durch

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left\| \mathcal{F} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]} - \tilde{f} \mathbb{1}_{(a_0, \infty)} \right] \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]} - \tilde{f} \mathbb{1}_{(a_0, \infty)} \right\|_{L^1} = \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Eine Ordnung von $\sqrt{\Delta_n}$ kommt dabei durch das Fehlen der Gitterbreite aus der Riemann Approximation im Term T_1 zustande. Da $\sin(\pi y)$ für $y \in \{\delta, 1 - \delta\}$ und einem δ nahe Null ebenfalls nahe Null ist, wurde eine zusätzliche Beschränkung mit in die Rate genommen. Dies wird mithilfe der Identität $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ und der Symmetrie von Sinus, durch $\sin(\pi(1 - y)) = \sin(\pi y) \approx y$, für $y \in \{\delta, 1 - \delta\}$ und $\delta \approx 0$ ersichtlich. Für den Term T_3 benötigen wir eine Abschätzung der Fouriertransformation, sodass $|\mathcal{F}[f](x)| \leq M|x|$ für ein $M > 0$. Da $f', f'' \in L^1$, ist auch ihre Fouriertransformation in L^1 . Weiter gilt für die Ableitung $\mathcal{F}[f^{(n)}] = (iz)^n \mathcal{F}[f](z)$, vergleiche hierfür [Brigola \(1997, S. 177\)](#). Somit folgt direkt

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[(f')(z)]| &= |z \mathcal{F}[f](z)| = \mathcal{O}(1), \\ |\mathcal{F}[(f'')(z)]| &= |z^2 \mathcal{F}[f](z)| = \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

und damit $|\mathcal{F}[f](z)| = \mathcal{O}(z^{-1} \wedge z^{-2})$. Für $0 < \delta \leq y$ können wir dadurch

$$\left| \mathcal{F} \left[f \right] \left(\frac{-2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right| = \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right)$$

folgern. Hierdurch ergibt sich für T_3 mittels Transformationssatz für Integrale

$$\begin{aligned} T_3 &= \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \mathcal{F} \left[\tilde{f} \mathbb{1}_{(0, a_0]} \right] \left(\frac{-2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right) \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right) - \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}} \cos \left(\frac{2\pi y u}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \tilde{f}(u) du \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right) - \frac{\sqrt{\Delta_n} \pi y}{\sin(\pi y)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi y u) \tilde{f}(u \sqrt{\Delta_n}) du. \end{aligned}$$

Da das Integral beschränkt ist, erhalten wir die Rate

$$|T_3| = \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2} \right).$$

Das Minimum der beiden Raten kann ebenfalls durch $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}/\delta)$ ersetzt werden. Durch analoges

Vorgehen mit dem Imaginärteil lässt sich ebenso

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) \cos(2\pi k y) = \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k \Delta_n) \sin(2\pi k y) = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right) \quad (14)$$

folgern. Somit wurde für die beiden Terme T_2, T_3 eine Rate von $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}/\delta)$ ermittelt. Um die Behauptung zu folgern betrachten wir abschließend nochmals beide Terme genauer. Mithilfe von partieller Integration folgt für den Term T_3

$$\begin{aligned} T_3 &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right) - \frac{\sqrt{\Delta_n} \pi y}{\sin(\pi y)} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi y u) \tilde{f}(u\sqrt{\Delta_n}) \, du \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right) - \frac{\sqrt{\Delta_n} \pi y}{\sin(\pi y)} \left(\left[\frac{\sin(2\pi y u)}{2\pi y} \tilde{f}(u\sqrt{\Delta_n}) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\Delta_n} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi y u)}{2\pi y} \tilde{f}'(u\sqrt{\Delta_n}) \, du \right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right) - \frac{\sqrt{\Delta_n} \pi y}{\sin(\pi y)} \left(\frac{\sin(\pi y)}{2\pi y} \tilde{f}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}\right) - \sqrt{\Delta_n} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi y u)}{2\pi y} \tilde{f}'(u\sqrt{\Delta_n}) \, du \right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right) - \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \tilde{f}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}\right) - \frac{\Delta_n}{2 \sin(\pi y)} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi y u) \tilde{f}'(u\sqrt{\Delta_n}) \, du \\ &= -\frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \tilde{f}(0) + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt analog zu (13) erfolgt. Zusätzlich ist das obige Integral beschränkt, da Sinus beschränkt ist und die erste Ableitung nach Voraussetzung integrierbar ist, sodass wir insgesamt eine Rate von $\mathcal{O}(\Delta_n/\delta)$ erhalten. Für eine präzisere Rate von $|T_2|$ betrachten wir letztendlich die Taylorentwicklung genauer und es folgt mit einem $\xi_k \in [a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} |T_2| &= \left| \operatorname{Re} \left(\frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \mathcal{F} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) \mathbb{1}_{(a_{k-1}, a_k]} - \tilde{f} \mathbb{1}_{(a_0, \infty]} \right] \left(\frac{-2\pi y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right) \right| \\ &= \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (\tilde{f}(\sqrt{\Delta_n} k) - \tilde{f}(z)) \exp \left[\frac{i2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right] dz \right) \right| \\ &= \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \operatorname{Re} \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left((z - \Delta_n^{1/2} k) \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) + \frac{1}{2} (z - \Delta_n^{1/2} k)^2 \tilde{f}''(\xi_k) \right) \exp \left[\frac{i2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right] dz \right) \right| \\ &\leq \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \operatorname{Re} \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (z - \Delta_n^{1/2} k) \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \exp \left[\frac{i2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right] dz \right) \right| \\ &\quad + \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left| \frac{1}{2} (z - \Delta_n^{1/2} k)^2 \tilde{f}''(\xi_k) \exp \left[\frac{i2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right] \right| dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (z - \Delta_n^{1/2} k) \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \operatorname{Re} \left(\exp \left[\frac{i2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right] \right) dz \right| \\
 &\quad + \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{1}{2} (z - \Delta_n^{1/2} k)^2 |\tilde{f}''(\xi_k)| dz \\
 &= \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \int_{\sqrt{\Delta_n}(k-1/2)}^{\sqrt{\Delta_n}(k+1/2)} (z - \Delta_n^{1/2} k) \cos \left(\frac{2\pi z y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) dz \right| + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta} \int_0^{\infty} |\tilde{f}''(z)| dz \right) \\
 &= \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \int_{-\sqrt{\Delta_n}/2}^{\sqrt{\Delta_n}/2} z \cos \left(\frac{2\pi(z + \sqrt{\Delta_n} k) y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) dz \right| + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta} \int_0^{\infty} |\tilde{f}''(z)| dz \right),
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt eine Translation des Integrals durch $\Phi(z) = z + \sqrt{\Delta_n} k$ erfolgte. Durch die Berechnung des elementaren Integrals $\int z \cos(a(z+b)) dz = \frac{z \sin(a(z+b))}{a} + \frac{\cos(a(z+b))}{a^2}$, für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, lässt sich letztlich mithilfe von trigonometrischen Eigenschaften und $a = 2\pi y/\sqrt{\Delta_n}, b = \sqrt{\Delta_n} k$ der Betrag von T_2 wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 |T_2| &\leq \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \left[\frac{z\sqrt{\Delta_n}}{2\pi y} \sin \left(\frac{2\pi(z + \sqrt{\Delta_n} k) y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right]_{\sqrt{-\Delta_n}/2}^{\sqrt{\Delta_n}/2} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{f}'(\Delta_n^{1/2} k) \left[\frac{\Delta_n}{4\pi^2 y^2} \cos \left(\frac{2\pi(z + \sqrt{\Delta_n} k) y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right]_{-\sqrt{\Delta_n}/2}^{\sqrt{\Delta_n}/2} \right| + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta} \int_0^{\infty} |\tilde{f}''(z)| dz \right) \\
 &= \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} \left| \frac{\Delta_n (\pi y \cos(\pi y) - \sin(\pi y))}{2\pi^2 y^2} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}'(\sqrt{\Delta_n} k) \sin(2\pi k y) \right| + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta} \int_0^{\infty} |\tilde{f}''(z)| dz \right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Der letzte Umformungsschritt erfolgte dabei auf Grundlage der folgenden Rechnung

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{z\sqrt{\Delta_n}}{2\pi y} \sin \left(\frac{2\pi(z + \sqrt{\Delta_n} k) y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right]_{\sqrt{-\Delta_n}/2}^{\sqrt{\Delta_n}/2} + \left[\frac{\Delta_n}{4\pi^2 y^2} \cos \left(\frac{2\pi(z + \sqrt{\Delta_n} k) y}{\sqrt{\Delta_n}} \right) \right]_{-\sqrt{\Delta_n}/2}^{\sqrt{\Delta_n}/2} \\
 &= \frac{\Delta_n}{4\pi y} \left(\sin(2\pi y(k+1/2)) + \sin(2\pi y(k-1/2)) \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta_n}{4\pi^2 y^2} \left(\cos(2\pi y(k+1/2)) - \cos(2\pi y(k-1/2)) \right) \\
 &= \frac{\Delta_n}{4\pi y} \left(\sin(2\pi k y) \cos(\pi y) + \cos(2\pi k y) \sin(\pi y) + \sin(2\pi k y) \cos(\pi y) - \cos(2\pi k y) \sin(\pi y) \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta_n}{4\pi^2 y^2} \left(\cos(2\pi k y) \cos(\pi y) - \sin(2\pi k y) \sin(\pi y) - (\cos(2\pi k y) \cos(\pi y) + \sin(2\pi k y) \sin(\pi y)) \right) \\
 &= \frac{2\Delta_n \sin(2\pi k y) \cos(\pi y)}{4\pi y} - \frac{2\Delta_n \sin(2\pi k y) \sin(\pi y)}{4\pi^2 y^2} \\
 &= \frac{\Delta_n (\pi y \cos(\pi y) - \sin(\pi y))}{2\pi^2 y^2} \sin(2\pi k y).
 \end{aligned}$$

Durch analoge Begründungen wie bei (14) ist die Reihe aus dem letzten Umformungsschritt (15) beschränkt und somit ist

$$|T_2| = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \wedge \frac{\Delta_n}{\delta^2}\right).$$

Die Behauptung folgt daher durch das Zusammensetzen von $T_2 + T_3$. \square

Die erste Aussage des vorangegangenen Lemmas lässt uns die angegebene Reihe mithilfe eines Integrals und einem spezifischen Argument im Integranden berechnen. Diese Berechnung des Integrals ist als Approximation mit einer Fehlerrate von $\sqrt{\Delta_n}$ zu verstehen. Mithilfe der zweiten Aussage können gleichartige Reihen mit einem zusätzlichen oszillierenden Faktor asymptotisch vernachlässigt werden. Es folgt nun das letzte Lemma in diesem Kapitel. Hierbei werden wir ausgehend von 3.1.2 und mithilfe des vorigen Lemmas 3.1.3 die Berechnung des Erwartungswertes für die quadratischen Inkremente präzisieren. Aussage (i) des Lemmas 3.1.3 wird zur Berechnung gewisser Terme beitragen und mithilfe von (ii) werden wir in der Lage sein Restterme ausfindig zu machen.

Lemma 3.1.4

Es gelten die Annahmen 2.3.3 und 2.3.4. Dann ist für alle $y \in [\delta, 1 - \delta]$ und $\delta > 0$

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_2}\right]}{\pi \sqrt{\vartheta_2}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-z^2}}{2} e^{-2z^2(i-1)}\right) dz + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right),$$

mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und den Resttermen $r_{n,i}$ aus Lemma 3.1.2.

Beweis. Lemma 3.1.2 liefert direkt

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sigma^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}\right) 2 \sin^2(\pi k y) \exp\left[-\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_2}\right] + r_{n,i},$$

wobei die Eigenwerte e_k direkt eingesetzt wurden. Weiter unterteilen wir diesen Term in folgende Komponenten

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \exp\left[-\frac{\vartheta_1 y}{\vartheta_2}\right] (I_1 - I_2(i) - R(i)) + r_{n,i},$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^\infty \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n}, \\ I_2(i) &:= \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^\infty \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k \Delta_n} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}, \\ R(i) &:= \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^\infty \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}\right) \cos(2\pi k y). \end{aligned}$$

Diese Aufteilung hat ihre Gültigkeit, da aufgrund der Identität $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$ folgt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) 2 \sin^2(\pi k y) \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) (1 - \cos(2\pi k y)) \\
 &= \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} - \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) (1 - \cos(2\pi k y)) \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} - \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \cos(2\pi k y) \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right).
 \end{aligned}$$

Zudem wurde eine Einsergänzung mit Δ_n vorgenommen. Im Weiteren werden wir nun mit Lemma 3.1.3 die einzelnen Terme genauer bestimmen. Dabei werden die Terme $I_1, I_2(i)$ mithilfe von Lemma 3.1.3 Teil (i) berechnet werden. Mittels Lemma 3.1.3 Teil (ii) werden wir fortan sehen, dass die Terme $R(i)$ vernachlässigbar sind. Wir beginnen mit dem erstem Term. Für die Anwendung von Lemma 3.1.3 (i) verwenden wir die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(x) = (1 - e^{-x})/x$, für $x > 0$ und einer stetigen Ergänzung in $f(0) = 1$. Diese Funktion erfüllt zudem die Voraussetzungen des Lemmas. Wir werden dabei diese Voraussetzungen an dieser Stelle einmal exemplarisch durchrechnen. Zunächst ist f offensichtlich zweimal stetig differenzierbar. Die stetige Ergänzung kann dabei gleichermaßen leicht durch die Regel von de l'Hospital gezeigt werden, denn demnach gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{1} = 1.$$

Zusätzlich gilt mithilfe partieller Integration und der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} (1 - e^{-x^2}) \right]_0^n + \int_0^n 2e^{-x^2} dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n^2} - 1}{n} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(n) - \left(\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{-n^2} - 1}{n} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(n) \right) = \sqrt{\pi} < \infty, \quad (16)
 \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{erf} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ die Fehlerfunktion bezeichnet. Analytische Eigenschaften können dabei in Andrews (1992, S. 110 ff.) nachgelesen werden. An dieser Stelle verwenden wir lediglich den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(n) = 1$ sowie $\operatorname{erf}(0) = 0$. Ebenso ist

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) dx + \int_1^\infty x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) dx = \left[\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right]_0^1 + \left[\frac{1 - e^{-x^2}}{x} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx < \infty \quad (17)$$

mithilfe partieller Integration, der Regel von de l'Hospital sowie (16). Für die Bedingung bezüglich

der zweiten Ableitung ergibt sich mit (17) und analogen Rechnungen

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) dx + \int_1^\infty x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) \right]_0^1 + \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) \right]_1^\infty - \int_1^\infty 2x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \right) dx < \infty. \end{aligned}$$

Somit kann Lemma 3.1.3 (i) angewendet werden und es ergibt sich

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2}}{\pi^2 \vartheta_2 z^2} dz - \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Für den zweiten Term betrachten wir folgende Funktionenschar $g_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $1 \leq i \leq n$ und

$$g_i(x) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-x})^2 e^{-2x(i-1)}}{2x}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Mit analogen elementaren Rechnungen sind die Voraussetzungen erfüllt und es folgt

$$I_2(i) = \int_0^\infty g_i(\pi^2 \vartheta_2 z^2) dz + \mathcal{O}(\Delta_n) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2})^2 e^{-2\pi^2 \vartheta_2 z^2(i-1)}}{2\pi^2 \vartheta_2 z^2} dz + \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Als Letztes verwenden wir Lemma 3.1.3 (ii) für die Funktion

$$h_i(x) := \frac{1 - e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{(1 - e^{-x}) e^{-2x(i-1)}}{2} \right),$$

für $x > 0$ mit der stetige Ergänzung $h_i(0) = 1$ und erhalten

$$R(i) = -\frac{1}{2} \sqrt{\Delta_n} + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta^2} \wedge \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \right).$$

Schließlich folgt durch lineare Substitution

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] &= \sqrt{\Delta_n} \sigma^2 \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] \left(\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2}}{\pi^2 \vartheta_2 z^2} - \frac{(1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2})^2 e^{-2\pi^2 \vartheta_2 z^2(i-1)}}{2\pi^2 \vartheta_2 z^2} dz \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} + \mathcal{O}(\Delta_n) + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{\delta^2} \wedge \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} \right) \right) + r_{n,i} \\ &= \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right]}{\pi \sqrt{\vartheta_2}} \left(\int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} - \frac{(1 - e^{-z^2})^2 e^{-2z^2(i-1)}}{2z^2} dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathcal{O}(\Delta_n) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n}{\delta^2} \wedge \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta}\right) + r_{n,i} \\
 & = \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\pi \sqrt{\vartheta_2}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-z^2}}{2} e^{-2z^2(i-1)}\right) dz + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right)
 \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. \square

Es folgt der Beweis von Satz 3.1.1.

Beweis Satz 3.1.1. Wir schließen direkt an Lemma 3.1.4 an und verwenden die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] & = \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\pi \sqrt{\vartheta_2}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-z^2}}{2} e^{-2z^2(i-1)}\right) dz + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right) \\
 & = \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\pi \sqrt{\vartheta_2}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} - \frac{(1 - e^{-z^2})^2 e^{-2z^2(i-1)}}{2z^2} dz + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Die Berechnung der beiden Integralhälften mithilfe der Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$ analog zu (16) aus dem Beweis von Lemma 3.1.4 liefert

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Das zweite Integral unterteilen wir für eine detaillierte Berechnung in folgende drei Teile

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-z^2})^2 e^{-2z^2\tau}}{z^2} dz & = \int_0^\infty \frac{e^{-2z^2\tau} - 2e^{-z^2(1+2\tau)} + e^{-2z^2(1+\tau)}}{z^2} dz \\
 & = \int_0^\infty \frac{e^{-2z^2\tau}}{z^2} dz - 2 \int_0^\infty \frac{e^{-z^2(1+2\tau)}}{z^2} dz + \int_0^\infty \frac{e^{-2z^2(1+\tau)}}{z^2} dz \\
 & = A - 2B + C,
 \end{aligned}$$

wobei $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig. Es sei bemerkt, dass wir in (18) einen zusätzlichen Faktor von $1/2$ haben. Wir beginnen mit dem ersten Term und erhalten mittels partieller Integration sowie Substitution durch die Funktion $\Phi_1(x) = \sqrt{2\tau}x$. Für die Grenzen $a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ folgt

$$\begin{aligned}
 A & = \int_a^b \frac{e^{-2z^2\tau}}{z^2} dz = -\left[\frac{1}{z} e^{-2z^2\tau}\right]_a^b - \int_a^b 4\tau e^{-2z^2\tau} dz \\
 & = -\left[\frac{1}{z} e^{-2z^2\tau}\right]_a^b - 4\tau \int_{\Phi_1(a)}^{\Phi_1(b)} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-u^2} du = -\left[\frac{1}{z} e^{-2z^2\tau}\right]_a^b - \sqrt{2\tau\pi} \operatorname{erf}(\Phi_1(a), \Phi_1(b)),
 \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{erf}(a, b) = 2/\sqrt{\pi} \int_a^b e^{-x^2} dx$ die verallgemeinerte Fehlerfunktion bezeichnet. Für den zweiten Term ergibt sich analog

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b \frac{e^{-z^2(1+2\tau)}}{z^2} dz = - \left[\frac{1}{z} e^{-z^2(1+2\tau)} \right]_a^b - \int_a^b 2(1+2\tau) e^{-z^2(1+2\tau)} dz \\ &= - \left[\frac{1}{z} e^{-z^2(1+2\tau)} \right]_a^b - 2(1+2\tau) \int_{\Phi_2(a)}^{\Phi_2(b)} \frac{1}{\sqrt{1+2\tau}} e^{-u^2} du \\ &= - \left[\frac{1}{z} e^{-z^2(1+2\tau)} \right]_a^b - \sqrt{(1+2\tau)\pi} \operatorname{erf}(\Phi_2(a), \Phi_2(b)), \end{aligned}$$

wobei $\Phi_2(x) = \sqrt{2(1+\tau)}x$. Zuletzt berechnen wir den dritten Term mit $\Phi_3(x) = x\sqrt{2(1+\tau)}$

$$\begin{aligned} C &= \int_a^b \frac{e^{-2z^2(1+\tau)}}{z^2} dz = - \left[\frac{1}{z} e^{-2z^2(1+\tau)} \right]_a^b - \int_a^b 4(1+\tau) e^{-2z^2(1+\tau)} dz \\ &= - \left[\frac{1}{z} e^{-2z^2(1+\tau)} \right]_a^b - 4(1+\tau) \int_{\Phi_3(a)}^{\Phi_3(b)} \frac{1}{\sqrt{2(1+\tau)}} e^{-u^2} du \\ &= - \left[\frac{1}{z} e^{-2z^2(1+\tau)} \right]_a^b - \sqrt{2(1+\tau)\pi} \operatorname{erf}(\Phi_3(a), \Phi_3(b)). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-z^2})^2 e^{-2z^2\tau}}{z^2} dz &= - \left[\frac{1}{z} e^{-2z^2\tau} - \frac{2}{z} e^{-z^2(1+2\tau)} + \frac{1}{z} e^{-2z^2(1+\tau)} \right]_a^b \\ &\quad - \sqrt{2\tau\pi} \operatorname{erf}(\Phi_1(a), \Phi_1(b)) + 2\sqrt{(1+2\tau)\pi} \operatorname{erf}(\Phi_2(a), \Phi_2(b)) \\ &\quad - \sqrt{2(1+\tau)\pi} \operatorname{erf}(\Phi_3(a), \Phi_3(b)). \end{aligned}$$

Betrachten wir die Stammfunktion genauer, so können wir durch die zweite Binomische Formel diese umformen zu

$$\left[\frac{1}{z} e^{-2z^2\tau} - \frac{2}{z} e^{-z^2(1+2\tau)} + \frac{1}{z} e^{-2z^2(1+\tau)} \right]_a^b = \left[\frac{e^{-2z^2\tau} (1 - e^{-z^2})^2}{z} \right]_a^b.$$

Lassen wir nun die Grenzen $a \rightarrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ streben, so kann man leicht sehen, dass sich aufgrund der Regel von de l'Hospital die angegebene Stammfunktion im Punkt Null so verhält, wie

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(-4a\tau e^{-2a^2\tau} (1 - e^{-a^2})^2 - e^{-2a^2\tau} 2(1 - e^{-a^2}) 2ae^{-a^2} \right) = 0$$

und damit verschwindet. Für $b \rightarrow \infty$ ergibt sich direkt, dass die Stammfunktion verschwindet. Da weiter Φ_1, Φ_2 sowie Φ_3 lineare Funktionen sind, betrachten wir wiederum die herkömmliche Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x) = 2/\sqrt{2} \int_0^x e^{-z^2} dz$, welche im Grenzwert gegen unendlich den Wert Eins annimmt.

Das Integral nimmt somit den Wert

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-z^2})^2 e^{-2z^2\tau}}{z^2} dz = \sqrt{\pi} \left(2\sqrt{1+2\tau} - \sqrt{2\tau} - \sqrt{2(1+\tau)} \right) \quad (19)$$

an. Setzen wir diese Berechnungen in die Form aus Lemma 3.1.4 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] &= \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{\pi\vartheta_2}} \left(1 - \sqrt{1+2(i-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} \right) \\ &\quad + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

und der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar mit

$$\mathbb{E}[(\Delta_i X)^2(y)] = \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{\pi\vartheta_2}} + r_{n,i} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2}}{\delta^2}\right) = \sqrt{\Delta_n} e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} + r_{n,i} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}).$$

Der von i -abhängige Term in (20) wurde dabei in den Restterm $r_{n,i}$ gezogen. Hierbei ergibt sich wiederum durch Lemma 3.1.2 und 3.1.4, dass $\sup_{1 \leq i \leq n} |r_{n,i}| = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ sowie $\sum_{i=1}^n r_{n,i} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ ist. Für den zweiten Teil der Aussage betrachte

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta_n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{\pi\vartheta_2}} \left(1 - \sqrt{1+2(i-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} \right) \\ &= \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{\pi\vartheta_2}} - \frac{1}{n} \frac{\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{\pi\vartheta_2}} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1+2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} \right). \end{aligned}$$

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1+2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} \right) = \mathcal{O}(1),$$

denn dann ist

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) \right] \\ &= e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} - \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1+2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} \right) + \frac{C}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n r_{n,i} + \mathcal{O}(\Delta_n^2) \\ &= e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2\pi}} + \mathcal{O}(\Delta_n), \end{aligned}$$

mit einer Konstanten C . Für die Konvergenz der oberen Summe benutzen wir die Idee einer Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = \infty$, beziehungsweise die sogenannte Puiseux-Entwicklung. Für die technischen Details sei als Referenz auf [Shafarevich und Reid \(1994, S. 134 ff.\)](#) verwiesen. Wir können obige Summe

zu

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1+2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2(i-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{2+2(i-1)} = \sum_{i=1}^n \sqrt{2i-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i}\right)$$

umformen. Definieren wir weiter die Funktion in der Summe, welche wir für $x_0 \rightarrow \infty$ entwickeln wollen, durch

$$\begin{aligned} h(x) &:= \sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right) \\ &= \sqrt{x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1\right)\right), \end{aligned}$$

so erhalten wir für die Substitution $y = 1/x$ auf den Term innerhalb der äußeren Klammer

$$\sqrt{2-y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-y} + 1\right),$$

den Entwicklungspunkt $y_0 \rightarrow 0$. Bilden wir nun die Taylorentwicklung zweiter Ordnung, so verschwindet der Term von Grad Null und es folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{2-y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-y} + 1\right) &= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2-y_0}} + \frac{1}{2\sqrt{2-2y_0}}\right)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \lim_{y_0 \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4(2-y_0)^{3/2}} + \frac{1}{2(2-2y_0)^{3/2}}\right)(y-y_0)^2 + \mathcal{O}(y^3) \\ &= 0 + \frac{1}{16\sqrt{2}}y^2 + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned}$$

Durch eine Rücksubstitution erhalten wir letztlich

$$h(x) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

und somit

$$\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{2i-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{3/2}}\right), \quad (21)$$

wobei $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-3/2}$ konvergent und damit auch beschränkt ist. Es folgt die Behauptung. \square

Betrachten wir die Aussage des gerade bewiesenen Satzes 3.1.1 noch einmal, so fällt zunächst auf, dass das zweite Moment eines beliebigen Inkrements einer Lösung der SPDE aus (1) mit einer Rate von $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$ verschwindet. Da der Erwartungswert der Terme $B_{i,k}, C_{i,k}$ zentriert ist, verschwindet das erste Moment direkt unter der Annahme, dass $\mathbb{E}\langle \xi, e_k \rangle_{\mathcal{H}}$ ebenfalls zentriert ist. Im Falle der Regulierung des Differentialoperators verschwindet die Anfangsbedingung mit einer Rate von $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$. Betrachten wir hingegen die Summation der quadratischen Inkremente, so entsprechen diese im Erwartungswert dem angegebenen Wert mit einer Fehlerrate von $\mathcal{O}(\Delta_n)$.

3.2 Kovarianzstruktur der Inkremente mit einheitlicher Ortskoordinate

Für eine nähere Beleuchtung der asymptotischen Verteilung des Momentenschätzers $\hat{\sigma}_y^2$ ist eine Betrachtung der höheren Momente notwendig. So können wir zunächst nicht annehmen, dass die Inkremente $(\Delta_i X)^2(y)$ für $1 \leq i \leq n$ unkorreliert sind. Um letztlich auch einen zentralen Grenzwertsatz für diesen Schätzer herleiten zu können, betrachten wir den folgenden Satz.

Satz 3.2.1

Unter den Annahmen 2.3.3 und 2.3.4 gilt für die Kovarianz der Inkremente $(\Delta_i X)(y)$, $1 \leq i \leq n$ gleichmäßig in $y \in [\delta, 1 - \delta]$ für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) = \\ -\sqrt{\Delta_n} \sigma^2 \frac{\exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{2\sqrt{\vartheta_2 \pi}} \left(2\sqrt{|i-j|} - \sqrt{|i-j|-1} - \sqrt{|i-j|+1}\right) + r_{i,j} + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{3/2}\right), \end{aligned}$$

wobei $|i-j| \geq 1$ und die Restglieder $r_{i,j}$ sind im Sinne von $\sum_{i,j=1}^n r_{i,j} = \mathcal{O}(1)$ vernachlässigbar.

Im Beweis dieses Satzes werden Schritte aus Lemma 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 und Satz 3.1.1 verwendet werden und daher nicht nochmals ausführlicher behandelt.

Beweis. Wie bereits in Lemma 3.1.2 verwenden wir die Zerlegung der Inkremente von X in die Koordinatenprozesse. Wie zuvor erläutert ist $\Delta_i X(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i x_k e_k(y)$ und $\Delta_i x_k = A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}$. Wir beginnen vor diesem Hintergrund mit der Berechnung der Kovarianz. Sei $j \neq i$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i < j$ annehmen und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \text{Cov}(\Delta_i x_k, \Delta_j x_l) e_k(y) e_l(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}, A_{j,k} + B_{j,k} + C_{j,k}) e_k^2(y), \end{aligned}$$

wobei die Bilinearität der Kovarianz ausgenutzt wurde. Des Weiteren sind die Inkremente der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse $(x_k)_{k \geq 1}$ gegenseitig unabhängig, sodass die Kovarianzen $\text{Cov}(\Delta_i x_k, \Delta_j x_l)$ verschwinden, da zusätzlich $(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta})_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig nach Annahme 2.3.4. Durch erneute Verwendung der Bilinearität können wir die einzelnen Komponenten in der Kovarianz trennen. Daher berechnen wir zunächst die Kovarianz der Terme $B_{i,k}, B_{j,k}$. Da wir in späteren Beweisen die nun folgenden Kovarianzen erneut benötigen, werden wir diese für allgemeine i, j berechnen. Wir beginnen mit der Kovarianz zwischen $B_{i,k}, B_{j,k}$. Sei hierfür zunächst $i \leq j$

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,j}^{B,k} &:= \text{Cov}(B_{i,k}, B_{j,k}) \\ &= \sigma^2 \left(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1 \right)^2 e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n} e^{-\lambda_k (j-1) \Delta_n} \text{Cov} \left(\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_0^{(j-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^2 \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}\right)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \text{Cov} \left(\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\
 &\quad + \sigma^2 \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}\right)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \text{Cov} \left(\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_{(i-1)\Delta_n}^{(j-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\
 &= \sigma^2 \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}\right)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right]^2 \right) \\
 &= \sigma^2 \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}\right)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \int_0^{(i-1)\Delta_n} \mathbb{E} \left[e^{2\lambda_k s} \right] ds \\
 &= \sigma^2 \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}\right)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \frac{e^{2\lambda_k(i-1)\Delta_n} - 1}{2\lambda_k} \\
 &= \sigma^2 \left(e^{2\lambda_k(i-1)\Delta_n - \lambda_k(i+j-2)\Delta_n} - e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \right) \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} \\
 &= \sigma^2 \left(e^{-\lambda_k \Delta_n(j-i)} - e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \right) \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k}.
 \end{aligned}$$

Dabei wurden die unabhängigen Inkremente und zentrierten Momente von W^k sowie die Itô-Isometrie aus Satz 1.3.2 benutzt. Es folgt für beliebige i, j

$$\Sigma_{i,j}^{B,k} = \sigma^2 \left(e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} - e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \right) \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k}. \quad (22)$$

Betrachten wir als Nächstes die Kovarianz der Komponenten $C_{i,k}$ und $C_{j,k}$, so ist diese direkt wegen der unabhängigen Inkremente von C gleich Null, also $\Sigma_{i,j}^{C,k} = \text{Cov}(C_{i,k}, C_{j,k}) = 0$ für $i \neq j$. Als einzig relevanter Fall ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{i,j}^{C,k} &= \mathbb{1}_{\{j=i\}} \text{Cov}(C_{i,k}, C_{i,k}) = \mathbb{1}_{\{j=i\}} \sigma^2 e^{-2\lambda_k i \Delta_n} \mathbb{E} \left[\left(\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{1}_{\{j=i\}} \sigma^2 e^{-2\lambda_k i \Delta_n} \frac{e^{2\lambda_k i \Delta_n} - e^{2\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{2\lambda_k} \\
 &= \mathbb{1}_{\{j=i\}} \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir die Kovarianz zwischen $B_{i,k}$ und $C_{j,k}$ und erhalten mit analoger Begründung wie bei C , dass die Kovarianz $\Sigma_{i,j}^{BC,k} := \text{Cov}(B_{i,k}, C_{i,k})$ gleich Null ist, wenn $i \leq j$. Daher betrachte als einzigen Fall

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{i,j}^{BC,k} &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \text{Cov}(B_{i,k}, C_{j,k}) \\
 &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \text{Cov} \left(\int_0^{(j-1)\Delta_n} H_{i,k}^B(s) dW_s^k + \int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} H_{i,k}^B(s) dW_s^k \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_{j\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} H_{i,k}^B(s) dW_s^k, \int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} H_{j,k}^C(s) dW_s^k \right),$$

wobei $H_{i,k}^B$ und $H_{j,k}^C$ die entsprechenden Integranden von $B_{i,k}$ beziehungsweise $C_{i,k}$ sind. Vergleiche hierfür (4) und (5). Wir verwenden weiter die Linearität der Kovarianz im ersten Argument sowie die Unabhängigkeit der Brownschen Inkremente, welche in B und C vorkommen, als auch die zentrierten Momente von B und C und erhalten mit analogen Schritten

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,j}^{BC,k} &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \text{Cov} \left(\int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} H_{i,k}^B(s) dW_s^k, \int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} H_{j,k}^C(s) dW_s^k \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k j\Delta_n} \text{Cov} \left(\int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k (i+j-1)\Delta_n} \int_{(j-1)\Delta_n}^{j\Delta_n} e^{2\lambda_k s} ds \\ &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k (i+j-1)\Delta_n} \frac{e^{2\lambda_k j\Delta_n} - e^{2\lambda_k (j-1)\Delta_n}}{2\lambda_k} \\ &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 \left(e^{-\lambda_k \Delta_n (i-j-1)} - e^{-\lambda_k \Delta_n (i-j+1)} \right) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k} \\ &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_k \Delta_n (i-j)} \left(e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n} \right) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Umgekehrt ist somit

$$\Sigma_{i,j}^{CB,k} := \text{Cov}(C_{i,k}, B_{j,k}) = \mathbb{1}_{\{i<j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} \left(e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n} \right) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k}.$$

Des Weiteren ist $A_{i,k}$ zu allen $B_{i,k}$ und $C_{i,k}$ unabhängig, da ξ unabhängig zur Brownschen Bewegung ist. Mit diesen Elementen ist es möglich die Kovarianz der Inkremente von X weiter umzuformen

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}, A_{j,k} + B_{j,k} + C_{j,k}) e_k^2(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Sigma_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{CB,k}) e_k^2(y) + r_{i,j}, \end{aligned}$$

wobei der Restterm $r_{i,j}$ aus der Kovarianz von A mit sich selbst zu unterschiedlichen Inkrementen besteht. Die verbleibenden Kovarianzen entfallen aufgrund der Unabhängigkeit der Startbedingung zu den Brownschen Bewegungen. Wie zuvor zeigen wir nun, dass die Summe der Kovarianzen von $A_{i,k}, A_{j,k}$ vernachlässigbar ist. Folglich ist

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(A_{i,k}, A_{j,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k i\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1)\Delta_n}) (e^{-\lambda_k j\Delta_n} - e^{-\lambda_k (j-1)\Delta_n}) \text{Var}(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}) e_k^2(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j)} - 2e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-1)} + e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)}) \text{Var}(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}) e_k^2(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} (e^{-2\lambda_k \Delta_n} - 2e^{-\lambda_k \Delta_n} + 1) \text{Var}(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}) e_k^2(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 \text{Var}(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}) e_k^2(y).
 \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.1.2 kann durch eine Einsergänzung mit λ_k die Eigenwertgleichung und Selbstdjungiertheit des Operators A_{ϑ} verwendet werden, sodass $-\lambda_k^{1/2} \langle \xi, e_k \rangle = \langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle$. Demnach und mit der Abschätzung $\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}[X^2]$ können wir den Restterm $r_{i,j}$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}
 r_{i,j} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2}{\lambda_k} \mathbb{E} \left[(\lambda_k^{1/2} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta})^2 \right] e_k^2(y) \\
 &\leq 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k}. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Für die Kovarianz ergibt sich im Weiteren für $i < j$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Sigma_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{CB,k}) e_k^2(y) + r_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left((e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} - e^{-\lambda_k (i+j-2) \Delta_n}) \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} \sigma^2 \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} (e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k} \sigma^2 \right) e_k^2(y) + r_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 + (e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n}) (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k (i+j-2) \Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} + r_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Definiere einen weiteren Restterm $s_{i,j}$ als

$$s_{i,j} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k (i+j-2) \Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k},$$

dann ist zur letzten Umformung äquivalent

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 + 1 - e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-2\lambda_k \Delta_n} + e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} + s_{i,j} + r_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i)} \frac{2 - e^{-\lambda_k \Delta_n} - e^{\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} + s_{i,j} + r_{i,j} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{2e^{-\lambda_k \Delta_n} - e^{-2\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k} + s_{i,j} + r_{i,j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{e^{-2\lambda_k \Delta_n} - 2e^{-\lambda_k \Delta_n} + 1}{2\lambda_k \Delta_n} + s_{i,j} + r_{i,j} \\
 &= -\Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k \Delta_n} + s_{i,j} + r_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Aufteilung dieses Terms mittels $\sin^2(x) = (1/2 - \cos(2x))$ wie bereits in Lemma 3.1.4 und erhalten

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= -\Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k \Delta_n} + s_{i,j} + r_{i,j} \\
 &= -\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] \Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k \Delta_n} \\
 &\quad + 2\sigma^2 \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] \Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k \Delta_n} \cos(2\pi k y) \\
 &\quad + s_{i,j} + r_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Wenden wir nun wiederum Lemma 3.1.3 (i) und (ii) auf die Funktion $f_\tau : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_\tau(z) = e^{-z\tau} \frac{(1 - e^{-z})^2}{2z}$$

an, mit der stetigen Ergänzung $f_\tau(0) = 0$, wobei die Voraussetzungen wie im Beweis von Lemma 3.1.4 zu prüfen sind. Wir können die Kovarianz mittels f_{j-i-1} weiter umformen durch

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= -\sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] \int_0^{\infty} e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2 (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2})^2}{2\pi^2 \vartheta_2 z^2} dz \\
 &\quad + \sqrt{\Delta_n} \mathcal{O}((\delta^{-2} \Delta_n) \wedge (\delta^{-1} \Delta_n^{1/2})) + s_{i,j} + r_{i,j} \\
 &= -\sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \frac{\exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{2\pi \sqrt{\vartheta_2}} \int_0^{\infty} e^{u^2 (j-i-1)} \frac{(1 - e^{-u^2})^2}{u^2} du + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) + s_{i,j} + r_{i,j},
 \end{aligned}$$

wobei analoge lineare Substitution wie im Beweis von Satz 3.1.1 verwendet wurde. Die Lösung dieses Integrals ist weiterhin aus (19) in Satz 3.1.1 bekannt und folglich ist

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\Delta_i X(y), \Delta_j X(y)) &= -\sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \frac{\exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{2\sqrt{\pi \vartheta_2}} (2\sqrt{j-i} - \sqrt{j-i-1} - \sqrt{j-i+1}) \\
 &\quad + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) + s_{i,j} + r_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Abschließend ist nur noch zu zeigen, dass die Restterme $s_{i,j} + r_{i,j}$ über alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ aufsummiert von der Ordnung Eins sind. Hierfür verwenden wir (25) und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^n (s_{i,j} + r_{i,j}) \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \\
 & = \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \Delta_n (i+j-2)} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \\
 & = \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \left(\sum_{i=1}^n e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Durch die Anwendung der Partialsumme der geometrischen Reihe (6) auf den letzten Term des obigen Ausdrucks erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n (s_{i,j} + r_{i,j}) & \leq \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda_k i \Delta_n} \right)^2 \\
 & = \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k n \Delta_n}}{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}} \right)^2 \\
 & \leq \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2} \\
 & = \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k},
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung durch die Teleskopsumme sowie die Positivität der Exponentialfunktion ihre Gültigkeit hat. Da weiter $\lambda_k \propto k^2$, existiert die Reihe und es folgt die Behauptung mit

$$\sum_{i,j=1}^n (s_{i,j} + r_{i,j}) \leq \left(\sigma^2 + 2C \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\langle A_{\vartheta}^{1/2} \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2 \right] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \mathcal{O}(1). \quad \square$$

Während der Martingalanteil eines Semimartingales unkorreliert ist, finden wir negativ korrelierende Inkremente in unserem Modell vor. Hierbei sei an die Zerlegung von Semimartingalen in ein lokales Martingal und einen stochastischen Prozess von endlicher Variation erinnert. Vergleiche hierfür [Protter \(2004, S. 127 ff.\)](#). Dies ist ein weiterer bedeutender Unterschied zwischen den beiden Modellen. Die Kovarianz der Inkremente hängt dabei nur in dem exponentiellen Term von der Raumkoordinate y ab. Betrachten wir die theoretische Autokorrelationsfunktion

$$\rho_X(h) := \frac{\gamma_X(h)}{\mathbb{E}[X_t^2]}$$

des Prozesses X mit Lag $h \in \mathbb{N}$, wobei $\gamma_X(h) := \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ die Autokovarianzfunktion darstellt, so ergibt sich in unserem SPDE-Modell, dass die Autokorrelationsfunktion nicht mehr von der Raum-

3.2 Kovarianzstruktur der Inkremente mit einheitlicher Ortskoordinate

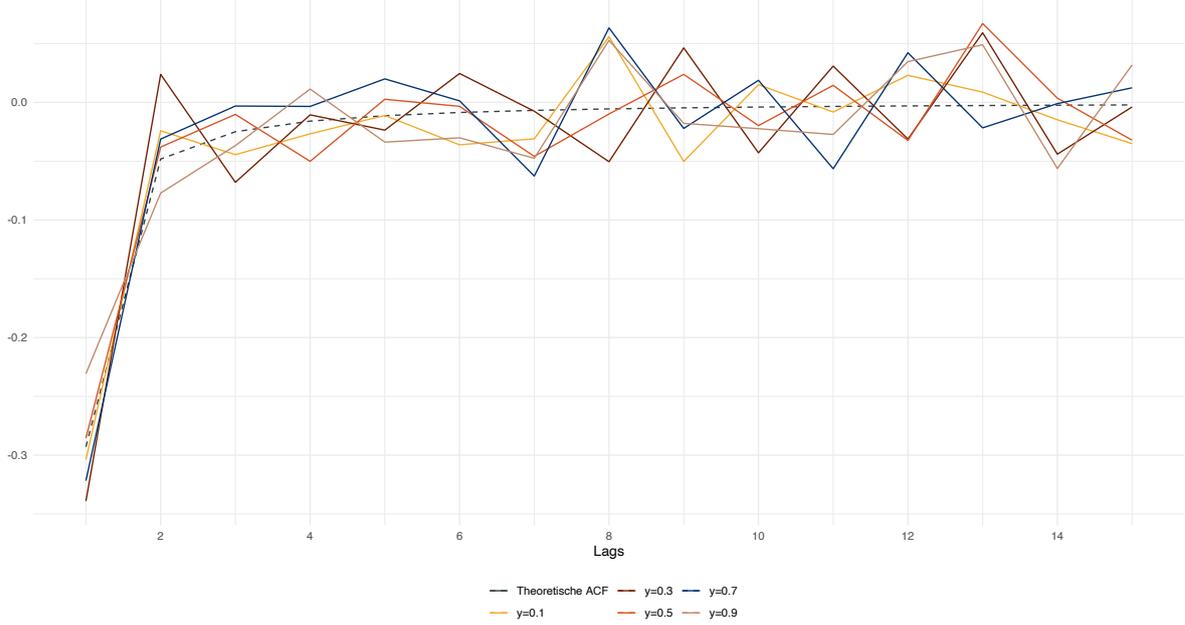


Abbildung 3.1: Autokorrelation des stochastischen Heat-Kernels von Abbildung 2.3 in den Ortskoordinaten $y_i = i/10$, für $i = 1, 3, 5, 7, 9$. Dargestellt sind die ersten 15 Lags der Daten im Vergleich zur theoretischen Autokorrelation.

koordinate abhängig ist. Genauer ist für eine hinreichend große Anzahl an Beobachtungen

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta_i X}(|j-i|) &= -\frac{\sqrt{\Delta_n} \sigma^2 \frac{\exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{2\sqrt{\vartheta_2 \pi}} \left(2\sqrt{|j-i|} - \sqrt{|j-i|-1} - \sqrt{|j-i|+1}\right)}{\sqrt{\Delta_n} e^{-y\vartheta_1/\vartheta_2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}} \\ &= -\sqrt{|j-i|} + \frac{1}{2}\sqrt{|j-i|-1} + \frac{1}{2}\sqrt{|j-i|+1}. \end{aligned}$$

Zusätzlich besteht eine Abhängigkeit des Lags $|j-i|$ der Ordnung $|j-i|^{-3/2}$. Hierfür sei auf (21) am Ende des Beweises von Satz 3.1.1 verwiesen. So beobachten wir eine starke negative Korrelation für den Lag $|j-i| = 1$ mit

$$\text{Cov}(\Delta_i X, \Delta_{i+1} X) = -\sqrt{\Delta_n} \sigma^2 \frac{(\sqrt{2}-1) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right]}{\sqrt{2\vartheta_2 \pi}} + r_{i,i+1} + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{3/2}\right)$$

und

$$\rho_{\Delta_i X}(1) = (\sqrt{2}-2)/2 \approx -0.2928932.$$

Für die Lags 2, 3 und 10 erhalten wir

$$\rho_{\Delta_i X}(2) = -0.04818816, \quad \rho_{\Delta_i X}(3) = -0.02494403, \quad \rho_{\Delta_i X}(10) = -0.003965265.$$

Wir betrachten somit einen raschen Abfall der Autokorrelation gegen Null. Grafik 3.1 zeigt dabei die empirische Autokorrelation der Inkremente des stochastischen Heat-Kernels gegen die theoretische Autokorrelation der Inkremente. In Kapitel 6.2 wird dabei nochmals die Autokorrelation der

Inkremente mittels 1000 Monte-Carlo-Simulationen außerhalb des Kontextes der Heat-Equation veranschaulicht. Wir stellen dabei eine starke Anpassung der empirischen gemittelten Autokorrelation an die Theoretische fest.

4 Asymptotik für die parametrische Schätzung der Volatilität

In diesem Kapitel möchten wir einen zentralen Grenzwertsatz für den Schätzer $\hat{\sigma}_y^2$ sowie zentralen Grenzwertsatz für einen noch vorzustellenden Schätzer in mehreren Ortskoordinaten herleiten. Grundlegend hierfür wird eine Version eines allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes für sogenannte ρ -mixing Dreiecksschemata von [Peligrad et al. \(1997, Theorem 4.1\)](#) sein. Genauer werden wir eine Abwandlung des Theorems verwenden, welches ebenso in [Peligrad et al. \(1997, Theorem B\)](#) behandelt wird. In dem ersten Teilkapitel [4.1](#) werden wir zunächst den allgemeinen zentralen Grenzwertsatz einführen und mithilfe dessen einen zentralen Grenzwertsatz für den Momentenschätzer in einer Raumkoordinate $\hat{\sigma}_y^2$ herleiten und beweisen. Kapitel [4.2](#) wird abschließend einen Schätzer in mehreren Raumkoordinaten vorstellen und ebenso einen zentralen Grenzwertsatz für diesen beweisen.

4.1 Zentraler Grenzwertsatz des Momentenschätzers in einer Raumkoordinate

Zu Beginn dieses Kapitels rekapitulieren wir den Begriff eines Dreiecksschemas. So verstehen wir unter einem Dreiecksschema zunächst eine Sammlung von Zufallsvariablen $(Z_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n}$ mit einer Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir werden jedoch aus Gründen der Übersicht ein solches Schema als ein vorläufiges Dreiecksschema bezeichnen. Eine Sammlung von Zufallsvariablen $(Z_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n}$ nennen wir demnach ein Dreiecksschema, falls die $Z_{n,i}$ zusätzlich zentriert sind und ein existierendes zweites Moment besitzen. Betrachten wir nun ein beliebiges Dreiecksschema von Zufallsvariablen $(Z_{n,k})_{n \geq 1, 1 \leq k \leq r_n}$ mit einer Folge r_n . Wir beginnen mit der Definition der ρ -mixing Bedingung.

Definition 4.1.1

Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} zwei σ -Algebren. Dann definieren wir

$$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \sup_{X \in L_2(\mathcal{F}), Y \in L_2(\mathcal{G})} \{ |\text{Corr}(X, Y)| \},$$

wobei aus Gründen der Übersicht der Korrelationskoeffizient durch Corr dargestellt wird. Die ρ -mixing Bedingung ist dann gegeben, falls

$$\rho(k) := \sup_{s \geq 1, n \geq 1} \left\{ \rho(\sigma(Z_{n,i}, i \leq s), \sigma(Z_{n,i}, i \geq s + k)) \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Die Interpretation der vorigen Definition lässt sich vereinfacht wie folgt beschreiben. Erfüllt ein Dreiecksschema die ρ -mixing Bedingung, so ist die Korrelation aller Zufallsvariablen, welche auf sämtlichen zeilenweisen Partitionierungen definiert sind beliebig klein, sofern die Partitionen genügend weit voneinander entfernt sind. Die Idee der Partitionierung bezieht sich hierbei auf die Beschränkung der korrelierenden Restterme. Diese sollen nach Anforderung der ρ -mixing Bedingung asymptotisch verschwinden. Wir formulieren anhand dieses Konzepts den folgenden allgemeinen zentralen Grenzwertsatz.

Satz 4.1.2

Sei $\{Z_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n\}$ ein Dreiecksschema, so folgt

$$\sum_{i=1}^n Z_{n,i} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v^2),$$

mit asymptotischer Varianz $v^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i}\right) < \infty$, falls folgende Bedingungen gelten:

- (I) $\text{Var}\left(\sum_{i=a}^b Z_{n,i}\right) \leq C \sum_{i=a}^b \text{Var}(Z_{n,i})$, für alle $1 \leq a \leq b \leq n$,
- (II) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,i}^2] < \infty$,
- (III) $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[Z_{n,i}^2 \mathbb{1}_{|Z_{n,i}| > \varepsilon}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, für alle $\varepsilon > 0$,
- (IV) $\text{Cov}\left(e^{it \sum_{i=a}^b Z_{n,i}}, e^{it \sum_{i=b+u}^c Z_{n,i}}\right) \leq \rho_t(u) \sum_{i=a}^c \text{Var}(Z_{n,i})$, für alle $1 \leq a \leq b \leq b+u \leq c \leq n$ und $t \in \mathbb{R}$,

wobei $C > 0$ eine universelle Konstante und $\rho_t(u) \geq 0$ eine Funktion mit $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_t(2^j) < \infty$ ist.

Die ersten beiden Bedingungen des allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes sind hierbei selbsterklärend, wohingegen die dritte Bedingung der Lindeberg-Bedingung für Dreiecksschemata und die vierte Bedingung einer Beschränkung der Kovarianz zwischen den empirischen charakteristischen Funktionen des Dreiecksschematas entspricht. Ein bedeutender Unterschied zwischen der Abwandlung des allgemeinen Grenzwertsatzes nach [Peligrad et al. \(1997, Theorem B\)](#), welche wir verwenden werden und der Originalfassung nach [Peligrad et al. \(1997, Theorem 4.1\)](#) ist die Bedeutung der Funktion ρ . Während in der ursprünglichen Version die Funktion ρ für das ρ -mixing steht, lassen wir in dem genannten Satz 4.1.2 jede beliebige Funktion ρ zu, welche positiv ist und deren aufsummierte Funktionswerte an den Stellen 2^j eine konvergente Reihe ergibt. Eine Analyse des zentralen Grenzwertsatzes nach [Peligrad et al. \(1997, Theorem 4.1\)](#) lässt erkennen, dass die Bedingung der Kovarianzabschätzung der empirischen charakteristischen Funktionen, welche schwächer als ρ -mixing ist, hinreichend zum Nachweis des Grenzwertsatzes ist. Da die Eigenschaft von ρ -mixing in dem vorliegenden Modell zunächst unklar ist, werden wird den oben vorgestellten Grenzwertsatz verwenden. Daraus resultiert, dass wir uns im

Verlauf dieses Kapitels unter anderem mit der ρ -mixing ersetzenden Bedingung (IV) befassen werden. Wir beginnen somit mit der Formulierung des ersten Grenzwertsatzes.

Satz 4.1.3

Es gelten die Annahmen 2.3.4 und 2.3.3. Sei $\sigma_t = \sigma$ konstant in der Zeit, dann gilt für jedes $y \in [\delta, 1 - \delta]$, wobei $\delta > 0$

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_y^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \pi\Gamma\sigma^4),$$

für $n \rightarrow \infty$ und einer Konstanten $\Gamma \approx 0.75$ aus (35).

Hinter der einfachen Form des vorigen Satzes, verbergen sich dennoch einige nicht-triviale Berechnungen. Aus diesem Grund werden dem Beweis dieses Satzes zunächst ein Lemma und zwei weitere Sätze vorausgehen. Das erste Lemma wird dabei eine vereinfachte Form des zu betrachtenden vorläufigen Dreiecksschemas aufweisen, wohingegen die beiden Folgesätze sich mit den Bedingungen aus dem allgemeinen zentralen Grenzwertsatz 4.1.2 beschäftigen werden. Ebenso wird in dieser Vorarbeit die genaue Berechnung der Konstanten Γ offengelegt. Wir beginnen mit der Definition des in unserem Modell vorliegenden vorläufigen Dreiecksschemas. Sei

$$\zeta_{n,i} := \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i X)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right], \quad (26)$$

wobei $m = 1$, oder $m = m_n$ mit $m_n = \mathcal{O}(n^\rho)$ und $\rho \in (0, 1/2)$ nach Annahme 2.3.3 ist. Die Abhängigkeit von n in $\zeta_{n,i}$ ist hierbei ebenso durch $\Delta_i X(y) = X_{i\Delta_n}(y) - X_{(i-1)\Delta_n}(y)$ gegeben. Falls weiter die unabhängigen Koeffizienten der Anfangsbedingung gemäß $\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/(2\lambda_k))$ verteilt sind, so erhalten wir für die Inkremente die Darstellung $\Delta_i \tilde{X}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k e_k(y)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta_i \tilde{x}_k &= \left(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle + \sigma \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \\ &\quad + \sigma \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k (i\Delta_n - s)} dW_s^k \\ &= \left(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle + B_{i,k} + C_{i,k} \\ &= \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k + B_{i,k} + C_{i,k}, \end{aligned}$$

wobei \tilde{x}_k für die Koordinatenprozesse mit der betrachteten Anfangsbedingung stehen und

$$B_{i,k} = \sigma \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k,$$

$$C_{i,k} = \sigma \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n-s)} dW_s^k,$$

analog zu (4) und (5) sind. Für die Integration des stochastischen Integrals über die komplette reelle Zeitachse werden die Brownschen Bewegungen $(W_t^k)_{k \geq 1}$ auf einem passenden Wahrscheinlichkeitsraum erweitert. Betrachten wir die Umwandlung der Anfangsbedingung mit der angenommenen Verteilungsannahme zu dem Itô-Integral etwas genauer, so entspricht das Itô-Integral aufgrund des deterministischen Integranden zu einem festem Zeitpunkt einer zentrierten Normalverteilung, welche wiederum über Erwartungswert und Kovarianzfunktion charakterisiert wird. Untersuchen wir beide Größen, so folgt aufgrund der Linearität des Erwartungswertes erneut Zentriertheit. Weiter ist für Zeitpunkte t, u mithilfe der Itô-Isometrie 1.3.1

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left(\sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k(t-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k, \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k(u-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \right) \\ &= \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(t+u)} \mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^0 e^{\lambda_k s} dW_s^k \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(t+u)} \int_{-\infty}^0 e^{2\lambda_k s} ds \\ &= \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(t+u)} \left[\frac{1}{2\lambda_k} e^{2\lambda_k s} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{2\lambda_k} \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(t+u)}. \end{aligned}$$

Als Varianz ergibt sich somit mit $t = s = (i-1)\Delta_n$

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \right) &= \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \left(e^{-\lambda_k \Delta_n - \lambda_k(i-1)\Delta_n} - e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \left(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right)^2 \end{aligned}$$

und dadurch

$$\sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \sim \left(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \right) \langle \xi, e_k \rangle.$$

Folglich können die Inkremente des Koordinatenprozesses geschrieben werden durch

$$\begin{aligned} \Delta_i \tilde{x}_k &= \tilde{A}_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k} \\ &= \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k + \sigma \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k + C_{i,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma \int_{-\infty}^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k + C_{i,k} \\
 &= \tilde{B}_{i,k} + C_{i,k},
 \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{A}_{i,k} := \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k, \quad (27)$$

$$\tilde{B}_{i,k} := \sigma \int_{-\infty}^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k. \quad (28)$$

Infolgedessen sind die Inkremente von $\Delta_i \tilde{X}(y)$ zentriert normalverteilt und stationär. Definieren wir nun das zugehörige vorläufige Dreiecksschema

$$\tilde{\zeta}_{n,i} := \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j\vartheta_1}{\vartheta_2}\right], \quad (29)$$

so wird das nachfolgende Lemma zeigen, dass es ausreichend ist, einen zentralen Grenzwertsatz für die stationäre Folge zu beweisen. Erinnern wir uns an die Aufteilung der Inkremente des Koordinatenprozesses $\Delta x_k = A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}$, so beinhaltet der Term $A_{i,k}$ den Einfluss der Startbedingung und somit auch die gewählte Verteilungsannahme $\langle \xi, e_k \rangle$ in der Startbedingung. Der nachfolgende Beweis wird zeigen, dass der Einfluss der Startbedingung in Form von $A_{i,k}$ für eine wachsende Anzahl an Beobachtungen sinkt und dabei asymptotisch vernachlässigbar ist. Dies ermöglicht uns die Wahl einer spezifischen Verteilung für $\langle \xi, e_k \rangle$, wie es in $\tilde{\zeta}_{n,i}$ geschehen ist.

Lemma 4.1.4

Unter den Annahmen 2.3.3 und 2.3.4 gilt

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{\zeta}_{n,i} - \zeta_{n,i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Betrachten wir das zu Zeigende, so ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (\tilde{\zeta}_{n,i} - \zeta_{n,i}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \left(\sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] - \sum_{j=1}^m (\Delta_i X)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \left(\sum_{j=1}^m \left((\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) - (\Delta_i X)^2(y_j) \right) \exp\left[\frac{y_j\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \right)
 \end{aligned}$$

und demzufolge ausreichend, die gleichmäßige Konvergenz

$$\frac{m}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^n \left((\Delta_i \tilde{X})^2(y) - (\Delta_i X)^2(y) \right) = \sqrt{m} \sum_{i=1}^n \left((\Delta_i \tilde{X})^2(y) - (\Delta_i X)^2(y) \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

in $y \in [0, 1]$ zu zeigen. Mithilfe der Zerlegung von $\tilde{B}_{i,k} = \tilde{A}_{i,k} + B_{i,k}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i,k} &= \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k, \\ B_{i,k} &= \sigma \int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \end{aligned}$$

können wir folgende Aufteilung betrachten

$$\begin{aligned} (\Delta_i \tilde{X})^2(y) - (\Delta_i X)^2(y) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l e_k(y) e_l(y) - \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_i x_k \Delta_i x_l e_k(y) e_l(y) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l - \Delta_i x_k \Delta_i x_l \right) e_k(y) e_l(y) \\ &= \tilde{T}_i - T_i, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i &:= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_{i,k} \tilde{A}_{i,l} + \tilde{A}_{i,k} (B_{i,l} + C_{i,l}) + \tilde{A}_{i,l} (B_{i,k} + C_{i,k}) \right) e_k(y) e_l(y), \\ T_i &:= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(A_{i,k} A_{i,l} + A_{i,k} (B_{i,l} + C_{i,l}) + A_{i,l} (B_{i,k} + C_{i,k}) \right) e_k(y) e_l(y) \end{aligned}$$

und $A_{i,k}$ nach (3), $C_{i,k}$ nach (5). Wir werden nun zeigen, dass unter der Annahme 2.3.4 $\sqrt{m} \sum_{i=1}^n T_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ gilt und somit insbesondere auch $\sqrt{m} \sum_{i=1}^n \tilde{T}_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ gilt, da in \tilde{X} lediglich eine spezielle Verteilungsannahme getroffen wird. Für den Fall T_i separieren wir weiter diesen Term durch

$$\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right).$$

Für den ersten Term ergibt sich mithilfe der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k}^2 e_k^2(y) \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} A_{i,k} A_{i,l} e_k(y) e_l(y) \right] \\ &\leq 2C \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} A_{i,k} A_{i,l} e_k(y) e_l(y) \right| \right] \end{aligned}$$

$$\leq 2C \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} A_{i,k} A_{i,l} e_k(y) e_l(y) \right|^2 \right]^{1/2},$$

wobei $C < \infty$ eine geeignete Konstante ist, sodass $e_k^2(y) \leq 2C$. Sei $C_\xi := \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2]$, so folgt mit analogen Schritten wie in (10), (11) am Ende des Beweises von Lemma 3.1.2 und der elementaren Ungleichung $(1-p)(1-q)/(1-pq) \leq 1-p$, für $p, q \in [0, 1)$ aus (8)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[A_{i,k}^2 e_k(y) \right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n})^2 \mathbb{E} \left[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-2\lambda_k (i-1) \Delta_n} \mathbb{E} \left[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2 \right] \\ &\leq C_\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \sum_{i=1}^n e^{-2\lambda_k (i-1) \Delta_n} \\ &\leq C_\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})} \\ &\leq C_\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}). \end{aligned}$$

Zudem ist C_ξ nach Annahme 2.3.4 beschränkt. Für den nächsten Term untersuchen wir zunächst die Umformung

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} A_{i,k} A_{i,l} e_k(y) e_l(y) \right|^2 \right] = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \sum_{\substack{k',l'=1 \\ k' \neq l'}}^{\infty} e_k(y) e_l(y) e_{k'}(y) e_{l'}(y) \mathbb{E} \left[A_{i,k} A_{i,l} A_{j,k'} A_{j,l'} \right].$$

Wir werden weiterhin zwischen den beiden Alternativen in Annahme 2.3.4 (1) unterscheiden. Im ersten Fall genügt es, durch $\mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta] = 0$ nur den Fall $k = k', l = l'$ zu betrachten. Der Fall $k = l', l = k'$ folgt analog. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \mathbb{E} \left[A_{i,k} A_{i,l} A_{j,k} A_{j,l} \right] &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2 e^{-\lambda_k (i+j-2) \Delta_n - \lambda_l (i+j-2) \Delta_n} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\langle \xi, e_k \rangle_\vartheta^2 \right] \mathbb{E} \left[\langle \xi, e_l \rangle_\vartheta^2 \right] \\ &\leq C_\xi^2 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{\lambda_k \lambda_l} \sum_{i,j=1}^n e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2) \Delta_n}, \end{aligned}$$

wobei die paarweise Unabhängigkeit aus Annahme 2.3.4 verwendet wurde. Des Weiteren können wir mithilfe der Partialsumme der geometrischen Reihe aus (6) die Summe über i, j wie folgt vereinfachen

$$\sum_{i,j=1}^n e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2) \Delta_n} = \sum_{i=1}^n e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i-1) \Delta_n} \sum_{j=1}^n e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(j-1) \Delta_n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)n\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)n\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \\
 &\leq \frac{1}{(1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n})^2}.
 \end{aligned}$$

Es folgt mithilfe der Reihenapproximation für Integrale

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,j=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}A_{j,k}A_{j,l}] &\leq C_{\xi}^2 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{\lambda_k\lambda_l(1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n})^2} \\
 &\leq C_{\xi}^2 \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})}{\lambda_k\lambda_l} \\
 &= C_{\xi}^2 \Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{\lambda_k\Delta_n} \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_l\Delta_n}}{\lambda_l\Delta_n} \sqrt{\Delta_n} \\
 &= C_{\xi}^2 \Delta_n \left(\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} dz \right)^2 = \mathcal{O}(\Delta_n),
 \end{aligned}$$

wobei wiederum die elementare Ungleichung (8) verwendet wurde. Schließlich gilt für letztere Option aus Annahme 2.3.4 (1), wie schon im Beweis des Lemmas 3.1.2, dass $C'_{\xi} := \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}] < \infty$ mithilfe der Parsevalschen Identität aus 1.1.2 und somit

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,j=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \sum_{\substack{k',l'=1 \\ k' \neq l'}}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}A_{j,k'}A_{j,l'}] &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k}] \right)^2 \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}|] \right)^2 \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\lambda_k} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2]^{1/2} \right)^2 \right)^2,
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt erneut die Markov-Ungleichung verwendet wurde. Aufgrund der Identität von Lagrange gilt des Weiteren

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Wir erhalten hierdurch und mittels der Partialsumme der geometrischen Reihe (6)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,j=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \sum_{\substack{k',l'=1 \\ k' \neq l'}}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k}A_{i,l}A_{j,k'}A_{j,l'}] &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n}}{\lambda_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^2] \right) \right)^2 \\
 &\leq C_{\xi}^{\prime 2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{\lambda_k (1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n})} \right)^2 = \mathcal{O}(\Delta_n),
 \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt analog zu (10) und (11) aus dem Beweis von Lemma 3.1.2 durchgeführt wurde. Somit können wir mithilfe der Markov-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right)^2 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\sqrt{\Delta_n})$$

folgern. Es verbleibt nur noch eine stochastische Beschränkung für den Term

$$2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right)$$

zu zeigen. Wir betrachten daher

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right) \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{j,k} + C_{j,k}) e_k(y) \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir benutzen weiter, dass $A_{i,k}(B_{j,k} + C_{j,k})$ unabhängig sind und mit der jeweiligen paarweisen Unabhängigkeit der Mischterme folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right) \right|^2 \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{i,k} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{j,k} e_k(y) \right) \right] \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (B_{j,k} + C_{j,k}) e_k(y) \right) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k} A_{j,l}] e_k(y) e_l(y) \right) \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[(B_{i,k} + C_{i,k})(B_{j,l} + C_{j,l})] e_k(y) e_l(y) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k} A_{j,l}] e_k(y) e_l(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(B_{i,k} + C_{i,k})(B_{j,k} + C_{j,k})] e_k^2(y) \right) =: \sum_{i,j=1}^n R_{i,j} S_{i,j}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R_{i,j} &:= \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k} A_{j,l}] e_k(y) e_l(y), \\ S_{i,j} &:= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(B_{i,k} + C_{i,k})(B_{j,k} + C_{j,k})] e_k^2(y), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Unabhängigkeit der Inkremente aus den Termen $B_{i,k}, C_{i,k}, B_{j,k}, C_{j,k}$ für $k \neq l$ ausgenutzt wurde. Wir beginnen mit dem ersten Term. Für den ersten Fall der Annahme 2.3.4 mit $\mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle] = 0$ ergibt sich mithilfe der paarweisen Unabhängigkeit

$$R_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k} A_{j,l}] e_k(y) e_l(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_{i,k} A_{j,k}] e_k^2(y) \\
 &\leq 2CC_{\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \\
 &= 2CC_{\xi} \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k \Delta_n} e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \sqrt{\Delta_n} \\
 &= 2CC_{\xi} \sqrt{\Delta_n} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-z^2})^2}{z^2} e^{-z^2(i+j-2)} dz \\
 &\leq 2CC_{\xi} \sqrt{\Delta_n} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-z^2})^2}{z^2} dz = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}).
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt wie zuvor $\sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n |R_{i,j}| = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})$. Für den zweiten Fall ergibt sich wiederum analog

$$\begin{aligned}
 R_{i,j} &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{\sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_l}} e^{-(\lambda_k(i-1) + \lambda_l(j-1))\Delta_n} \sqrt{\lambda_k} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}|] \sqrt{\lambda_l} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}|] \\
 &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{\sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_l}} e^{-(\lambda_k(i-1) + \lambda_l(j-1))\Delta_n} \sqrt{\lambda_k} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}|^2]^{1/2} \sqrt{\lambda_l} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}|^2]^{1/2} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})}{\sqrt{\lambda_k}} e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \sqrt{\lambda_k} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}|^2]^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{\sqrt{\lambda_l}} \\
 &\quad \times e^{-\lambda_l(j-1)\Delta_n} \sqrt{\lambda_l} \mathbb{E}[|\langle \xi, e_l \rangle_{\vartheta}|^2]^{1/2} \\
 &\leq C_{\xi}^{\prime 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-2\lambda_k(i-1)\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{\lambda_l} e^{-2\lambda_l(j-1)\Delta_n} = \mathcal{O}(\Delta_n).
 \end{aligned}$$

Somit ist auch hier $\sup_j \sum_{i=1}^n |R_{i,j}| = \mathcal{O}(\Delta_n)$. Der Term $S_{i,j}$ lässt sich umschreiben durch

$$\begin{aligned}
 S_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(B_{i,k} + C_{i,k})(B_{j,k} + C_{j,k})] e_k^2(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[B_{i,k} B_{j,k} + B_{i,k} C_{j,k} + C_{i,k} B_{j,k} + C_{i,k} C_{j,k}] e_k^2(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\Sigma_{ij}^{B,k} + \Sigma_{ij}^{BC,k} + \Sigma_{ji}^{BC,k} + \Sigma_{ij}^{C,k}] e_k^2(y),
 \end{aligned}$$

wobei $\Sigma_{ij}^{B,k}$, $\Sigma_{ij}^{BC,k}$, $\Sigma_{ij}^{C,k}$ wie im Beweis von Satz 3.2.1 definiert sind durch

$$\Sigma_{ij}^{B,k} := \text{Cov}(B_{i,k}, B_{j,k}), \quad \Sigma_{ij}^{BC,k} := \text{Cov}(B_{i,k}, C_{j,k}), \quad \Sigma_{ij}^{C,k} := \text{Cov}(C_{i,k}, C_{j,k}).$$

Durch Einsetzen der Berechnungen aus Satz 3.2.1 erhalten wir für $i < j$

$$\begin{aligned}
 S_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\Sigma_{ij}^{B,k} + \Sigma_{ij}^{BC,k} \right] e_k^2(y) \\
 &\leq -\sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \frac{\exp \left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right]}{2\sqrt{\pi\vartheta_2}} \left(2\sqrt{j-i} - \sqrt{j-i-1} - \sqrt{j-i+1} \right) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e_k^2(y) e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \frac{(e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1)^2}{2\lambda_k} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \\
 &\leq -\sigma^2 \sqrt{\Delta_n} \frac{\exp \left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right]}{2\sqrt{\pi\vartheta_2}} \left(2\sqrt{j-i} - \sqrt{j-i-1} - \sqrt{j-i+1} \right) \\
 &\quad + C \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \frac{(e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1)^2}{\lambda_k} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}).
 \end{aligned}$$

Für den Fall $i = j$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 S_{i,i} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\Sigma_{ii}^{B,k} + \Sigma_{ii}^{C,k} \right] e_k^2(y) \\
 &\leq 2C\sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} + \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} \right).
 \end{aligned}$$

Abschließend können wir mit Konstanten C_1, C_2, C_3 sowie der ermittelten Ordnung $\mathcal{O}(|i-j|^{3/2})$ des Wurzelterms in $S_{i,j}$ für $i < j$ aus Beweis von Satz 3.2.1 folgern, dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n R_{i,j} S_{i,j} &= \sum_{i,j=1}^n \left(C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{\lambda_k} e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \right) \left(\mathbb{1}_{\{i \neq j\}} \sqrt{\Delta_n} C_2 |i-j|^{-3/2} \right. \\
 &\quad \left. + C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} + \mathbb{1}_{\{i=j\}} \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} \right) \right) \\
 &= \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}) \mathcal{O} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2} + \sqrt{\Delta_n} \right) = \mathcal{O}(\Delta_n).
 \end{aligned}$$

Der zweite Term in der Zerlegung von T_i ist somit von der Ordnung $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\Delta_n)$. Wir setzen ebenso bei der Berechnung des letzten Terms den ersten Teil der Annahme 2.3.4 aufgrund der langsameren Rate ein. Analoges gilt natürlich auch mithilfe des zweiten Teils der Annahme. Es resultieren daraufhin

$$\sum_{i=1}^n T_i = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\sqrt{\Delta_n}) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\Delta_n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\sqrt{\Delta_n})$$

und somit $\sqrt{m} \sum_{i=1}^n T_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ unter Annahme 2.3.3. Es folgt die Behauptung. \square

Dank dem zuvor bewiesenen Lemma, können wir nun für die Anfangsbedingung eine stationäre Verteilung für den zentralen Grenzwertsatz annehmen. Im nächsten Schritt werden wir einen Satz herleiten,

mithilfe dessen wir die asymptotische Varianz bestimmen können. Sei hierfür

$$V_{p,\Delta_n}(y) := \frac{1}{p\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^p (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \exp\left[\frac{y\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \quad (30)$$

die reskalierte realisierte Volatilität in $y \in (0, 1)$, basierend auf den ersten $p \leq n$ Inkrementen.

Satz 4.1.5

Unter den Annahmen 2.3.3 und 2.3.4 gilt für die Kovarianz der reskalierten realisierten Volatilität in zwei Raumpunkten $y_1, y_2 \in [\delta, 1 - \delta]$ und für jedes $\eta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) &= \mathbb{1}_{\{y_1=y_2\}} \frac{\Gamma\sigma^4}{\vartheta_2 p} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p}\right)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{p} \left(\mathbb{1}_{\{y_1 \neq y_2\}} \frac{1}{|y_1 - y_2|} + \frac{1}{\delta}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei $\Gamma \approx 0.75$ eine numerische Konstante ist. Die exakte Berechnung von Γ ist hierbei durch (35) gegeben. Insbesondere gilt

$$\text{Var}(V_{p,\Delta_n}(y)) = \frac{\Gamma\sigma^4}{\vartheta_2 n} \left(1 + \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n})\right).$$

Beweis. Aufgrund von Lemma 4.1.4 genügt es die Inkremente des Prozesses

$$(\Delta_i \tilde{X})^2(y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k e_k(y)\right)^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l e_k(y) e_l(y),$$

wobei $\Delta_i \tilde{x}_k = \tilde{B}_{i,k} + C_{i,k}$, zu betrachten. Die Terme $\tilde{B}_{i,k}, C_{i,k}$ sind dabei in (28) und (5) definiert. Dadurch erhalten wir für die Varianz-Kovarianz Struktur der reskalierten realisierten Volatilität in den Punkten $y_1, y_2 \in [\delta, 1 - \delta]$ und einem $p \in \mathbb{N}$ mit $p \leq n$

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) \\ &= \frac{1}{p^2 \Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^p (\Delta_i \tilde{X})^2(y_1), \sum_{j=1}^p (\Delta_j \tilde{X})^2(y_2)\right) \\ &= \frac{1}{p^2 \Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \sum_{i,j=1}^p \text{Cov}\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l e_k(y_1) e_l(y_1), \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_j \tilde{x}_k \Delta_j \tilde{x}_l e_k(y_2) e_l(y_2)\right) \\ &= \frac{1}{p^2 \Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \sum_{i,j=1}^p \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{k',l'=1}^{\infty} e_k(y_1) e_{k'}(y_2) e_l(y_1) e_{l'}(y_2) \text{Cov}\left(\Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l, \Delta_j \tilde{x}_{k'} \Delta_j \tilde{x}_{l'}\right)\right) \\ &= \frac{2}{p^2 \Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \sum_{i,j=1}^p \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) \text{Cov}\left(\Delta_i \tilde{x}_k \Delta_i \tilde{x}_l, \Delta_j \tilde{x}_k \Delta_j \tilde{x}_l\right)\right) \\ &= \frac{2}{p^2 \Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \sum_{i,j=1}^p \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \text{Cov} \left((\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l}), (\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right) \\ & = \frac{2}{p\Delta_n} \exp \left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_l(y_2) e_l(y_1) e_k(y_2) D_{k,l}, \end{aligned}$$

wobei

$$D_{k,l} := \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \text{Cov} \left((\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l}), (\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right).$$

In der obigen Umformung wurde des Weiteren die Orthogonalität für $k \neq k'$ beziehungsweise $l \neq l'$ ausgenutzt. Da $k = l'$ und $l = k'$ den selben Term ergeben, entsteht der zusätzliche Faktor Zwei. Wir benötigen für die weitere Berechnung die Kovarianzstrukturen zwischen den Termen $\tilde{B}_{i,k}$ und $C_{i,k}$. Wir können $\tilde{B}_{i,k}$ schreiben durch

$$\tilde{B}_{i,k} = B_{i,k} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda_k}} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} Z_k,$$

wobei $(Z_k)_{k \geq 1}$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind, welche zusätzlich zu B unabhängig sind. Folglich ist aufgrund der Unabhängigkeit zwischen Z_k und $B_{i,k}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{B}_{i,k}, C_{j,k}) &= \text{Cov}(B_{i,k}, C_{j,k}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda_k}} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) e^{-\lambda_k(i-1)\Delta_n} \text{Cov}(Z_k, C_{j,k}) \\ &= \text{Cov}(B_{i,k}, C_{j,k}) = \Sigma_{i,j}^{BC,k}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{B}_{i,k}, \tilde{B}_{j,k}) &= \text{Cov}(B_{i,k}, B_{j,k}) + \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \text{Var}(Z_k) \\ &= \sigma^2 \left(e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} - e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \right) \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2}{2\lambda_k} + \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} =: \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k}. \end{aligned} \quad (32)$$

Für die weitere Umformung des Terms $D_{k,l}$ verwenden wir Isserlis-Theorem für zentrierte Normalverteilungen. Sei hierfür (X_1, \dots, X_4) ein zentriert normalverteilter Zufallsvektor, so ist

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3], \quad (33)$$

siehe hierfür auch [Isserlis \(1918\)](#). Da $\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k}$ einer zentrierten Gaußschen Zufallsvariable entspricht, folgt hierbei

$$\begin{aligned} D_{k,l} &= \frac{1}{p} \left(\sum_{i,j=1}^p \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right] \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right] \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right] \right) \end{aligned}$$

$$+ \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right].$$

Wie schon zuvor gilt hier für $k \neq l$ die Orthogonalitätseigenschaft und somit

$$\begin{aligned} D_{k,l} &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,l} + C_{i,l})(\tilde{B}_{j,l} + C_{j,l}) \right] \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{BC,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \right) \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} + \Sigma_{i,j}^{BC,l} + \Sigma_{j,i}^{BC,l} + \Sigma_{i,j}^{C,l} \right). \end{aligned}$$

Sei des Weiteren $k < l$. Wir berechnen nun die Summanden von $D_{k,l}$ einzeln nacheinander und verwenden hierfür die Resultate für die Kovarianzstrukturen aus dem Beweis von Satz 3.2.1 sowie die oben hergeleiteten Kovarianzstrukturen in Verbindung mit $\tilde{B}_{i,k}$. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} \frac{\sigma^2}{2\lambda_l} (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_l \Delta_n |i-j|} \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4p\lambda_k \lambda_l} \sum_{i,j=1}^p e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n |i-j|}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die obige Summe. Wir können diese vorerst mithilfe von (6) wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^p q^{|i-j|} &= 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{i-1} q^{i-j} + pq^0 \\ &= p + 2 \sum_{i=1}^p \frac{q^i}{q} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{1}{q} \right)^j \\ &= p + 2 \sum_{i=1}^p q^{i-1} \frac{1 - q^{-(i-1)}}{1 - q^{-1}} \\ &= p + \frac{2q}{q-1} \sum_{i=1}^p (q^{i-1} - 1) \\ &= p + \frac{2q}{q-1} \left(\frac{1 - q^p}{1 - q} - p \right) \\ &= 2 \frac{q^{p+1} - q}{(q-1)^2} + p \left(\frac{q-1}{q-1} - \frac{2q}{q-1} \right) \\ &= 2 \frac{q^{p+1} - q}{(q-1)^2} + p \frac{1+q}{1-q}, \end{aligned}$$

wobei $q > 0$ und $q \neq 1$. Sei $q = e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4p\lambda_k \lambda_l} \sum_{i,j=1}^p e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n |i-j|} \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \frac{1 + e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O} \left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right) \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir den Restterm aus dem letzten Umformungsschritt noch einmal genauer, so erhalten wir für den Restterm der Partialsumme

$$2 \frac{q^{p+1} - q}{p(1-q)(1+q)} = \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{1}{p(1-q)}\right).$$

Die hier betrachtete Asymptotik impliziert die Konvergenz von $q = e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n} \rightarrow 1$, sofern $n \rightarrow \infty$. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird $p = n \rightarrow \infty$ sein, sodass wir für eine geeignete Rate diese beiden Elemente betrachten. Konvergiert p schneller gegen unendlich als q von unten gegen Eins, so erhalten wir eine Rate von

$$2 \frac{q^{p+1} - q}{p(1-q)(1+q)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p(1-q)}\right).$$

Vertauschen wir die Rollen von p, q so konvergiert der obige Ausdruck gegen eine Konstante, sodass obige Rate folgt. Verwenden wir des Weiteren die bereits berechnete Kovarianz des Terms C aus (23), so erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{C,k} \Sigma_{i,j}^{C,l} &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{j=i\}} \sigma^4 \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\ &= \sigma^4 \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l}. \end{aligned}$$

Ebenso für die Kovarianz aus (24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{i,j}^{BC,l} &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \\ &\quad \times e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n(i-j)} (e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n}) (e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n}), \end{aligned}$$

wobei hier wiederum mithilfe der Partialsumme der geometrischen Reihe gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{i>j\}} q^{i-j} &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=j+1}^p q^{i-j} \\ &= \sum_{j=1}^p q^{-j} \sum_{i=0}^{p-(j+1)} q^{i+(j+1)} \\ &= \sum_{j=1}^p q \left(\frac{1 - q^{p-j}}{1 - q} \right) \\ &= \frac{1}{1 - q} \left(pq - \sum_{j=0}^{p-1} q^{p-j} \right) \\ &= \frac{pq}{1 - q} - \frac{q^p}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{-p}}{1 - q^{-1}} \\ &= \frac{pq}{1 - q} + \frac{q - q^{p+1}}{(1 - q)^2}. \end{aligned}$$

Mit $q = e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}$ ergibt sich wie zuvor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{i>j\}} e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n(i-j)} \left(e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n} \right) \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \\ &= \left(e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n} \right) \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\ &= \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{i,j}^{BC,l} &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \\ &\quad \times \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right). \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Berechnung von $\Sigma_{j,i}^{BC,k} \Sigma_{j,i}^{BC,l}$. Für die Mischterme erhalten wir des Weiteren

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} (\Sigma_{i,j}^{BC,l} + \Sigma_{j,i}^{BC,l}) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} \left(\mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_l \Delta_n(i-j)} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1}{2\lambda_l} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{j>i\}} \sigma^2 e^{-\lambda_l \Delta_n(j-i)} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1}{2\lambda_l} \right) \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{i>j\}} e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n(i-j)} \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{1}_{\{j>i\}} e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n(j-i)} \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} \left(e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n} \right) \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-\lambda_k \Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \Sigma_{i,j}^{C,l} = \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} \mathbb{1}_{\{i=j\}} \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n}}{2\lambda_l}$$

$$= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l}$$

und

$$\frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{C,k} \Sigma_{i,j}^{BC,l} = \mathbb{1}_{\{i=j\}} \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_l \Delta_n (i-j)} (e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1}{2\lambda_l} = 0.$$

Zudem verschwinden die folgenden Mischterme

$$\frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{i,j}^{C,l} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{j,i}^{BC,l} &= \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_k \Delta_n (i-j)} (e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k} \\ &\quad \times \mathbb{1}_{\{j>i\}} \sigma^2 e^{-\lambda_l \Delta_n (j-i)} (e^{\lambda_l \Delta_n} - e^{-\lambda_l \Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1}{2\lambda_l} = 0. \end{aligned}$$

Schließlich folgt für die Berechnung von $D_{k,l}$ mit $k < l$ durch Zusammensetzen der bereits berechneten Terme

$$\begin{aligned} D_{k,l} &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{BC,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \right) \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} + \Sigma_{i,j}^{BC,l} + \Sigma_{j,i}^{BC,l} + \Sigma_{i,j}^{C,l} \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} + \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} (\Sigma_{i,j}^{BC,l} + \Sigma_{j,i}^{BC,l}) + \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \Sigma_{i,j}^{C,l} + (\Sigma_{i,j}^{BC,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k}) \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} + \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{i,j}^{BC,l} \right. \\ &\quad \left. + \Sigma_{j,i}^{BC,k} \Sigma_{j,i}^{BC,l} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,l} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \Sigma_{i,j}^{C,l} \right) \\ &= \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \frac{1 + e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-\lambda_k \Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-\lambda_l \Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\ &\quad + 2\sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}) (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\ &\quad + \sigma^4 \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}) (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\ &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \frac{1 + e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-\lambda_k \Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-\lambda_l \Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)}{2\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\
 & + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\
 = & \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \left(\frac{1 + e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right. \right. \\
 & + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \frac{2}{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)} \\
 & + \left. \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \cdot \frac{2}{e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1} + \frac{e^{-\lambda_l \Delta_n} (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \cdot \frac{2}{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1} \right) \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} + \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\
 & \left. + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Wir verwenden an dieser Stelle die Umformung $(e^{2x} - 1)/(e^x - 1) = (e^x - 1)(e^x + 1)/(e^x - 1) = e^x + 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 D_{k,l} = & \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \left(\frac{1 + e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n} + 2(e^{-\lambda_k \Delta_n} + 1)(e^{-\lambda_l \Delta_n} + 1)}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right. \right. \\
 & + \left. \frac{-2e^{-\lambda_k \Delta_n} (e^{-\lambda_l \Delta_n} + 1) - 2e^{-\lambda_l \Delta_n} (e^{-\lambda_k \Delta_n} + 1)}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right) \\
 & + \frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} + \frac{(e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2 (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\
 & + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right) \\
 = & \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{3 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right. \\
 & + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} + \frac{(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2 (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \\
 & \left. + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{3 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \right. \\
 &\quad + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \left((1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}) \frac{1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n}}{1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}} + (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}) \frac{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l \Delta_n})}{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})} \right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\
 &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{3 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \right. \\
 &\quad + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \left((1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_l \Delta_n}) + (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_k \Delta_n}) \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 + e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_l \Delta_n}) \right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\
 &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{4 - 2e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} \right. \\
 &\quad + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \left((1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_l \Delta_n}) + (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_k \Delta_n}) \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 + e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 + e^{-\lambda_l \Delta_n}) - (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}) \right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\
 &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{4\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{4 - 2e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{4\lambda_k \lambda_l} \right. \\
 &\quad \left. \times 2\left(2 + (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})\right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\
 &= \sigma^4 \left(\frac{(e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 (e^{-\lambda_l \Delta_n} - 1)^2}{2\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{2 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} + \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(2 - (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})\right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right) \\
 &= \sigma^4 \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l} \right) \\
 &\quad \times \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Definiere zudem

$$\bar{D}_{k,l} := \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l}.$$

Da nun der Hauptterm $D_{k,l}$ berechnet wurde rekapitulieren wir die Ausgangssituation:

$$\text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) = \frac{2}{p\Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) D_{k,l}.$$

Wir unterteilen die weitere Berechnung der Varianz-Kovarianz Struktur in den Hauptterm und den Restterm von $D_{k,l}$ und beginnen mit der Berechnung des Restterms. Da der Exponentialterm und die Basisvektoren beschränkt sind, können wir diese im Sinne der O-Notation für die weitere Berechnung vernachlässigen. Betrachten wir nun den Restterm und $\bar{D}_{k,l}$ genauer, so erhalten wir bezüglich dem Exponentialterm folgende Abschätzung

$$(1 - e^{-(x+y)})^2 \geq (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}),$$

da trivialerweise

$$\frac{(1 - e^{-(x+y)})}{1 - e^{-x}} \geq 1 \quad \text{und} \quad \frac{(1 - e^{-(x+y)})}{1 - e^{-y}} \geq 1,$$

für $x, y \geq 0$. Daher folgt auch

$$(1 - e^{-(x+y)})^{-1} \leq (1 - e^{-x})^{-1/2} (1 - e^{-y})^{-1/2}.$$

Für genügend großes p im Restterm $1 \wedge (p(1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}))^{-1}$ erhalten wir den zweiten Ausdruck im Minimumoperator, sodass mithilfe von $\lambda_k \Delta_n \geq 0$ die folgende Abschätzung resultiert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 \Delta_n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \frac{\bar{D}_{k,l}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n}} &= \frac{1}{p^2 \Delta_n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l (1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n})^2} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l (1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n})} \\ &\leq \frac{1}{p^2 \Delta_n} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^{1/2} (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^{1/2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{p^2 \Delta_n} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^{1/2} (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^{1/2}}{2\lambda_k \lambda_l} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^{1/2} (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^{1/2}}{2\lambda_k \lambda_l} \right) \\ &\leq \frac{3}{2p^2 \Delta_n^2} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^{1/2}}{\lambda_k} \right)^2 \\ &\leq \frac{3}{2p^2 \Delta_n^2} \left(\sqrt{\Delta_n} \Delta_n^{\frac{\eta+1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^{1/2}}{\lambda_k \Delta_n^{\frac{\eta+1}{2}}} \right)^2, \end{aligned}$$

mit $\eta \in (0, 1)$ beliebig. Die Variable η wurde hierbei aufgrund der Existenz des uneigentlichen Integrals, welches im folgenden Schritt über die Riemann-Summenapproximation gebildet wird, eingeführt.

Lediglich für $\eta \in (0, 1)$ erhalten wir eine zulässige Konstante, sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 \Delta_n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \frac{\bar{D}_{k,l}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} &\leq \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n^{\eta+1}}{p^2 \Delta_n^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz \right)^2 \right) \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Untersuchen wir das uneigentliche Integral, so teilen wir dieses zunächst in zwei Teile auf. Im ersten Term werden wir den Teil der Integration betrachten, welcher gegen Null läuft. Analog betrachten wir im zweiten Teil die Integration gegen unendlich, sodass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz.$$

Wie aus der Analysis bekannt, konvergiert das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\eta} dx$ genau dann, wenn $\eta < 1$. Ebenso konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\eta} dx$ genau dann, wenn $\eta > 1$. Wir erhalten daher folgende Abschätzung

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{z^{\eta+1}} dz < \infty,$$

womit das obere Integral für $\eta > 0$ existiert. Im Bereich von $z \approx 0$ erhalten wir über die Taylorentwicklung $1 - e^{-z^2} \approx 1 - (1 - z^2)$ und da

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{z^2}}{z^{\eta+1}} dz = \int_0^1 \frac{1}{z^\eta} dz < \infty,$$

für $\eta < 1$, ist auch $\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - e^{-z^2}}}{z^{\eta+1}} dz$ konvergent und somit das angegebene Integral. Für den Fall, dass p klein ist, können wir eine Rate von $\mathcal{O}(p^{-1})$ beobachten, sodass insgesamt eine Rate folgt von

$$\mathcal{O} \left(\frac{1}{p \Delta_n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} \bar{D}_{k,l} \left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} \right) \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{p} \left(1 \wedge \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \right) \right).$$

Für die Varianz-Kovarianz Struktur erhalten wir somit die Darstellung

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) &= \frac{2}{p \Delta_n} \exp \left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) D_{k,l} \\ &= \frac{4\sigma^4}{p \Delta_n} \exp \left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) \bar{D}_{k,l} \\ &\quad + \frac{2}{p \Delta_n} \exp \left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{k=1}^{\infty} e_k^2(y_1) e_k^2(y_2) D_{k,k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{p} \left(1 \wedge \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \right) \right). \end{aligned}$$

Auf die Symmetrie in $D_{k,l}$ und den daraus resultierenden Faktor Vier werden wir im weiteren Verlauf noch einmal eingehen. Betrachten wir nun den Fall $k = l$, so folgt wie zuvor in (33) mithilfe des Satzes von Isserlis

$$\begin{aligned}
 D_{k,k} &= \frac{1}{p} \left(\sum_{i,j=1}^p \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \right) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right] \right) \\
 &= \frac{2}{p} \sum_{i,j=1}^p \mathbb{E} \left[(\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k})(\tilde{B}_{j,k} + C_{j,k}) \right]^2 \\
 &= \frac{2}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{BC,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \right)^2 \\
 &= \frac{2}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{i,j}^{BC,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{j,i}^{BC,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{i,j}^{C,k} \right)^2 + 2\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \left(\Sigma_{i,j}^{BC,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k} \right) + 2\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \Sigma_{i,j}^{C,k}.
 \end{aligned}$$

Die elementare Ungleichung

$$(a - b - c - d)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2ab + 2ac + 2ad - 2bc - bd - 2cd$$

liefert wiederum

$$D_{k,k} \leq \frac{4}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{i,j}^{BC,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{j,i}^{BC,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{i,j}^{C,k} \right)^2 = \frac{4}{p} \sum_{i,j=1}^p \left(\tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \right)^2 + 2 \left(\Sigma_{i,j}^{BC,k} \right)^2 + \left(\Sigma_{i,j}^{C,k} \right)^2.$$

Wir berechnen daher die Terme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} &= \sigma^4 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4}{4\lambda_k^2} \frac{1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O} \left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} \right) \right), \\
 \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{BC,k} \Sigma_{i,j}^{BC,k} &= \sigma^4 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{4\lambda_k^2} \cdot \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} \left(1 + \mathcal{O} \left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} \right) \right), \\
 \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p \Sigma_{i,j}^{C,k} \Sigma_{i,j}^{C,k} &= \sigma^4 \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{4\lambda_k^2},
 \end{aligned}$$

wobei analoge Schritte wie bei den Termen mit $k \neq l$ benutzt wurden. Es ergibt sich im Fall $k = l$

$$D_{k,k} \leq \sigma^4 \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4}{\lambda_k^2} \frac{1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} \right)$$

$$+ 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2} (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}) + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{p^{-1}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}}\right) \right),$$

mit

$$\bar{D}_{k,k} = \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4}{\lambda_k^2} \frac{1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2} (1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n}) + \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2}.$$

Wir zeigen nun, dass $D_{k,k}$ vernachlässigbar ist, dafür betrachte zunächst

$$\frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{D}_{k,k} = \frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4 (1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^3} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2} + 1 \right).$$

Wie zuvor wurden der Exponentialterm sowie die Basisvektoren vernachlässigt, da diese beschränkt sind und folglich den Restterm im Sinne der O-Notation nicht beeinflussen. Weiter ist

$$\frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4 (1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^3} = \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^4 (1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^3 (1 + e^{-\lambda_k \Delta_n})^3} \leq (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}) \frac{(1 + e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{(1 + e^{-\lambda_k \Delta_n})^3} \leq 1$$

sowie

$$2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2} = 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 + e^{-\lambda_k \Delta_n})^2} \leq 2$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{D}_{k,k} &\leq \frac{4}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k^2} \\ &= \frac{4\Delta_n^2}{\Delta_n \sqrt{\Delta_n p}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-2\lambda_k \Delta_n})}{\lambda_k \Delta_n} \right)^2 \sqrt{\Delta_n} \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{p} \left(\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-2z^2})^2}{z^4} \right) \right) = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{p} \right). \end{aligned}$$

Somit folgt insgesamt

$$\frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} D_{k,k} = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{p} \right),$$

wodurch der Term vernachlässigbar ist. Mithilfe der Symmetrie von $D_{k,l} = D_{l,k}$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) &= \frac{2}{p\Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{k,l=1}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) D_{k,l} \\ &= \frac{4\sigma^4}{p\Delta_n} \exp\left[(y_1 + y_2) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right] \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^{\infty} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) \bar{D}_{k,l} \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\left(\sqrt{\Delta_n} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1\right)\right).$$

Wir benutzen des Weiteren die geometrische Reihe aus (7), wobei $\lambda_k \Delta_n \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n} \leq 1$ und erhalten für den Term $\bar{D}_{k,l}$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{k,l} &= \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l} \\ &= \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-r(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n} + 2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{2\lambda_k \lambda_l}. \end{aligned}$$

Wir zeigen abschließend, dass die Kovarianz im Falle von $y_1 \neq y_2$ verschwindet. Hierfür unterteilen wir $\bar{D}_{k,l}$ in

$$\begin{aligned} \bar{D}_{k,l}^1 &:= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-r(\lambda_k + \lambda_l) \Delta_n}, \\ \bar{D}_{k,l}^2 &:= \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{\lambda_k \lambda_l}. \end{aligned}$$

Anhand des trigonometrischen Zusammenhangs zwischen einem Produkt aus Sinusfunktionen und Kosinus erhalten wir für $y_1 \neq y_2$

$$\begin{aligned} e_k(y_1) e_k(y_2) &= 2 \sin(\pi k y_1) \sin(\pi k y_2) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right] \\ &= \left(\cos(\pi k(y_1 - y_2)) - \cos(\pi k(y_1 + y_2))\right) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Betrachten wir nun das Produkt der Basisvektoren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} e_k(y_1) e_k(y_2) e_l(y_1) e_l(y_2) &= \left(\cos(\pi k(y_1 - y_2)) - \cos(\pi k(y_1 + y_2))\right) \left(\cos(\pi l(y_1 - y_2)) - \cos(\pi l(y_1 + y_2))\right) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right] \\ &= \cos(\pi k(y_1 - y_2)) \cos(\pi l(y_1 - y_2)) - \cos(\pi k(y_1 - y_2)) \cos(\pi l(y_1 + y_2)) \\ &\quad - \cos(\pi k(y_1 + y_2)) \cos(\pi l(y_1 - y_2)) + \cos(\pi k(y_1 + y_2)) \cos(\pi l(y_1 + y_2)) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right]. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun Lemma 3.1.3 Teil (ii) für den Term $\bar{D}_{k,l}^2$ mit der Funktion

$$f_r(x) := \begin{cases} \frac{(1 - e^{-x})^2}{x} e^{-rx}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

für $r \in \mathbb{N}$. Wie schon zuvor wurde $f_r(x)$ in Null stetig ergänzt. Wie bereits in Lemma 3.1.4 gezeigt,

erfüllt f_r die gewünschten Eigenschaften, sodass für $z, z' \in \left\{ \frac{y_1 - y_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\}$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{\exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right]}{\Delta_n p} \sum_{k,l=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \cos(2\pi l z') \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right] \overline{D}_{k,l}^{-1} \\
 &= \frac{1}{\Delta_n p} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \cos(2\pi l z') \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{2\lambda_k \lambda_l} e^{-r(\lambda_k + \lambda_l)\Delta_n} \\
 &= \frac{\Delta^2}{2\Delta_n p} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \cos(2\pi l z') f_r(\lambda_k \Delta_n) f_r(\lambda_l \Delta_n) \\
 &= \frac{1}{2p} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) f_r(\lambda_k \Delta_n) \right) \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l z') f_r(\lambda_l \Delta_n) \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} |\cos(2\pi l z') f_r(\lambda_l \Delta_n)| \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p} \right) \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} |f_r(\lambda_l \Delta_n)| \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p} \right) \sum_{r=1}^{\infty} (e^{-\lambda_l \Delta_n})^r \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{\lambda_l \Delta_n} \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p} \right) \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}}{\lambda_l \Delta_n} \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p} \right) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} dz \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p} \right).
 \end{aligned}$$

Die zusätzliche Beschränkung von $\Delta_n / (|y_1 - y_2| p)$ betrachten wir, da durch die Subtraktion von y_1, y_2 die Schranke von Δ_n unterschritten werden kann. Für eine genauere Betrachtung der Auswirkung auf die Rate fügen wir daher den Abstand der y -Terme hinzu. Für den zweiten Term ergibt sich des Weiteren

$$\begin{aligned}
 & \frac{\exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right]}{\Delta_n p} \sum_{k,l=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \cos(2\pi l z') \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}(y_1 + y_2)\right] \overline{D}_{k,l}^{-2} \\
 &= \frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k,l=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \cos(2\pi l z') \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})}{\lambda_k \lambda_l} \\
 &= \frac{1}{\Delta_n p} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l z') \frac{1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}}{\lambda_l} \\
 &= \frac{1}{p} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k z) \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} \right) \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2\pi l z') \frac{1 - e^{-\lambda_l \Delta_n}}{\lambda_l \Delta_n} \right) \\
 &= \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n}{\delta^2 p} \right).
 \end{aligned}$$

Da wir dies für $z, z' \in \left\{ \frac{y_1 - y_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\}$ gezeigt haben, folgt insgesamt für $y_1 \neq y_2$

$$\text{Cov}(V_{p, \Delta_n}(y_1), V_{p, \Delta_n}(y_2)) = \mathcal{O}\left(C\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta p} + \frac{\sqrt{\Delta_n}}{|y_1 - y_2| p}\right).$$

Es verbleibt nur noch die Varianz, also der Spezialfall $y_1 = y_2 = y \in [\delta, 1 - \delta]$ zu zeigen. Wir benutzen zunächst wieder Lemma 3.1.3 Teil (ii), um aufzuweisen, dass $2 \sin^2(\pi k y) e^{-y \vartheta_1 / \vartheta_2} \approx e^{-y \vartheta_1 / \vartheta_2}$ in der Varianz der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n} / (\delta p))$ entspricht. Dies geschieht analog zu den Umformungen im vorletzten Display. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_{p, \Delta_n}(y)) &= \exp\left[\frac{2y \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \frac{2\sigma^4}{\Delta_n p} \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} 4 \sin^2(\pi k y) \sin^2(\pi l y) \exp\left[\frac{-2y \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \bar{D}_{k, l} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\sqrt{\Delta_n} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1\right)\right) \\ &= \frac{2\sigma^4}{\Delta_n p} \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \bar{D}_{k, l} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1\right)\right). \end{aligned}$$

Verwenden wir nun, dass die Terme $\bar{D}_{k, l}$ für $k = l$ vernachlässigbar sind, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Var}(V_{p, \Delta_n}(y)) &= \frac{2\sigma^4}{\Delta_n p} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-r \lambda_k \Delta_n} \right)^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} \right)^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1\right)\right) \\ &= \frac{\sigma^4}{p} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k \Delta_n} e^{-r \lambda_k \Delta_n} \right)^2 + 2 \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} \right)^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1\right)\right). \end{aligned}$$

Wir berechnen nun beide Reihen über k einzeln und erhalten unterdessen zu den Rechnungen (19) aus Satz 3.1.1 und (16) aus Lemma 3.1.4

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k \Delta_n} e^{-r \lambda_k \Delta_n} &= \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-\pi^2 \vartheta_2 z^2})^2}{\pi^2 \vartheta_2 z^2} e^{-r \pi^2 \vartheta_2 z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_2} \pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-x^2})^2}{x^2} e^{-rx^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_2} \pi} (2\sqrt{r+1} - \sqrt{r+2} - \sqrt{r}) \end{aligned}$$

sowie

$$\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_2} \pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_2} \pi}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\text{Var}(V_{p,\Delta_n}(y)) &= \frac{\sigma^4}{p} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_2 \pi} (2\sqrt{r+1} - \sqrt{r+2} - \sqrt{r})^2 + 2\frac{1}{\vartheta_2 \pi} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1 \right)\right) \\ &= \frac{\sigma^4}{p\vartheta_2 \pi^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2\sqrt{r+1} - \sqrt{r+2} - \sqrt{r})^2 + 2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{\delta} + \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p} \wedge 1 \right)\right).\end{aligned}$$

Definiere nun

$$\Gamma := \frac{1}{\pi} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2\sqrt{r+1} - \sqrt{r+2} - \sqrt{r})^2 + 2 \right), \quad (35)$$

so erhalten wir unser gewünschtes Ergebnis durch

$$\begin{aligned}\text{Cov}(V_{p,\Delta_n}(y_1), V_{p,\Delta_n}(y_2)) &= \mathbb{1}_{\{y_1=y_2\}} \frac{\Gamma \sigma^4}{\vartheta_2 p} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{\delta^{\eta-1}}{p}\right) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{p} \left(\mathbb{1}_{\{y_1 \neq y_2\}} \frac{1}{|y_1 - y_2|} + \frac{1}{\delta} \right)\right).\end{aligned}$$

Eine numerische Berechnung von Γ liefert zudem einen Wert von $\Gamma \approx 0.7504116$, siehe hierfür den R-Code im Anhang 6.3. Es folgt die Behauptung. \square

Bevor wir letztlich mit dem Beweis des ersten zentralen Grenzwertsatzes beginnen, werden wir einen weiteren Satz betrachten, welcher bei dem Nachweis der Voraussetzung (IV) hilfreich sein wird.

Satz 4.1.6

Seien $y \in (0, 1)$ und $1 \leq r < r+u \leq v \leq n$ natürliche Zahlen und

$$Q_1^r = \sum_{i=1}^r (\Delta_i \tilde{X})^2(y), \quad Q_{r+u}^v = \sum_{i=r+u}^v (\Delta_i \tilde{X})^2(y),$$

dann existiert eine Konstante C , mit $0 < C < \infty$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\left| \text{Cov}\left(e^{it(Q_1^r - \mathbb{E}[Q_1^r])}, e^{it(Q_{r+u}^v - \mathbb{E}[Q_{r+u}^v])}\right) \right| \leq \frac{Ct^2}{u^{3/4}} \sqrt{\text{Var}(Q_1^r) \text{Var}(Q_{r+u}^v)}.$$

Beweis. Für den Beweis verwenden wir aus Gründen der Übersicht die Notation $\bar{Y} := Y - \mathbb{E}[Y]$ für die zentrierte Darstellung einer Zufallsvariable Y . Angenommen, es existiert eine Zerlegung von $Q_{r+u}^v = A_1 + A_2$, für welche A_2 unabhängig zu Q_1^r ist, so können wir für jede derartige Zerlegung die Kovarianz durch eine Nullergänzung wie folgt schreiben

$$\text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r}, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right) = \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right) - \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1, e^{it\bar{A}_2}\right),$$

da wegen der Unabhängigkeit von A_2 zu Q_1^r auch \bar{A}_2 zu \bar{Q}_1^r unabhängig ist und somit auch $e^{it\bar{Q}}$ zu $e^{it\bar{A}_2}$. Zusätzlich verschwinden additive deterministische Terme in der Kovarianz, sodass zwei weitere Nullergänzungen durchgeführt wurden. Es folgt somit

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r}, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right) &= \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1, e^{it(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)} - e^{it\bar{A}_2}\right) \\ &= \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1, e^{it\bar{A}_2}(e^{it\bar{A}_1} - 1)\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right)e^{it\bar{A}_2}\left(e^{it\bar{A}_1} - 1\right)\right] + \mathbb{E}\left[e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right]\mathbb{E}\left[e^{it\bar{A}_2}(1 - e^{it\bar{A}_1})\right]. \end{aligned}$$

Wir verwenden weiter die Dreieckungleichung sowie die elementare Ungleichung $|e^{ix} - 1| \leq x$ als auch $|e^{ix}| = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \left|\text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r}, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right)e^{it\bar{A}_2}\left(e^{it\bar{A}_1} - 1\right)\right] + \mathbb{E}\left[e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right]\mathbb{E}\left[e^{it\bar{A}_2}(1 - e^{it\bar{A}_1})\right]\right| \\ &\leq \left|\mathbb{E}\left[\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right)e^{it\bar{A}_2}\left(e^{it\bar{A}_1} - 1\right)\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right]\mathbb{E}\left[e^{it\bar{A}_2}(1 - e^{it\bar{A}_1})\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\left(e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right)e^{it\bar{A}_2}\left(e^{it\bar{A}_1} - 1\right)\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|e^{it\bar{Q}_1^r} - 1\right|\right]\mathbb{E}\left[\left|e^{it\bar{A}_2}(1 - e^{it\bar{A}_1})\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r| |t\bar{A}_1|\right] + \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r|\right]\mathbb{E}\left[|t\bar{A}_1|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r| |t\bar{A}_1|\right] + f\left(\mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r|\right]\right)^{1/2} f\left(\mathbb{E}\left[|t\bar{A}_1|\right]\right)^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r| |t\bar{A}_1|\right] + \mathbb{E}\left[f(|t\bar{Q}_1^r|)\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[f(|t\bar{A}_1|)\right]^{1/2} \\ &= \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r| |t\bar{A}_1|\right] + \mathbb{E}\left[(t\bar{Q}_1^r)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(t\bar{A}_1)^2\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei in den letzten Schritten die Jensen-Ungleichung mit der strikt konvexen Funktion $f(x) = x^2$ verwendet wurde. Wir benutzen weiterhin die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung mit $|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2}\mathbb{E}[Y^2]^{1/2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \left|\text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r}, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left[|t\bar{Q}_1^r| |t\bar{A}_1|\right] + \mathbb{E}\left[(t\bar{Q}_1^r)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(t\bar{A}_1)^2\right]^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\left[(t\bar{Q}_1^r)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(t\bar{A}_1)^2\right]^{1/2} + \mathbb{E}\left[(t\bar{Q}_1^r)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(t\bar{A}_1)^2\right]^{1/2} \\ &= 2t^2 \mathbb{E}\left[(\bar{Q}_1^r)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[(\bar{A}_1)^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}[(\bar{Q}_1^r)^2] = \text{Var}(Q_1^r)$, ist nur noch zu zeigen, dass eine solche Zerlegung existiert, und wir $\mathbb{E}[(\bar{A}_1)^2]$ entsprechend der Behauptung abschätzen können. Um zu zeigen, dass solch eine Zerlegung existiert, betrachten wir für $r < i - 1$

$$\Delta_i \tilde{X}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_i \tilde{x}_k e_k(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{B}_{i,k} + C_{i,k}) e_k(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{(i-1)\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n-s)} \sigma dW_s^k \right) e_k(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{r\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k + \int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k \right. \\
 &\quad \left. + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n-s)} \sigma dW_s^k \right) e_k(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{r\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k \right) e_k(y) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n-s)} \sigma dW_s^k \right) e_k(y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) + \sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y),
 \end{aligned}$$

mit

$$D_1^{k,i} := \int_{-\infty}^{r\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k, \quad (36)$$

$$D_2^{k,i} := \int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k + \int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n-s)} \sigma dW_s^k. \quad (37)$$

Insbesondere sind $D_1^{k,i}$ und $D_2^{k,i}$ unabhängig. Somit erhalten wir eine Zerlegung von Q_{r+u}^v durch

$$\begin{aligned}
 Q_{r+u}^v &= \sum_{i=r+u}^v (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \\
 &= \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) + D_2^{k,i} e_k(y) \right)^2 \\
 &= \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 + 2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) + \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right)^2,
 \end{aligned}$$

wobei

$$A_1 := \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 + 2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right),$$

$$A_2 := \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right)^2.$$

Insbesondere liegt nach der Definition von A_2 , beziehungsweise der Definition von $D_2^{k,i}$ eine Unabhängigkeit zu Q_1^r vor. Wir beschränken nun $\mathbb{E}[\bar{A}_1^2] = \mathbb{V}\text{ar}(A_1)$ über

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{A}_1^2] &\leq \mathbb{E}[A_1^2] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 + 2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right)^2 \right] \\ &\quad + 4 \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,j} e_k(y) \right) \right] \\ &\quad + 4 \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,j} e_k(y) \right) \right]. \end{aligned}$$

Der Mischterm verschwindet, da $D_1^{k,i}, D_2^{k,i}$ unabhängige zentrierte Normalverteilungen sind und jedes ungerade Moment einer zentrierten Normalverteilung gleich Null ist. Wir erhalten somit die Terme

$$T_1 := \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right)^2 \right], \quad (38)$$

$$T_2 := \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,j} e_k(y) \right) \right], \quad (39)$$

wobei nun $\mathbb{E}[\bar{A}_1^2] \leq T_1 + 4T_2$. Unser restliches Vorgehen wird sich nun auf eine geeignete Abschätzung der beiden Terme beschränken, sodass die Behauptung gefolgert werden kann. Diese Abschätzung sollte ebenfalls im Hinblick auf den allgemeinen Grenzwertsatz 4.1.2 passend sein. Beginnend bei T_1 verwenden wir, dass $D_1^{k,i} = e^{-\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,k}$ gilt, wobei

$$\tilde{B}_{i,k} = \sigma \int_{-\infty}^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1) dW_s^k,$$

wie zu Beginn dieses Kapitels in (28) definiert. Es folgt

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,k} e_k(y) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k(j-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,k} e_k(y) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{k,l,k',l'=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,k} e_k(y) e^{-\lambda_l(i-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,l} e_l(y) \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\lambda_{k'}(j-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,k'} e_{k'}(y) e^{-\lambda_{l'}(j-r-1)\Delta_n} \tilde{B}_{r+1,l'} e_{l'}(y) \right]. \end{aligned}$$

Betrachten wir die vier Indizes k, l, k', l' der zweiten Summe genauer. Es fällt auf, dass Kombinationen, für die nicht jeweils zwei Indizes gleich sind, verschwinden. Dies folgt direkt aus dem Verschwinden der ungeraden Momente einer zentrierten Normalverteilung. Ebenso bleiben die Terme bestehen, bei denen alle vier Indizes gleich sind, also $k = l = k' = l'$. In diesem Fall erhalten wir direkt

$$\sum_{i,j=r+u}^v \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^4 \right] e_k^4(y).$$

Für den Fall, dass jeweils zwei Indizes gleich sind, jedoch nicht alle vier, ergeben sich die Fälle $k = l, k' = l'$ sowie $k = k', l = l'$ und $k = l', l = k'$. Für $k = l, k' = l'$ erhalten wir mithilfe der Unabhängigkeit für $k \neq k'$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} e^{-2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y) \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n - 2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y). \end{aligned}$$

Für die verbleibenden Kombinationen der Indizes ergibt sich jeweils

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} e^{-\lambda_l(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y) \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit für T_1 die Umformung

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n - 2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y) \\ &+ 2 \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] e_k^2(y) e_l^2(y) \\ &+ \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^4 \right] e_k^4(y) \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \left(e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n - 2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} + 2e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2r-2)\Delta_n} \right) \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] \\ &\quad \times e_k^2(y) e_l^2(y) + \sum_{i,j=r+u}^v \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^4 \right] e_k^4(y) \\ &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \sum_{i,j=r+u}^v \left(e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n - 2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} + 2e^{-(\lambda_k + \lambda_l)(i+j-2r-2)\Delta_n} \right) \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,k}^2 \right] \mathbb{E} \left[\tilde{B}_{r+1,l}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\times e_k^2(y)e_l^2(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} \mathbb{E}\left[\tilde{B}_{r+1,k}^4\right] e_k^4(y).$$

Wie in (32) aus Satz 4.1.5 berechnet, ist

$$\text{Cov}\left(\tilde{B}_{i,k}, \tilde{B}_{j,k}\right) = \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k\Delta_n|i-j|}$$

und somit

$$\mathbb{E}\left[\tilde{B}_{r+1,k}^2\right] = \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2.$$

Weiter gilt für eine zentrierte Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, dass ihr viertes Moment $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4$ ist. Da $\tilde{B}_{r+1,k}$ zentriert normalverteilt mit obiger Varianz ist, können wir weiterhin folgern

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right) \left(\sum_{j=r+u}^v e^{-2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \right) e_k^2(y)e_l^2(y) \\ &\quad + \sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} 2 \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 e_k^2(y)e_l^2(y) \\ &\quad + 3\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^4}{4\lambda_k^2} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 e_k^4(y). \end{aligned}$$

Für die Terme der Orthonormalbasis e_k^2 verwenden wir, dass diese für alle $k \geq 1$ durch $e_k^2(y) \leq 2C$ beschränkt sind, wobei $C > 0$ ein geeignete Konstante ist. Des Weiteren nutzen wir für die Summen über i, j die Partialsumme der geometrischen Reihe (6). Hierbei ergibt sich mit $\bar{p} = v - r - u + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} &= \sum_{i=0}^{v-r-u} e^{-2\lambda_k(i-r-1+r+u)\Delta_n} \\ &= \sum_{i=0}^{v-r-u} e^{-2\lambda_k(i+u-1)\Delta_n} \\ &= e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \sum_{i=0}^{v-r-u} e^{-2\lambda_k i\Delta_n} \\ &= e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n(v-r-u+1)}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}} \\ &= e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}}, \\ \sum_{i=r+u}^v e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(i-r-1)\Delta_n} &= e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n}}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\bar{p} \geq 1$ für $u \geq 1$ nach Voraussetzung. Verwenden wir $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so

folgt für die einzelnen Terme aus T_1

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right) \left(\sum_{j=r+u}^v e^{-2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \right) &= e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n\bar{p}})(1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n\bar{p}})}{(1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n})} \\ &\leq e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n\bar{p}}}{(1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n})} \\ &\leq e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{\bar{p}}{(1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n})}. \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung soll

$$\frac{1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-2\lambda_l\Delta_n}} \leq \bar{p} \quad (40)$$

gelten. Betrachte dafür die Funktionenfolge

$$\tilde{f}_p(x) := \frac{1 - e^{-xp}}{1 - e^{-x}},$$

für $p \in \mathbb{N}$ und $x \in (0, \infty)$. Die Funktionenfolge ist monoton fallend auf dem Definitionsbereich, da

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_p(x) &= \frac{pe^{-xp}(1 - e^{-x}) - (1 - e^{-xp})e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \\ &= \frac{pe^{-xp} - pe^{-xp-x} - e^{-x} + e^{-xp-x}}{(1 - e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x(1+p)}(1 - p) + e^{-x}(e^{-x(p-1)} - 1)}{(1 - e^{-x})^2} \leq 0 \end{aligned}$$

und $p \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\tilde{f}'_1 = 0$ und $\tilde{f}'_p < 0$ für $p \geq 2$. Es folgt

$$\tilde{f}_p(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{pe^{-xp}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} pe^{x(1-p)} = p$$

mit der Regel von de l'Hospital. Der Fall $p = 1$ ergibt sich lediglich, falls $u = 1$. So können wir die Abschätzung analog durchführen und setzen dabei den Exponentialterm, in dem u enthalten ist, auf 1, sodass diese immer noch ihre Gültigkeit behält. Mit analogem Vorgehen ergeben sich folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 &= \left(e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n}} \right)^2 \\ &= e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n}} \right)^2 \\ &\leq e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n\bar{p}}}{(1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n})^2} \\ &\leq e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{\bar{p}}{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 &= \left(e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n\bar{p}}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}} \right)^2 \\
 &\leq e^{-4\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n\bar{p}}}{(1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n})^2} \\
 &\leq e^{-4\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{\bar{p}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}}.
 \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned}
 T_1 &\leq 4C\sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right) \left(\sum_{j=r+u}^v e^{-2\lambda_l(j-r-1)\Delta_n} \right) \\
 &\quad + 4C\sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} 2 \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-(\lambda_k+\lambda_l)(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 \\
 &\quad + 12C\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^4}{4\lambda_k^2} \left(\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \right)^2 \\
 &\leq 4C\sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{\bar{p}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}} \\
 &\quad + 4C\sigma^4 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2 (1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{4\lambda_k\lambda_l} e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \frac{2\bar{p}}{1 - e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\Delta_n}} \\
 &\quad + 12C\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^4}{4\lambda_k^2} e^{-4\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{\bar{p}}{1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n}}.
 \end{aligned}$$

Wir verwenden im Folgenden die elementare Ungleichung $(1-p)(1-q)/(1-pq) \leq 1-p$ aus (8) mit $p = q = e^{-\lambda_k\Delta_n}$ auf dem ersten und dritten Teil und $p = e^{-\lambda_k\Delta_n}, q = e^{-\lambda_l\Delta_n}$ auf dem zweiten Teil und erhalten weiter

$$\begin{aligned}
 T_1 &\leq \sigma^4 C\bar{p} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{\lambda_k\lambda_l} e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \\
 &\quad + 2C\sigma^4\bar{p} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{\lambda_k\lambda_l} e^{-2(\lambda_k+\lambda_l)(u-1)\Delta_n} \\
 &\quad + 3C\sigma^4\bar{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^3}{\lambda_k^2} e^{-4\lambda_k(u-1)\Delta_n} \\
 &= 3C\sigma^4\bar{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})}{\lambda_k} e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{\lambda_l} e^{-2\lambda_l(u-1)\Delta_n} \right) \\
 &= 3C\sigma^4\bar{p}\Delta_n \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})}{\lambda_k\Delta_n} e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \right) \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l\Delta_n})^2}{\lambda_l\Delta_n} e^{-2\lambda_l(u-1)\Delta_n} \right).
 \end{aligned}$$

Wie bereits in (19) von Satz 3.1.1 können wir die beiden Reihen über das korrespondierende Integral abschätzen, wobei wir eine Rate in Abhängigkeit von $\tau = u - 1$ erhalten, mit $u \geq 2$. Für den Fall $u = 1$ sind die Integrale, wie in (16) aus dem Beweis des Lemmas 3.1.4, beschränkt. Es ergibt sich für $u \geq 2$ und $\tau = u - 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})}{\lambda_k \Delta_n} e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} &= \mathcal{O}\left(\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} e^{-2z^2\tau} dz\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right), \\ \sqrt{\Delta_n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_l \Delta_n})^2}{\lambda_l \Delta_n} e^{-2\lambda_l(u-1)\Delta_n} &= \mathcal{O}\left(\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-z^2})^2}{z^2} e^{-2z^2\tau} dz\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Schließlich lässt sich T_1 beschränken durch

$$T_1 \leq C\sigma^4 \frac{\bar{p}\Delta_n}{(u-1)^2},$$

für eine hinreichend große Konstante C . Für den zweiten Term T_2 verwenden wir die Unabhängigkeit von $D_1^{k,i}$ und $D_2^{l,j}$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,j} e_k(y) \right) \right] \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,j} e_k(y) \right) \right] \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,j} e_k(y) \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir verwenden darüber hinaus, dass $D_1^{k,i}, D_1^{l,j}$ sowie $D_2^{k,i}, D_2^{l,j}$ für $k \neq l$ unabhängige zentrierte Normalverteilungen sind, und folgern

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{i,j=r+u}^v \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E} [D_1^{k,i} D_1^{l,j}] e_k(y) e_l(y) \right) \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E} [D_2^{k,i} D_2^{l,j}] e_k(y) e_l(y) \right) \\ &= \sum_{i,j=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} [D_1^{k,i} D_1^{k,j}] e_k^2(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} [D_2^{k,i} D_2^{k,j}] e_k^2(y) \right). \end{aligned}$$

Wir berechnen nachfolgend die beiden gemischten Momente. Für den ersten Erwartungswert erhalten wir analog zum Beweis von Satz 3.2.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [D_1^{k,i} D_1^{k,j}] &= \sigma^2 (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \text{Var} \left(\int_{-\infty}^{r\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\ &= \sigma^2 (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{r\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-\lambda_k(i+j-2)\Delta_n} \int_{-\infty}^{r\Delta_n} e^{2\lambda_k s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^2 (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n} \left(\frac{e^{2\lambda_k r \Delta_n}}{2\lambda_k} - \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{e^{2\lambda_k n}}{2\lambda_k} \right) \\
 &= \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k (i+j-2r-2)\Delta_n}.
 \end{aligned}$$

Den zweiten Erwartungswert erhalten wir ebenfalls analog zum Beweis von Satz 3.2.1. Für $i \leq j$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[D_2^{k,i} D_2^{k,j}] &= \mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k + C_{i,k} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sigma \int_{r\Delta_n}^{(j-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((j-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k + C_{j,k} \right) \right] \\
 &= \sigma^2 e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 \text{Cov} \left(\int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_{r\Delta_n}^{(j-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[C_{i,k} \int_{r\Delta_n}^{(j-1)\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((j-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \right] + \Sigma_{i,j}^{C,k} \\
 &= \sigma^2 e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 \text{Cov} \left(\int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k, \int_{r\Delta_n}^{(j-1)\Delta_n} e^{\lambda_k s} dW_s^k \right) \\
 &\quad + \Sigma_{i,j}^{C,k} + \Sigma_{j,i}^{BC,k} - \mathbb{E} \left[C_{i,k} \int_0^{r\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((j-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \right] \\
 &= \sigma^2 e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n} (1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2 \int_{r\Delta_n}^{(i-1)\Delta_n} e^{2\lambda_k s} ds + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \\
 &= \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n} (e^{2\lambda_k (i-1)\Delta_n} - e^{2\lambda_k r \Delta_n}) + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k} \\
 &= \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k (j-i)\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i+j-2r-2)\Delta_n}) + \Sigma_{j,i}^{BC,k} + \Sigma_{i,j}^{C,k},
 \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{E} \left[C_{i,k} \int_0^{r\Delta_n} \sigma e^{-\lambda_k((j-1)\Delta_n-s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \right] = 0,$$

da $r < i$. Zusätzlich ist der zweite Summand $\Sigma_{j,i}^{BC,k} = 0$ für $i = j$ und der dritte Summand $\Sigma_{i,j}^{C,k} = 0$ für $i < j$. Insbesondere ist für $i < j$

$$\mathbb{E}[D_2^{k,i} D_2^{k,j}] = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k (j-i)\Delta_n} - e^{-\lambda_k (i+j-2r-2)\Delta_n})$$

$$\begin{aligned}
 & + \sigma^2 e^{-\lambda_k(j-i)\Delta_n} (e^{\lambda_k\Delta_n} - e^{-\lambda_k\Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_k\Delta_n} - 1}{2\lambda_k} \\
 = & \sigma^2 e^{-\lambda_k(j-i)\Delta_n} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} \left((1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n + \lambda_k(j-i)\Delta_n}) \right. \\
 & \left. - (e^{\lambda_k\Delta_n} - e^{-\lambda_k\Delta_n}) \right) \\
 = & \sigma^2 e^{-\lambda_k(j-i)\Delta_n} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} \left((1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})(1 - e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n}) - (e^{\lambda_k\Delta_n} - e^{-\lambda_k\Delta_n}) \right) \\
 \leq & \sigma^2 e^{-\lambda_k(j-i)\Delta_n} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} \left((1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}) - (e^{\lambda_k\Delta_n} - e^{-\lambda_k\Delta_n}) \right) \\
 = & \sigma^2 e^{-\lambda_k(j-i)\Delta_n} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{2\lambda_k} (1 - e^{\lambda_k\Delta_n}) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Aufgrund des letzten Schritt können alle nicht-diagonal-Terme in der äußeren Summe von T_2 vernachlässigt werden und es ergibt sich für eine Trennung der äußeren Summe von T_2 die nachfolgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
 T_2 & = \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[D_1^{k,i} D_1^{k,i}] e_k^2(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[D_2^{k,i} D_2^{k,i}] e_k^2(y) \right) \\
 & + 2 \sum_{\substack{i,j=r+u \\ i < j}}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[D_1^{k,i} D_1^{k,j}] e_k^2(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[D_2^{k,i} D_2^{k,j}] e_k^2(y) \right) \\
 = & \sigma^4 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} e_k^2(y) \right) \\
 & \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} (1 - e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n}) + \sigma^{-2\Sigma_{i,i}^{C,k}} \right) e_k^2(y) \right) \\
 & + 2 \sum_{\substack{i,j=r+u \\ i < j}}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} e^{-\lambda_k(i+j-2r-2)\Delta_n} e_k^2(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[D_2^{k,i} D_2^{k,j}] e_k^2(y) \right) \\
 \leq & \sigma^4 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} e_k^2(y) \right) \\
 & \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} (1 - e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n}) + \sigma^{-2\Sigma_{i,i}^{C,k}} \right) e_k^2(y) \right) \\
 \leq & 4C\sigma^4 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} + \sigma^{-2\Sigma_{i,i}^{C,k}} \right),
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wiederum $e_k^2(y) \leq 2C$ verwendet wurde. Wie in (23) aus Satz 3.2.1 betrachtet, können wir $\Sigma_{i,i}^{C,k}$ einsetzen und erhalten des Weiteren

$$\begin{aligned}
 T_2 & \leq 4C\sigma^4 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} + 1 - e^{-2\lambda_k\Delta_n} \right) \\
 & = 4C\sigma^4 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k\Delta_n})^2}{2\lambda_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k\Delta_n}}{\lambda_k} \right).
 \end{aligned}$$

Ebenso ist, wie in (40) aus diesem Beweis hergeleitet,

$$\sum_{i=r+u}^v e^{-2\lambda_k(i-r-1)\Delta_n} \leq e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \bar{p}$$

und somit können wir T_2 fortan abschätzen durch

$$\begin{aligned} T_2 &\leq 2C\sigma^4 \bar{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k} \right) \\ &= \sigma^4 C \bar{p} \Delta_n \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k(u-1)\Delta_n} \frac{(1 - e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{\lambda_k \Delta_n} \right) \left(\sqrt{\Delta_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta_n}}{\lambda_k \Delta_n} \right). \end{aligned}$$

Auf den hinteren Faktor wenden wir Lemma 3.1.3 an, analog zur Behandlung des Terms I_1 in dem Beweis des Lemmas 3.1.4. Wie bereits in diesem Beweis behandelt, können wir den zweiten Term in gleicher Weise zu (41) abschätzen, sodass sich T_2 insgesamt durch

$$T_2 \leq C\sigma^4 \frac{\bar{p}\Delta_n}{(u-1)^{3/2}}$$

beschränken lässt, wobei C eine geeignete Konstante ist. Den Fall $u = 1$ handhaben wir analog. Durch Zusammensetzen von T_1, T_2 folgt eine Beschränkung von \bar{A}_1^2 für $u \geq 2$ durch

$$\mathbb{E}[\bar{A}_1^2] \leq C'\sigma^4 \frac{\bar{p}\Delta_n}{(u-1)^{3/2}},$$

wobei C' hier wiederum eine geeignete Konstante ist. Wir erhalten somit insgesamt

$$\begin{aligned} \left| \text{Cov}\left(e^{it\bar{Q}_1^r}, e^{it\bar{Q}_{r+u}^v}\right) \right| &\leq 2t^2 \text{Var}\left((Q_1^r)^2\right)^{1/2} \mathbb{E}\left[(\bar{A}_1)^2\right]^{1/2} \\ &\leq t^2 \text{Var}\left((Q_1^r)^2\right)^{1/2} (C'\sigma^4 \bar{p}\Delta_n)^{1/2} \frac{1}{(u-1)^{3/4}}. \end{aligned}$$

Mithilfe von Satz 3.1.1 schließen wir den Beweis durch

$$\text{Var}\left((Q_{r+u}^v)^2\right) \geq C\mathbb{E}\left[(Q_{r+u}^v)^2\right] = C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=r+u}^v (\Delta_i \tilde{X})^2(y)\right)^2\right] \geq C \sum_{i=r+u}^v \mathbb{E}\left[(\Delta_i \tilde{X})^4(y)\right] \geq C''\sigma^4 p\Delta_n,$$

mit einer geeigneten Konstanten $C'' > 0$ und $C > 0$. Da $(u-1)^{3/2} = \mathcal{O}(u^{3/2})$, folgt die Behauptung. \square

Dank den Sätzen 4.1.5 und 4.1.6 können wir nun den ersten zentralen Grenzwertsatz beweisen. Wir betrachten zuvor nochmals den Schätzer, für den wir einen zentralen Grenzwertsatz zeigen möchten

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) \exp\left[\frac{y\vartheta_1}{\vartheta_2}\right].$$

Wir rekapitulieren erneut das vorläufige Dreiecksschema aus (29)

$$\tilde{\zeta}_{n,i} = \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right],$$

und setzen $m = 1$ für eine Ortsbeobachtung, sodass

$$\tilde{\zeta}_{n,i} = \sqrt{\vartheta_2\pi} (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \exp\left[\frac{y \vartheta_1}{\vartheta_2}\right].$$

Daher ergibt sich mittels Lemma 4.1.4

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_{n,i}.$$

Den Fall $m \neq 1$ werden wir dabei im folgenden Teilkapitel betrachten. In diesem Zuge werden wir auch den zuletzt bewiesenen Satz 4.1.6 im entsprechend veränderten Kontext betrachten.

Beweis von Satz 4.1.3. Anhand des allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes 4.1.2 genügt es, die Bedingungen (I)-(IV) für ein Dreiecksschema nachzuweisen. Dafür ist zunächst nach Satz 3.1.1

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_{n,i}\right] = \sqrt{n}\mathbb{E}[\hat{\sigma}_y^2] = \sqrt{n}(\sigma^2 + \mathcal{O}(\Delta_n)) = \sqrt{n}(\sigma^2 + o(1)).$$

Daher betrachten wir das Dreiecksschema

$$Z_{n,i} = \tilde{\zeta}_{n,i} - \mathbb{E}[\tilde{\zeta}_{n,i}].$$

Es gilt nun

$$\sum_{i=1}^n Z_{n,i} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v^2),$$

mit $v^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i}\right)$, sofern wir die Bedingungen nachweisen können. Für die asymptotische Varianz ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_{n,i} = n\sqrt{\Delta_n} V_{n,\Delta_n}(y) \sqrt{\vartheta_2\pi},$$

wobei V_{p,Δ_n} wie in Satz 4.1.5 definiert ist durch

$$V_{p,\Delta_n}(y) = \frac{1}{p\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^p (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \exp\left[\frac{y \vartheta_1}{\vartheta_2}\right].$$

Somit folgt mithilfe von Satz 4.1.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_{n,i}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \Delta_n \vartheta_2 \pi \text{Var}(V_{n,\Delta_n}) = \Gamma \sigma^4 \pi = v^2,$$

wobei wir $n\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ nach Annahme 2.3.3 betrachten. Es verbleibt somit lediglich der Nachweis der vier Bedingungen.

- (I) Es ist $\text{Var}\left(\sum_{i=a}^b Z_{n,i}\right) \leq C \sum_{i=a}^b \text{Var}(Z_{n,i})$, für alle $1 \leq a \leq b \leq n$ und eine universelle Konstante $C > 0$ zu zeigen. Sei dafür $1 \leq a \leq b \leq n$ beliebig. Da $\Delta_i \tilde{X}(y)$ zentrierte normalverteilte Zufallsvariablen sind, ist $\text{Var}(\Delta_i \tilde{X}(y)) = \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X}(y))^2(y)]$. Nach Satz 3.1.1 gilt

$$\text{Var}(\Delta_i \tilde{X}(y)) = \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X}(y))^2(y)] \propto \sqrt{\Delta_n},$$

gleichmäßig in i . Daher existiert ein $c > 0$, sodass

$$\sum_{i=a}^b \text{Var}(Z_{n,i}) = \sum_{i=a}^b \text{Var}(\tilde{\xi}_{n,i}) \geq c(b-a+1)\Delta_n,$$

wobei $(b-a+1)$ die Anzahl der Summanden ist. Weiter impliziert Satz 4.1.5

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i}\right) = n^2 \Delta_n \vartheta_2 \pi \text{Var}(V_{n,\Delta_n}) = \mathcal{O}(n\Delta_n),$$

und somit

$$\text{Var}\left(\sum_{i=a}^b Z_{n,i}\right) = \mathcal{O}(\Delta_n(b-a+1)).$$

Hiermit folgt die erste Bedingung.

- (II) Wir zeigen nachfolgend $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,i}^2] < \infty$. Bedingt durch die Zentriertheit genügt es den Limes superior über die Varianz von $Z_{n,i}$ zu bilden. Satz 4.1.5 impliziert wiederum wie in (I)

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}(Z_{n,i}) = \mathcal{O}(n\Delta_n),$$

womit der Limes superior beschränkt ist hinsichtlich $n\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

- (III) Wir zeigen die Lindeberg-Bedingung $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,i}^2 \mathbb{1}_{|Z_{n,i}| > \varepsilon}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für alle $\varepsilon > 0$ mithilfe der Lyapunov-Bedingung. Wir müssen daher zeigen, dass ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Z_{n,i})^{-(1+\tilde{\delta}/2)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|Z_{n,i}|^{2+\tilde{\delta}}] = 0.$$

Wir verwenden erneut, dass die Summe der Varianzen der $Z_{n,i}$ gleichmäßig in allen i von der Ordnung $\mathcal{O}(n\Delta_n)$ ist. Da $\Delta_i \tilde{X}(y)$ zentriert normalverteilt ist, erhalten wir zunächst für die Wahl von $\tilde{\delta} = 2$ eine Rate von $\mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8(y)] = \mathcal{O}(\Delta^2)$ und demnach $\mathbb{E}[\tilde{\xi}_{n,i}^4] = \mathcal{O}(\Delta^2)$. Es folgt

schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Z_{n,i})^{-2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|Z_{n,i}|^4] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(n\Delta^2) = 0.$$

(IV) Es verbleibt lediglich zu zeigen, dass

$$\text{Cov}\left(e^{it \sum_{i=a}^b Z_{n,i}}, e^{it \sum_{i=b+u}^c Z_{n,i}}\right) \leq \rho_t(u) \sum_{i=a}^c \text{Var}(Z_{n,i}),$$

für alle $1 \leq a \leq b \leq b+u \leq c \leq n$ und $t \in \mathbb{R}$ sowie, dass $\rho_t(u) \geq 0$ eine Funktion mit $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_t(2^j) < \infty$ ist. Diese Aussage wird direkt durch Satz 4.1.6 mittels $\rho(u) = Ct^2u^{-3/4}$ impliziert. Da $2^{-3/4} \approx 0.6 < 1$, ist die geometrische Reihe konvergent.

Somit erhalten wir insgesamt

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_y^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \pi\Gamma\sigma^4),$$

für $n \rightarrow \infty$. □

4.2 Volatilitätsschätzung und Asymptotik mit mehreren Raumkoordinaten

In diesem Abschnitt möchten wir die Volatilität anhand von Beobachtungen $(\Delta_i X)^2$, für $1 \leq i \leq n$ in der Zeit und Raumkoordinaten y_1, \dots, y_m schätzen. Das Verhältnis zwischen Raum- und Zeitkoordinaten ist nach Annahme 2.3.3 reguliert. Satz 4.1.5 zeigt außerdem, dass die Kovarianz zweier beliebiger Punkte y_i, y_j mit $y_i \neq y_j$ von V_{p, Δ_n} verschwindet. Somit ist ein Schätzer in verschiedenen Raumpunkten asymptotisch unkorreliert, sofern $m^2 \Delta_n \rightarrow 0$. Wir betrachten den bereits behandelten Schätzer $\hat{\sigma}_y^2$, welcher von der Raumkoordinate lediglich durch den Exponentialterm über die Reskalierung des ersten Moments abhängig ist, und mitteln nun über die Beobachtungen im Raum. Wir betrachten demzufolge den Schätzer

$$\hat{\sigma}_{n,m}^2 := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{y_j}^2 = \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{mn\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right].$$

Da die Terme asymptotisch unkorreliert sind, können wir heuristisch eine Rate von $\mathcal{O}(\sqrt{nm})$ für die Konvergenz des Schätzers $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ gegen die selbe asymptotische Verteilung wie aus Satz 4.1.3 vermuten. Im Detail werden wir allerdings Bedingung (IV) des allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes 4.1.2, welche die Regulierung der Kovarianz beinhaltet, nochmal erneut in Form eines Korollars nachweisen müssen. Mithilfe dieses Korollars und des Satzes 4.1.5 wird es zudem möglich sein einen analogen zentralen Grenzwertsatz für den Schätzer $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ herzuleiten. Der nachfolgende Satz beinhaltet gerade die Asymptotik für den Schätzer $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ und weist dabei eine schnellere Rate von $\sqrt{n \cdot m_n}$ auf.

Satz 4.2.1

Es gelten die Annahmen 2.3.3 und 2.3.4. Sei σ konstant und $m = m_n$ ein Folge, dann resultiert für den Schätzer $\hat{\sigma}_{n,m_n}^2$ der zentrale Grenzwertsatz

$$\sqrt{n \cdot m_n}(\hat{\sigma}_{n,m_n}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \pi\Gamma\sigma^4),$$

für $n \rightarrow \infty$ und der numerischen Konstante $\Gamma \approx 0.75$ aus (35).

Der Beweis dieses zentralen Grenzwertsatzes wird annähernd analog zu dem Beweis von Satz 4.1.3 durchgeführt. Für die Bedingung (IV) benötigen wir, wie bereits erwähnt, ein Korollar zu Satz 4.1.6, welches ein Mitteln im Ort beinhaltet. Wir wiederholen hierfür die Definition des vorläufigen Dreiecksschemas aus (29)

$$\tilde{\zeta}_{n,i} := \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]$$

und formulieren mithilfe dessen den Satz 4.1.6 neu.

Korollar 4.2.2

Unter den Bedingungen von Satz 4.2.1 gilt für $1 \leq r < r + u \leq v \leq n$ und

$$\tilde{Q}_1^r = \sum_{i=1}^r \tilde{\zeta}_{n,i}, \quad \tilde{Q}_{r+u}^v = \sum_{i=r+u}^v \tilde{\zeta}_{n,i},$$

dass eine Konstante C existiert, mit $0 < C < \infty$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\left| \text{Cov}\left(e^{it(\tilde{Q}_1^r - \mathbb{E}[\tilde{Q}_1^r])}, e^{it(\tilde{Q}_{r+u}^v - \mathbb{E}[\tilde{Q}_{r+u}^v])}\right) \right| \leq \frac{Ct^2}{u^{3/4}} \sqrt{\text{Var}(\tilde{Q}_1^r) \text{Var}(\tilde{Q}_{r+u}^v)}$$

gilt.

Beweis. Wir führen den Beweis analog zu Satz 4.1.6. Daher betrachten wir die Zerlegung von \tilde{Q}_{r+u}^v in

$$\tilde{Q}_{r+u}^v = \sum_{i=r+u}^v \tilde{\zeta}_{n,i} = \frac{\sqrt{\vartheta_2\pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \left(A_1(y_j) + A_2(y_j) \right) \exp\left[y_j \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \right],$$

mit

$$A_1(y) := \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right)^2 + 2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right),$$

$$A_2(y) := \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y) \right)^2,$$

wobei $D_1^{k,i}, D_2^{k,i}$ analog zu (36) und (37) aus Satz 4.1.6 definiert sind. Ebenso ist durch gleiche Begründung $A_2(y)$ unabhängig von \tilde{Q}_1^r . Im Hinblick auf den Beweisschritt aus Satz 4.1.6

$$\left| \text{Cov}\left(e^{it\tilde{Q}_1^r}, e^{it\tilde{Q}_{r+u}^r}\right) \right| \leq 2t^2 \mathbb{E}\left[\left(\tilde{Q}_1^r\right)^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\left(\tilde{A}_1\right)^2\right]^{1/2},$$

müssen wir nun

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m A_1(y_j)\right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \text{Var}(A_1(y_j)) + \frac{1}{m} \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}(A_1(y_j), A_1(y_{j'}))$$

geeignet abschätzen, wobei wie zuvor $\bar{Y} := Y - \mathbb{E}[Y]$ die Zentrierung der Zufallsvariablen Y beschreibt. Betrachten wir die Varianz, so können wir dank der identischen Gestalt von A_1 wie in Beweis von Satz 4.1.6 und $A_1(y)$ direkt die Schranke

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \text{Var}(A_1(y_j)) \leq C \frac{\sigma^4 p \Delta_n}{(u-1)^{3/2}}$$

folgern. Für die Kovarianz betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A_1(y_j), A_1(y_{j'})) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right)^2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right)^2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right)^2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_j) \right) \right] \\ &\quad + 4\mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_j) \right) \right. \\ &\quad \quad \left. \times \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Da wir in den Mischtermen wiederum ungerade Momente einer zentrierten Normalverteilung betrachten erhalten wir mit der Unabhängigkeit von $D_1^{k,i}, D_2^{k,j}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A_1(y_j), A_1(y_{j'})) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right)^2 \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right)^2 \right] \\ &\quad + 4\mathbb{E}\left[\sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_j) \right) \right. \\ &\quad \quad \left. \times \sum_{i=r+u}^v \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_{j'}) \right) \right] \\ &= \sum_{i,l=r+u}^v \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,l} e_k(y_{j'}) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 4 \sum_{i,l=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_j) \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,l} e_k(y_{j'}) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,l} e_k(y_{j'}) \right) \right] \\
 &=: T_1 + 4T_2,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 T_1 &:= \sum_{i,l=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,l} e_k(y_{j'}) \right)^2 \right], \\
 T_2 &:= \sum_{i,l=r+u}^v \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,i} e_k(y_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_1^{k,l} e_k(y_{j'}) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_2^{k,l} e_k(y_{j'}) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Die Definition von T_1, T_2 in diesem Korollar unterscheidet sich lediglich von der Definition (38) und (39) aus Satz 4.1.6 in den unterschiedlichen Ortskoordinaten. Verwenden wir somit in der Abschätzung von T_1 und T_2 aus Satz 4.1.6 zusätzlich für die Basisvektoren $e_k(y)$ das Vorgehen aus (34), so erhalten wir eine analoge Beschränkung von $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n}/|y_j - y_{j'}|)$, sodass insgesamt die Beschränkung

$$\frac{1}{m} \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}(A_1(y_j), A_1(y_{j'})) = \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n^{3/2} p}{(u-1)^{3/2}} \frac{1}{m} \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \frac{1}{|y_j - y_{j'}|} \right)$$

folgt. Dabei ist zusätzlich nach Annahme 2.3.3 $m \cdot \min_{j=2,\dots,m} |y_j - y_{j-1}|$ nach unten beschränkt. Für die Summe über den Abstand der verschiedenen Raumkoordinaten sei daher $C_m := \min_{j=2,\dots,m} |y_j - y_{j-1}|$, dann ist $|y_j - y_{j'}| \geq |j - j'| C_m$. Hiermit folgt zunächst

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m} \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \frac{1}{|y_j - y_{j'}|} &\leq \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \frac{1}{m C_m |j - j'|} \\
 &= \mathcal{O} \left(\sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^m \frac{1}{|j - j'|} \right) \\
 &= \mathcal{O} \left(2 \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} (m - j) \right) \\
 &= \mathcal{O} \left(m \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right) = \mathcal{O}(m \log(m)),
 \end{aligned}$$

wobei die harmonische Reihe nach dem Integralvergleichskriterium eine Rate von $\mathcal{O}(\log(m))$ aufweist. Es wurde außerdem verwendet, dass der minimale Lag bei Eins liegt und der maximale bei $m - 1$ und jeder Lag zwischen diesen Werten insgesamt $m - j$ Kombinationsmöglichkeiten für $j, j' = 1, \dots, m$

mit $j \neq j'$ besitzt. Somit folgt schließlich für die Kovarianz

$$\frac{1}{m} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}(A_1(y_j), A_1(y_{j'})) = \mathcal{O}\left(\frac{\Delta_n^{3/2} p}{(u-1)^{3/2}} m \log(m)\right). \quad (42)$$

Mit $\mathbb{E}[(\tilde{Q}_{r+u}^v)^2] \geq C'' \sigma^4 \bar{p} \Delta_n$ folgt wie zuvor die Behauptung. \square

Es folgt der Beweis des zweiten zentralen Grenzwertsatzes.

Beweis von Satz 4.2.1. Wir beweisen diesen Satz gleichermaßen mit Satz 4.1.2, indem die vier Bedingungen für das Dreiecksschema $Z_{n,i} = \tilde{\zeta}_{n,i} - \mathbb{E}[\tilde{\zeta}_{n,i}]$ nachgewiesen werden. Dabei ist

$$\tilde{\zeta} = \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]$$

und $m = m_n = \mathcal{O}(n^\rho)$, mit einem $\rho \in (0, 1/2)$, wie in Annahme 2.3.3. Wir beginnen mit der asymptotischen Varianz. Es gilt wiederum mit Satz 4.1.5 und dem Schritt (42) aus dem zuvor bewiesenen Korollar, dass

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i}\right) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_{n,i}\right) \\ &= \frac{\vartheta_2 \pi}{m} \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_i x)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right], \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_i x)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]\right) \\ &= \frac{\vartheta_2 \pi}{m} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i x)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right], \sum_{i=1}^n (\Delta_i x)^2(y_{j'}) \exp\left[\frac{y_{j'} \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]\right) \\ &= \frac{\vartheta_2 \pi}{m} \sum_{j=1}^m \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i x)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]\right) \\ &\quad + \frac{\vartheta_2 \pi}{m} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i x)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right], \sum_{i=1}^n (\Delta_i x)^2(y_{j'}) \exp\left[\frac{y_{j'} \vartheta_1}{\vartheta_2}\right]\right) \\ &= \frac{\vartheta_2 \pi}{m} n^2 \Delta_n \sum_{j=1}^m \text{Var}(V_{n, \Delta_n}(y_j)) + \frac{\vartheta_2 \pi}{m} n^2 \Delta_n \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^m \text{Cov}(V_{n, \Delta_n}(y_j), V_{n, \Delta_n}(y_{j'})) \\ &= m \frac{\vartheta_2 \pi}{m} n^2 \Delta_n \cdot \frac{\Gamma \sigma^4}{n \vartheta_2} \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{p}\right)\right) + \mathcal{O}\left(n^2 \Delta_n \frac{\Delta_n^{1/2}}{n} \cdot \frac{1}{m} \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^m \frac{1}{|y_j - y_{j'}|}\right) \\ &= \pi n \Delta_n \Gamma \sigma^4 \left(1 + \mathcal{O}\left(1 \wedge \frac{\Delta_n^{\eta-1}}{n}\right)\right) + \mathcal{O}\left(n \Delta_n^{3/2} m \log(m)\right). \end{aligned}$$

Hiermit folgt für die asymptotische Varianz

$$v^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n Z_{n,i} \right) = \pi \Gamma \sigma^4.$$

Mit analogem Vorgehen ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=a}^b Z_{n,i} \right) &= \pi(b-a+1) \Delta_n \Gamma \sigma^4 \left(1 + \mathcal{O} \left(1 \wedge \frac{\delta_n^{\eta-1}}{(b-a+1)} \right) \right) + \mathcal{O} \left((b-a+1) \Delta_n^{3/2} m \log(m) \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta_n(b-a+1)) \end{aligned}$$

und es ergeben sich mit gleicher Argumentation wie im Beweis von Satz 4.1.3 die Bedingungen (I) und (II). Bedingung (IV) ist ebenso durch das Korollar 4.2.2 erfüllt. Somit verbleibt nur noch der Beweis der Lindeberg-Bedingung, welche wiederum via Lyapunov bewiesen wird. Betrachte hierfür $\tilde{\delta} = 2$ und wir berechnen mit ähnlichen Schritten wie bei der asymptotischen Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n,i}^4] &\leq \mathbb{E}[\tilde{\xi}_{n,i}^4] = \frac{\pi^2 \vartheta_2^2}{m^2} \sum_{j_1, \dots, j_4=1}^m e^{(y_{j_1} + \dots + y_{j_4}) \vartheta_1 / \vartheta_2} \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^2(y_{j_1}) \cdot \dots \cdot (\Delta_i \tilde{X})^2(y_{j_4})] \\ &\leq \frac{\pi^2 \vartheta_2^2}{m^2} \sum_{j_1, \dots, j_4=1}^m e^{(y_{j_1} + \dots + y_{j_4}) \vartheta_1 / \vartheta_2} \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8(y_{j_1})]^{1/4} \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8(y_{j_4})]^{1/4} \\ &\leq \pi^2 \vartheta_2^2 m^2 e^{4\vartheta_1 / \vartheta_2} \max_{y \in \{y_1, \dots, y_m\}} \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8(y)], \end{aligned} \quad (43)$$

wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zweifach verwendet wurde. Verwenden wir wiederum, dass $\mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8] = \mathcal{O}(\Delta_n^2)$ wie im Beweis von Satz 4.1.3, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Z_{n,i}^4] = \mathcal{O}(m^2 n \Delta_n^2) = \mathcal{O}(m^2 \Delta_n) = o(1)$$

und die Behauptung folgt. \square

Zuletzt geben wir noch eine standardisierte Form des zentralen Grenzwertsatzes 4.2.1 an. Unter Zuhilfenahme dieser Standardisierung können somit Konfidenzintervalle sowie Tests für die Volatilität konstruiert werden. Für einen solchen Satz, müssen wir σ^4 mithilfe eines geeigneten Schätzers schätzen. Ein solcher Quartizitäts-Schätzer ergibt sich intuitiv anhand des Schätzers $\hat{\sigma}_{n,m}^2$, indem die quadratischen Inkremente durch $(\Delta_i X)^4(y)$ ersetzt und entsprechend reskaliert werden. Der folgende Satz liefert sowohl einen solchen Schätzer als auch eine asymptotische Aussage für diesen.

Satz 4.2.3

Es gelten die Annahmen 2.3.3 und 2.3.4 sowie zusätzlich $\sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}^l] < \infty$, für $l = 4, 8$, dann folgt für konstantes σ und den Quartizität-Schätzer

$$\tilde{\sigma}_{n,m}^4 := \frac{\vartheta_2 \pi}{3m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^4(y_j) \exp(2y_j \vartheta_1 / \vartheta_2),$$

dass $\tilde{\sigma}_{n,m}^4 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^4$, für $n \rightarrow \infty$. Insbesondere gilt

$$\sqrt{m_n n} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{n,m_n}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\pi \Gamma \tilde{\sigma}_{n,m_n}^4}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

für $n \rightarrow \infty$ und m wie in Annahme 2.3.3.

Beweis. Angenommen es gilt $\tilde{\sigma}_{n,m}^4 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^4$, dann auch insbesondere $\tilde{\sigma}_{n,m}^4 \xrightarrow{d} \sigma^4$ für $n \rightarrow \infty$. Mithilfe der Reskalierung $(\pi \Gamma \tilde{\sigma}_{n,m}^4)^{-1/2}$ und dem Satz von Slutsky folgt somit direkt die Behauptung. Es verbleibt daher zu zeigen, dass der Quartizität-Schätzer konsistent ist. Dies werden wir anhand der L_2 -Konvergenz beweisen, wobei es aufgrund von

$$\mathbb{E}[(X_n - X)^2] = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_n] - X)^2] = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n])^2] + (\mathbb{E}[X_n] - X)^2$$

für eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Konstante X genügt, das asymptotische Verhalten des Erwartungswerts und der Varianz zu untersuchen. In diesem Fall ist X_n der Quartizität-Schätzer und $X = \sigma^4$ eine Konstante, sodass $\tilde{\sigma}_{n,m}^4 \xrightarrow{L_2} \sigma^4$ folgt. Der Mischterm im obigen Display verschwindet außerdem aufgrund der Zentrierung von X_n . Wir beweisen die Aussage somit mithilfe einer Bias-Varianz-Zerlegung. Dank Lemma 4.1.4 können die Inkremente $\Delta_i \tilde{X}$ für asymptotische Aussagen betrachtet werden, welche aufgrund der gewählten Anfangsbedingung für $\langle \xi, e_k \rangle$ normalverteilt sind. Da aufgrund von Satz 3.1.1 die Varianz bereits bekannt ist, sind im Falle der Normalverteilung auch alle höheren Momente bekannt. Es folgt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\sigma}_{n,m}^4] &= \frac{\vartheta_2 \pi}{3m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^4(y_j)] \exp(2y_j \vartheta_1 / \vartheta_2) \\ &= \frac{\vartheta_2 \pi}{3m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n 3\Delta_n \exp(-2y_j \vartheta_1 / \vartheta_2) \exp(2y_j \vartheta_1 / \vartheta_2) \frac{\sigma^4}{\vartheta_2 \pi} + \mathcal{O}(1) \\ &= n\Delta_n \sigma^4 + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^4, \end{aligned}$$

da für $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ gilt, dass $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4$. Für die Varianz berechnen wir die Kovarianz des Schätzers. Hierfür verwenden wir das vorläufige Dreiecksschema $\zeta_{n,i}$ aus (26) und es genügt, dass die Varianz der Summe über $(\zeta_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ verschwindet. Es ist für $i < j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\zeta_{n,i}^2, \zeta_{n,j}^2) &= \frac{\pi^2 \vartheta_2^2}{m^2} \sum_{u_1, \dots, u_4=1}^m e^{(y_{u_1} + \dots, y_{u_4}) \vartheta_1 / \vartheta_2} \\ &\quad \times \text{Cov}((\Delta_i X)^2(y_{u_1})(\Delta_i X)^2(y_{u_2}), (\Delta_j X)^2(y_{u_3})(\Delta_j X)^2(y_{u_4})) \\ &\leq \pi^2 \vartheta_2^2 e^{4\vartheta_1 / \vartheta_2} m^2 \\ &\quad \times \max_{u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{1, \dots, m\}} |\text{Cov}((\Delta_i X)^2(y_{u_1})(\Delta_i X)^2(y_{u_2}), (\Delta_j X)^2(y_{u_3})(\Delta_j X)^2(y_{u_4}))| \\ &\leq C m^2 \sum_{k, l, p, q=1}^{\infty} \text{Cov}(\Delta_i x_k \Delta_i x_l \Delta_i x_p \Delta_i x_q, \Delta_j x_k \Delta_j x_l \Delta_j x_p \Delta_j x_q). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden dabei die Basisvektoren $e_k(y) \leq 2C$ abgeschätzt. Die Konstante C wurde hierbei entsprechend des Maximums aus dem letzten Umformungsschritt hinreichend groß gewählt. Wir verwenden nun wiederum, dass die $A_{i,k}$ vernachlässigbar sind unter der zusätzlichen Voraussetzung des Satzes und erhalten mit (22) und (24)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\zeta_{n,i}^2, \zeta_{n,j}^2) &\leq \sum_{k,l,p,q=1}^{\infty} (\Sigma_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{BC,k}) (\Sigma_{i,j}^{B,l} + \Sigma_{i,j}^{BC,l}) (\Sigma_{i,j}^{B,p} + \Sigma_{i,j}^{BC,p}) (\Sigma_{i,j}^{B,q} + \Sigma_{i,j}^{BC,q}) (1 + o(1)) \\ &= Cm^2 \Delta_n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{k=1}^{\infty} (\Sigma_{i,j}^{B,k} + \Sigma_{i,j}^{BC,k}) \right)^4 (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Kovarianzen aus (22) und (24) ein und verwenden die Riemann-Summenapproximation, so erhalten wir analog zum Beweis von Satz 3.2.1

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\zeta_{n,i}^2, \zeta_{n,j}^2) &\leq \mathcal{O} \left(m^2 \Delta_n^2 \sigma^8 \left(\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-2z^2})^2}{z^2} e^{-z^2(j-i-1)} dz \right)^4 \right) \\ &= (m^2 \Delta_n^2 \sigma^8 (j - i - 1)^{-6}), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt (21) verwendet wurde. Des Weiteren ergibt sich mithilfe von Satz 3.1.1 für $\mathbb{E}[\zeta_{n,i}^4]$ eine Rate von

$$\mathbb{E}[\zeta_{n,i}^4] = \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{m^2} \Delta_n^2 \right) = \mathcal{O}(m^2 \Delta_n^2)$$

und es folgt für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \zeta_{n,i}^2 \right) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\zeta_{n,i}^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{Cov}(\zeta_{n,i}^2, \zeta_{n,j}^2) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\zeta_{n,i}^4] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{Cov}(\zeta_{n,i}^2, \zeta_{n,j}^2) \\ &\leq \mathcal{O} \left(m^2 \Delta_n + m^2 \Delta_n^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |j - i - 1|^{-6} \right) \\ &= \mathcal{O} \left(m^2 \Delta_n \left(1 + \Delta_n \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |j - i - 1|^{-6} \right) \right) = \mathcal{O}(m^2 \Delta_n). \end{aligned}$$

Die Varianz verschwindet demnach asymptotisch nach Annahme 2.3.3. Es folgt die Konsistenz und somit die Behauptung. \square

Mithilfe des zuvor bewiesenen Satzes können wir ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für σ^2 konstruieren, welches von der Form

$$I_{n,m_n} := \left[\hat{\sigma}_{n,m_n}^2 - q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\pi \Gamma \tilde{\sigma}_{n,m_n}^4}}{\sqrt{m_n n}}, \hat{\sigma}_{n,m_n}^2 + q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\pi \Gamma \tilde{\sigma}_{n,m_n}^4}}{\sqrt{m_n n}} \right]$$

ist. Im Falle eines Tests betrachten wir beispielsweise einen zweiseitigen Test. Sei hierfür $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ und $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Dann lautet die zugehörige Prüfgröße

$$T_{n,m_n} := \sqrt{m_n n} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{n,m_n}^2 - \sigma_0^2}{\sqrt{\pi \Gamma \hat{\sigma}_{n,m_n}^4}}$$

und wir lehnen die Nullhypothese ab, falls $T_{n,m_n} < q_{\alpha/2}$ oder $T_{n,m_n} > q_{1-\alpha/2}$, wobei q_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung beschreibt. Der Test $\varphi := \mathbb{1}_{\{|T_{n,m_n}| > q_{1-\alpha/2}\}}$ hält dann asymptotisch das Niveau α ein. Mit analogem Vorgehen können auch einseitige Tests konstruiert werden.

Bewerten wir nun die Effizienz des betrachteten Schätzers $\hat{\sigma}_{n,m}^2$, so können wir hierfür die Cramér-Rao-Ungleichung 1.3.4 zu Rate ziehen, welche eine untere Schranke für das quadratische Risiko angibt. Betrachten wir hierbei unabhängig identisch normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, für welche die Varianz $\sigma^2 > 0$ zu schätzen und $\mu \in \mathbb{R}$ bekannt ist, so lautet die Likelihoodfunktion eines jeden X_i

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und damit ist die Log-Likelihoodfunktion gegeben durch

$$l(x; \mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\vartheta) - \frac{(x-\mu)^2}{2\vartheta}.$$

Zum Berechnen der Cramér-Rao-Schranke berechnen wir die Fisher-Information und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} l(x; \mu, \vartheta) &= -\frac{1}{2\vartheta} + \frac{(x-\mu)^2}{2\vartheta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} l(x; \mu, \vartheta) &= \frac{1}{2\vartheta^2} - \frac{(x-\mu)^2}{\vartheta^3} \end{aligned}$$

und somit

$$I(\vartheta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} l(x; \mu, \vartheta) \right] = \frac{1}{\vartheta^2} - \frac{1}{2\vartheta^2} = \frac{1}{2\vartheta^2}.$$

Hiermit liegt die Fisher-Information für die X_1, \dots, X_n bei $n/2\sigma^4$ und die Cramér-Rao-Ungleichung liefert einen Wert von $2\sigma^4$. In unserem Modell kommen wir auf eine Konstante von $\pi\Gamma \approx 2.357$, welche nicht allzu weit von Zwei entfernt liegt. In der Tat entsteht die Abweichung $(\pi\Gamma - 2)\sigma^4$ gerade durch die nicht vernachlässigbaren Kovarianzen in den quadrierten Inkrementen. In Kapitel 6 wird zudem die Effizienz des Schätzers nochmal grafisch anhand einer Simulation dargestellt.

5 Parametrische Schätzung mit unbekanntem Parameter im Differentialoperator

5.1 Vorüberlegungen

In diesem letzten theoretischen Kapitel wenden wir uns der Schätzung im Falle von unbekanntem Parameter $\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2)^T$ im Differentialoperator und unbekanntem $\sigma > 0$ zu. Für eine Vorüberlegung beginnen wir mit der Einschränkung, dass für jedes fixe $m \in \mathbb{N}$ der Prozess $Z := (X_t(y_1), \dots, X_t(y_m))_{t \in [0,1]}$ multivariat normalverteilt sei und ebenso stetig in Raum und Zeit ist. Die Stetigkeit in Raum und Zeit haben wir bereits im grundlegenden Modell mithilfe einer Modifikation verwendet, siehe dafür Ende des Kapitels 2.3.1 beziehungsweise [Da Prato und Zabczyk \(2014, S. 143\)](#). Mithilfe dieser Einschränkung ist die Verteilung durch den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix charakterisiert, welche im Folgenden genauer zu untersuchen ist. Aus der Theorie zur Statistik für stochastische Prozesse ist bekannt, dass unter einer High-Frequency Asymptotik und selbst unter stetigen Beobachtungen der Drift nicht konsistent geschätzt werden kann, sofern der Zeithorizont nicht gegen Unendlich läuft. Aus diesem Grund ist der Drift in unserem SPDE-Modell aus (1) in Form von ϑ_0 nicht identifizierbar. Wenn wir somit einen Schätzer für ϑ finden wollen, sollte dieser von der Kovarianzmatrix abhängig sein. Satz 3.2.1 zeigt dabei auf, dass ein Verhältnis zwischen

$$\sigma_0^2 := \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2}} \quad \text{und} \quad \varkappa := \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$$

existiert. Ist σ^2 bekannt, so lassen sich bei geeigneter Schätzung ϑ_1, ϑ_2 identifizieren. Ist σ^2 jedoch unbekannt, so scheinen die einzigen Komponenten, welche im High-Frequency-Modell mit fixierter Zeitspanne identifizierbar sind, der normalisierte Volatilitätsparameter σ_0^2 und der Krümmungsparameter \varkappa zu sein. Für eine alternative Ansatz sei auf [Hildebrandt und Trabs \(2019\)](#) verwiesen. Die Vorüberlegung für eine Schätzung des Krümmungsparameters \varkappa wird anhand der ersten und zweiten Aussage von Satz 3.1.1 angestellt. Vernachlässigen wir für die Herleitung des Schätzers den Fehlerterm $\mathcal{O}(\Delta_n^{3/2})$, so können wir für die logarithmierte Form der quadratischen Inkremente im Mittel ein Verhalten von

$$\log \left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) \right) \approx -y\varkappa + \log \left(\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{\pi}} \right)$$

erwarten. Um dieses Verhalten genauer zu beleuchten, betrachten wir zusätzlich die Abbildung 5.1. Wählen wir nun zwei unterschiedliche Raumpunkte $y_1 \neq y_2$ mit $y_1, y_2 \in [0, 1]$, so ergibt sich der

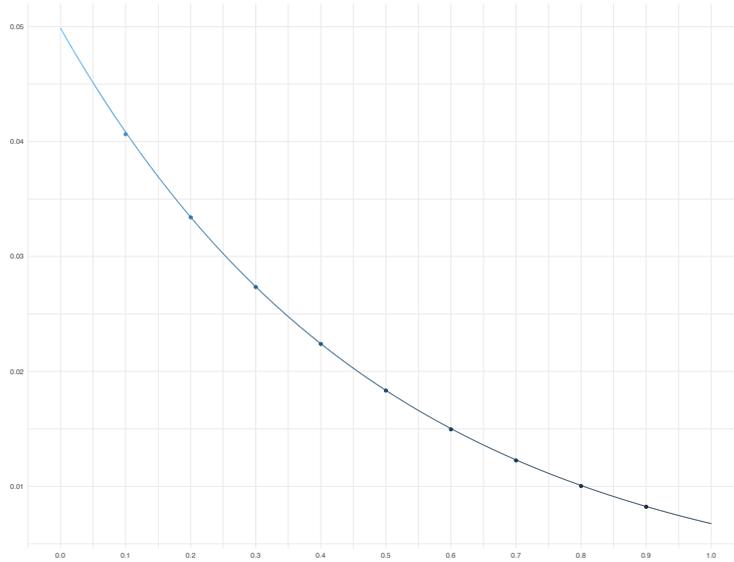


Abbildung 5.1: Dargestellt ist der Durchschnitt der reskalierten realisierten Volatilität $n^{-1}\Delta_n^{-1/2}\sum_{i=1}^n(\Delta_i X)^2(y_j)$ für die Raumpunkte $y_j = j/10$ und $j = 1, \dots, 9$ basierend auf 1000 Monte-Carlo-Simulationen. Für die Simulationen wurde eine Abbruchfrequenz von $K = 10^4$ gewählt, vergleiche hierfür Kapitel 6. Des Weiteren wurde das Modell mit den Parametern $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und einer Volatilität von $\sigma = 1/4$ simuliert. Die durchgezogene Linie, stellt dabei die Funktion $(\pi\vartheta_2)^{-1/2}\exp(-y\vartheta_1/\vartheta_2)\sigma^2$ mit den gleichen Parametern wie in der Simulation dar.

intuitive Schätzer

$$\tilde{\varkappa} = \frac{\log\left(\sum_{i=1}^n(\Delta_i X)^2(y_1)\right) - \log\left(\sum_{i=1}^n(\Delta_i X)^2(y_2)\right)}{y_2 - y_1},$$

für dessen wir mithilfe der Delta-Methode eine Konvergenzrate im zentralen Grenzwertsatz von \sqrt{n} erwarten können. Jedoch ist zunächst nicht klar, wie dieser Ansatz auf mehr als zwei Raumpunkten erweitert werden kann. Ebenso unklar ist es, ob eine Linearkombination aus verschiedenen Raumpunkten zu einer schnelleren Konvergenzrate führt. Aus diesem Grund widmen wir uns einem alternativen Ansatz.

Im allgemeinen Fall können wir mit Hinblick auf Satz 3.1.1 folgenden Ansatz formulieren

$$Z_j := \frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y_j) = f_{\sigma_0^2, \varkappa}(y_j) + \delta_{n,j},$$

mit einer Funktion

$$f_{s,k}(y) := \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-ky}$$

sowie Zufallsvariablen $\delta_{n,j}$. Wir trennen somit Z_j in den Term $f_{\sigma_0^2, \varkappa}(y_j)$, welcher die zu schätzenden Parameter enthält und das Rauschen $\delta_{n,j}$. Satz 3.1.1 liefert des Weiteren

$$\mathbb{E}[Z_j] = f_{\sigma_0^2, \varkappa}(y_j) + \mathbb{E}[\delta_{n,j}] = f_{\sigma_0^2, \varkappa}(y_j) + \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Hierdurch erhalten wir

$$\mathbb{E}[\delta_{n,j}] = \mathcal{O}(\Delta_n).$$

Mithilfe von Satz 4.1.5 erhalten wir

$$\text{Cov}(\delta_{n,j}, \delta_{n,k}) = \mathbb{1}_{\{j=k\}} \Delta_n \Gamma \sigma_0^4 e^{-2\varkappa y_j} + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{3/2} (\delta^{-1} + |y_j - y_k|^{-1})\right),$$

wobei $V_{n, \Delta_n}(y_j) = Z_j e^{-\varkappa y_j}$. Für $\Delta_n \rightarrow 0$ sind die Zufallsvariablen $\delta_{n,j}, \delta_{n,k}$ wie zuvor für $j \neq k$ asymptotisch unkorreliert. Wir definieren auf Basis dessen den folgenden Minimum-Kontrast-Schätzer

$$\hat{\eta} := (\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa}) := \arg \min_{s, k} \sum_{j=1}^m \left(Z_j - f_{s, k}(y_j) \right)^2.$$

Der Schätzer $\hat{\eta}$ entspricht somit dem klassischen Kleinste-Quadrate-Schätzer mit den Fehlern $\delta_{n,j}$.

5.2 Zentraler Grenzwertsatz

Mithilfe der Theorie über den Minimum-Kontrast-Schätzer und der vorangegangenen Analyse über die Zufallsvariablen $\delta_{n,j}$ können wir den folgenden Grenzwertsatz formulieren. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass σ_0^2 und \varkappa aus einem kompakten Intervall stammen.

Satz 5.2.1

Es gelten die Annahmen 2.3.3 und 2.3.4. Sei $\eta := (\sigma_0^2, \varkappa) \in \Xi$, für ein Kompakta $\Xi \in (0, \infty) \times [0, \infty)$. Dann erfüllen die Schätzer $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})$ für eine Folge $m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ einen zentralen Grenzwertsatz der Form

$$\sqrt{m_n n} ((\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})^T - (\sigma_0^2, \varkappa)^T) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^4 \Gamma \pi V(\eta)^{-1} U(\eta) V(\eta)^{-1}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$ und mit den strikt positiv-definiten Matrizen

$$U(\eta) := \begin{pmatrix} \int_{\delta}^{1-\delta} e^{-4\varkappa y} dy & -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} y e^{-4\varkappa y} dy \\ -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} y e^{-4\varkappa y} dy & \sigma_0^4 \int_{\delta}^{1-\delta} y^2 e^{-4\varkappa y} dy \end{pmatrix},$$

$$V(\eta) := \begin{pmatrix} \int_{\delta}^{1-\delta} e^{-2\varkappa y} dy & -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} y e^{-2\varkappa y} dy \\ -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} y e^{-2\varkappa y} dy & \sigma_0^4 \int_{\delta}^{1-\delta} y^2 e^{-2\varkappa y} dy \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit der Assoziation des Schätzers $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})^T$ zu der folgenden Kontrastfunktion

$$K(\eta, \eta') := \int_{\delta}^{1-\delta} (f_{\eta}(y) - f_{\eta'}(y)) dy,$$

wobei $\eta := (\sigma_0^2, \varkappa)$. Der zugehörige Kontrastprozess sei

$$K_n(\eta') := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (Z_j - f_{\eta'}(y_j))^2.$$

Offensichtlich besitzt $K(\eta, \eta')$ ein eindeutiges Minimum bei $\eta = \eta'$. Des Weiteren sei $m = m_n$. Somit ist die Assoziation nach Definition des Minimum-Kontrast-Schätzers klar. Wir verwenden nun Satz 1.3.6 und unterteilen den Beweis in drei Teile. Der erste Teil dient dabei zum Nachweis, dass unser definierter Kontrastprozess zur Kontrastfunktion K zugehörig ist. Der zweite Schritt wird dabei zum Nachweis der Konsistenz des Minimum-Kontrast-Schätzers $(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})^T$ entsprechend der Bedingungen (1)-(3) aus Satz 1.3.6 dienen. Da Bedingung (1) und (2) direkt ersichtlich sind, genügt es Bedingung (3) zu zeigen. Der dritte Teil wird ergänzend den zentralen Grenzwertsatz im Sinne von Bedingung (4)-(5) beweisen.

Schritt 1: Wir beginnen mit der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von

$$K_n(\eta') - K(\eta, \eta') \xrightarrow{\mathbb{P}_n} 0.$$

Hierfür zerlegen wir den Kontrastprozess wie folgt

$$\begin{aligned} K_n(\eta') &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (f_{\eta}(y_j) + \delta_{n,j} - f_{\eta'}(y_j))^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (f_{\eta}(y_j) - f_{\eta'}(y_j))^2 + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j} (f_{\eta}(y_j) - f_{\eta'}(y_j)) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j}^2. \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert mit der Riemann-Summenapproximation gegen

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (f_{\eta}(y_j) - f_{\eta'}(y_j))^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{1-\delta} (f_{\eta}(y) - f_{\eta'}(y))^2 dy,$$

wobei der Abstand δ in den Gitterpunkten zum Rand berücksichtigt wird. Für den zweiten Term definieren wir $g(y) := f_{\eta}(y) - f_{\eta'}(y)$ und erhalten

$$\mathbb{P}_{\eta} \left(\left| \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j} g(y_j) \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}_{\eta} \left[\left(\left| \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j} g(y_j) \right| \right)^2 \right],$$

wobei die Markov-Ungleichung mit $x \mapsto x^2$ verwendet wurde. Für die Existenz der Varianz

verwenden wir, dass g gleichmäßig beschränkt ist auf dem Kompakta $\Xi \times [0, 1]$ sowie Satz 4.1.5 und erhalten des Weiteren

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\eta \left(\left| \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j} g(y_j) \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{4}{m^2 \varepsilon^2} \sum_{j,k=1}^m |\mathbb{E}_\eta[\delta_{n,j} \delta_{n,k}]| \cdot |g(y_j) g(y_k)| \\ &\leq \frac{4C}{m^2 \varepsilon^2} \sum_{j,k=1}^m \left(\mathbb{1}_{\{j=k\}} \Delta_n \Gamma \sigma_0^4 e^{-2\kappa y_j} + \mathcal{O}(\Delta_n^{3/2}) \right) \cdot |g(y_j) g(y_k)| \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{\Delta_n}{m} + m^2 \Delta_n^{3/2} \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten C und der Beschränkung des Exponentialterms durch Eins. Man beachte, dass $m \rightarrow \infty$ ebenso $n \rightarrow \infty$ impliziert, da $m = m_n$. Für den dritten und letzten Term ergibt sich mit $\mathbb{E}[\delta_{n,j}^2] = \Delta_n \sigma_0^4 e^{-2\kappa y_j}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\eta \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{n,j}^2 > \varepsilon \right) &\leq \mathbb{P}_\eta \left(\sup_{j=1, \dots, m} \delta_{n,j}^2 > \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P}_\eta \left(\bigcup_{j=1}^m \{ \delta_{n,j}^2 > \varepsilon \} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_\eta (\delta_{n,j}^2 > \varepsilon) \\ &\leq m \sup_{j=1, \dots, m} \mathbb{P}_\eta (\delta_{n,j}^2 > \varepsilon) \\ &\leq \frac{m}{\varepsilon} \sup_{j=1, \dots, m} \mathbb{E}_\eta [\delta_{n,j}^2] = \mathcal{O}(\Delta_n m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wiederum die Markov-Ungleichung mit der Identität verwendet.

Schritt 2: Wir beweisen nun die Konsistenz des Schätzers $\hat{\eta} = (\hat{\sigma}_0^2, \hat{\kappa})$. Da nach Annahme des Satzes der Parameterraum kompakt ist und der Kontrastprozess K_n sowie die Kontrastfunktion K stetig sind, verbleibt noch der Nachweis von Kriterium (3) aus Satz 1.3.6. Hierfür verwenden wir, dass Straffheit in diesem Fall äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist, vergleiche hierfür [Holzmann und Bibinger \(2016, S. 44, Satz 4.17\)](#). Es folgt mithilfe der Markov-Ungleichung

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\eta \left(\sup_{|\eta' - \eta| < \delta} |K_n(\eta) - K_n(\eta')| \geq \varepsilon \right) \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_\eta \left[\sup_{|\eta' - \eta| < \delta} |K_n(\eta) - K_n(\eta')| \geq \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_\eta \left[\sup_{|\eta' - \eta| < \delta} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left((Z_j - f_\eta(y_j))^2 - (Z_j - f_{\eta'}(y_j))^2 \right) \right| \geq \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_\eta \left[\sup_{|\eta' - \eta| < \delta} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(-2Z_j f_\eta(y_j) + 2Z_j f_{\eta'}(y_j) + f_\eta^2(y_j) - f_{\eta'}^2(y_j) \right) \right| \geq \varepsilon \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_\eta \left[\sup_{|\eta' - \eta| < \delta} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(2Z_j(f_\eta(y_j) - f_{\eta'}(y_j)) + f_{\eta'}^2(y_j) - f_\eta^2(y_j) \right) \right| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

Da f_η gleichmäßig stetig in η ist, konvergiert mit dominierter Konvergenz der Term aus der letzten Zeile gegen 0. Somit erhalten wir, dass $\hat{\eta} = (\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})$ konsistent ist.

Schritt 3: Wir beweisen nun den Grenzwertsatz. Für diesen weisen wir Bedingung (4) und (5) aus Satz 1.3.6 nach. Hierfür beginnen wir mit der Berechnung der Ableitung des Kontrastprozesses. Betrachte hierfür den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f_\vartheta := f_{s,k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} f_{s,k} \\ \frac{\partial}{\partial k} f_{s,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} \\ -y \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} \end{pmatrix} = \frac{e^{-ky}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -ys \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f_\vartheta &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s^2} f_{s,k} & \frac{\partial^2}{\partial s \partial k} f_{s,k} \\ \frac{\partial^2}{\partial k \partial s} f_{s,k} & \frac{\partial^2}{\partial k^2} f_{s,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -y \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} \\ -y \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} & y^2 \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} \end{pmatrix} = -\frac{e^{-ky}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & -y^2 s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{K}_n(\eta) &= -\frac{2}{m} \sum_{j=1}^m (Z_j - f_\eta(y_j)) \frac{e^{-\varkappa y_j}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -y_j \sigma_0^2 \end{pmatrix}, \\ \ddot{K}_n(\eta) &= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m (Z_j - f_\eta(y_j)) \frac{e^{-\varkappa y_j}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 & y_j \\ y_j & -y_j^2 \sigma_0^2 \end{pmatrix} + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \frac{e^{-2\varkappa y_j}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & -y_j \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Wie in der Beweisskizze von Satz 1.3.6 können wir annehmen, dass es ein Ereignis $\Omega_n^1 := \{[\hat{\eta}_n, \eta]\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\eta(\Omega_n^1) = 1$ gibt, sodass nach dem Mittelwertsatz

$$0 = \dot{K}_n(\hat{\eta}) - \dot{K}_n(\eta) = \ddot{K}_n(\bar{\eta})(\hat{\eta} - \eta)$$

gilt. Folglich lässt sich auf diesem Ereignis der Abstand zwischen Schätzer und Parameter durch

$$\hat{\eta} - \eta = -\dot{K}_n(\eta) \ddot{K}_n^{-1}(\bar{\eta})$$

darstellen, wobei $\bar{\eta} \in [\eta, \hat{\eta}_n]$ in einer nahen Umgebung von η liegt. Darüber hinaus gilt für $\Omega_n^2 := \{\ddot{K}_n^{-1} \text{ existiert}\}$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\eta(\Omega_n^2) = 1$. Daher betrachten wir den Schnitt beider Ereignisse. Entsprechend der Bedingung (4) aus Satz 1.3.6 zeigen wir nun

$$\sqrt{nm} \dot{K}_n(\eta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{4\Gamma \sigma_0^4}{\pi} U(\eta)\right),$$

wobei

$$U(\eta) := \begin{pmatrix} \int_\delta^{1-\delta} e^{-4\varkappa y} dy & -\sigma_0^2 \int_\delta^{1-\delta} y e^{-4\varkappa y} dy \\ -\sigma_0^2 \int_\delta^{1-\delta} y e^{-4\varkappa y} dy & \sigma_0^4 \int_\delta^{1-\delta} y^2 e^{-4\varkappa y} dy \end{pmatrix} \quad (45)$$

positiv definit ist. Definiere hierfür

$$\chi_{n,i} := -\frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m ((\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) - \sqrt{\Delta_n} f_\eta(y_j)) \frac{e^{-\varkappa y_j}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -y_j \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

Da Z_j mittels $n\sqrt{\Delta_n}$ der reskalierten realisierten Volatilität entspricht, ist

$$\sqrt{n}(Z_j - f_\eta(y_j)) = \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y_j) - \sqrt{n} f_\eta(y_j) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} (\Delta_i X)^2(y_j) - \frac{1}{\sqrt{n}} f_\eta(y_j) \right),$$

wodurch $\sqrt{nm} \hat{K}_n(\eta) = \sum_{i=1}^n \chi_{n,i}$. Den Übergang von X zu \tilde{X} nehmen wir wiederum nach Lemma 4.1.4 vor. Wir werden nun die Varianz-Kovarianz Matrix von der Summe $\chi_{n,i}$ bestimmen und daraufhin nachweisen, dass diese mit der Rate \sqrt{nm} gegen eine Normalverteilung konvergiert. Für die Verteilungskonvergenz hingegen werden wir den allgemeinen zentralen Grenzwertsatz nach Utev aus Kapitel 4.1.2 verwenden. Für die Varianz-Kovarianz Matrix ergibt sich bis auf Weiteres

$$\begin{aligned} & \text{COV} \left(\sum_{i=1}^n \chi_{n,i} \right) \\ &= \frac{4}{m} \sum_{j,k=1}^m \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) - \sqrt{\Delta_n} f_\eta(y_j), \sum_{i=1}^n (\Delta_i \tilde{X})^2(y_k) - \sqrt{\Delta_n} f_\eta(y_k) \right) \\ & \quad \times \frac{e^{-\varkappa(y_j+y_k)}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -y_k \sigma_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y_k \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{m} \sum_{j,k=1}^m \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j), \sum_{i=1}^n (\Delta_i \tilde{X})^2(y_k) \right) \frac{e^{-\varkappa(y_j+y_k)}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & -y_k \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j y_k \sigma_0^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei COV der Varianz-Kovarianz Matrix von der Summe der $\chi_{n,i}$ entspricht. Rekapitulieren wir erneut den Ausdruck $V_{n,\Delta_n}(y)$ aus (30) mit

$$V_{p,\Delta_n}(y) = \frac{1}{p\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^p (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \exp \left[\frac{y\vartheta_1}{\vartheta_2} \right],$$

so ergibt sich mithilfe von Satz 4.1.5

$$\begin{aligned} \text{COV} \left(\sum_{i=1}^n \chi_{n,i} \right) &= \frac{4n^2 \Delta_n}{m} \sum_{j,k=1}^m \frac{e^{-2\varkappa(y_j+y_k)}}{\pi} \text{Cov}(V_{n,\Delta_n}(y_j), V_{n,\Delta_n}(y_k)) \begin{pmatrix} 1 & -y_k \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j y_k \sigma_0^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4n^2 \Delta_n}{m} \sum_{j,k=1}^m \frac{e^{-2\varkappa(y_j+y_k)}}{\pi} \left(\frac{\Gamma \sigma_0^4}{n} \mathbb{1}_{\{j=k\}} \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{O} \left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{n} \left(\mathbb{1}_{\{y_1 \neq y_2\}} \frac{1}{|y_1 - y_2|} + \frac{1}{\delta} \right) \right) \right) \begin{pmatrix} 1 & -y_k \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j y_k \sigma_0^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4n^2 \Delta_n}{m} \cdot \frac{\Gamma \sigma_0^4}{n} \sum_{j=1}^m \frac{e^{-4\varkappa y_j}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & -y_j \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j^2 \sigma_0^4 \end{pmatrix} + \frac{4n^2 \Delta_n}{m} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{e^{-2\varkappa(y_j+y_k)}}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\Delta_n}}{n}\left(\mathbb{1}_{\{y_1 \neq y_2\}} \frac{1}{|y_1 - y_2|} + \frac{1}{\delta}\right)\right) \begin{pmatrix} 1 & -y_k \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j y_k \sigma_0^4 \end{pmatrix} \\
 & = \frac{4\Gamma\sigma_0^4}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e^{-4\kappa y_j} & -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} \\ -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} & \sigma_0^4 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2 e^{-4\kappa y_j} \end{pmatrix} \left(1 + \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n} \log(m)m)\right),
 \end{aligned} \tag{46}$$

wobei die Wachstumsrate für die unterschiedlichen Ortskoordinaten analog zu (42) berechnet wurde. Die obige Matrix konvergiert durch die Riemann-Summenapproximation für $m \rightarrow \infty$ gegen den in (45) angegebenen Grenzwert. Des Weiteren ist die obige Matrix positiv definit. Betrachte hierzu das Hauptminoren-Kriterium. Der erste führende Hauptminor ist offensichtlich größer als Null. Für den zweiten Hauptminor berechnen wir die Determinante der 2×2 -Matrix. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e^{-4\kappa y_j} & -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} \\ -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} & \sigma_0^4 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2 e^{-4\kappa y_j} \end{pmatrix} \right| \\
 & = \sigma_0^4 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e^{-4\kappa y_j} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^2 e^{-4\kappa y_k} - \sigma_0^4 \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Die Jensen-Ungleichung für die strikt konvexe Funktion $x \mapsto x^2$ liefert außerdem mit den Koeffizienten $1/m$

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} \right)^2 < \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2 e^{-8\kappa y_j} \leq \frac{1}{m^2} \sum_{j,k=1}^m y_j^2 e^{-4\kappa y_j} e^{-4\kappa y_k},$$

für hinreichend großes m . Es folgt die positiv Definitheit der Matrix aus (46). Somit verbleibt für Bedingung (4) des Grenzwertsatzes für den Minimum-Kontrast-Schätzer lediglich die asymptotische Normalität zu zeigen. Wir weisen hierfür die vier Bedingungen des allgemeinen zentralen Grenzwertsatzes aus Satz 4.1.2 für das zweidimensionale Dreiecksschema $\chi_{n,i}$ mithilfe von Cramér-Wold aus Satz 1.3.7 nach. Sei hierfür $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ beliebig, so definieren wir die Bedingungen (I)-(IV) für $v^T \chi_{n,i}$.

- (I) Anhand der Berechnung der Varianz-Kovarianz Matrix für die Summe der $\chi_{n,i}$ können wir für jede beliebige Linearkombination direkt folgern, dass

$$\begin{aligned}
 & \text{COV}\left(\sum_{i=1}^n v^T \chi_{n,i}\right) \\
 & = \frac{4\Gamma\sigma_0^4}{\pi} v^T \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e^{-4\kappa y_j} & -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} \\ -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-4\kappa y_j} & \sigma_0^4 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2 e^{-4\kappa y_j} \end{pmatrix} v \left(1 + \mathcal{O}(\sqrt{\Delta_n} \log(m)m)\right).
 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ergibt sich für die Varianz einer Linearkombination von $\chi_{n,i}$ dieselbe Rate. Dies ist durch die Berechnung der Varianz-Kovarianz Matrix ersichtlich. Hierbei wird lediglich v_1 betrachtet. Analog zum Beweis von Satz 4.1.3 beziehungsweise Satz 4.2.1 folgt die erste Bedingung.

- (II) Insbesondere folgt mit gleichartiger Begründung wie in Satz 4.1.3, beziehungsweise Satz 4.2.1 die zweite Bedingung.
- (III) Für die Mischungs-Bedingung verwenden wir eine Modifikation von Korollar 4.2.2. Dabei ändern wir lediglich $\tilde{\zeta}_{n,i}$ leicht ab. Da diese Bedingung die Zentrierung des Dreiecksschemas betrachtet, können wir den additiv deterministischen Term in $\chi_{n,i}$ in Form von f_η vernachlässigen. Somit ist $v^T \chi_{n,i}$ eine deterministische lineare Transformation von $\tilde{\zeta}_{n,i}$ und der Beweis aus Korollar 4.2.2 kann mithilfe analoger Schritte vollzogen werden, wodurch die Mischungs-Bedingung erfüllt ist.
- (IV) Die Lindeberg-Bedingung wird wiederum durch die Lyapunov-Bedingung analog zu (43) bewiesen. Hierfür ergibt sich

$$\mathbb{E}[|\chi_{n,i}|^4] = \mathcal{O}\left(m^2 \max_{y \in \{y_1, \dots, y_m\}} \mathbb{E}[(\Delta_i \tilde{X})^8(y)]\right) = \mathcal{O}(m^2 \Delta_n^2) = \mathcal{o}(1),$$

womit die letzte Bedingung folgt.

Schließlich ergibt sich

$$\sqrt{nm} \dot{K}_n(\eta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{4\Gamma\sigma_0^4}{\pi} U(\eta)\right),$$

mit $U(\eta)$ aus (45).

Abschließend weisen wir Bedingung (5) aus Satz 1.3.6 nach. Diesbezüglich zeigen wir die stochastische Konvergenz unter \mathbb{P}_η von \ddot{K}_n gegen eine deterministische, invertierbare Matrix auf. Sei hierfür $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\eta} \eta$, dann gilt für eine solche Folge

$$Z_j - f_{\eta_n}(y_j) = f_\eta(y_j) - f_{\eta_n}(y_j) + \delta_{n,j} \xrightarrow{\mathbb{P}_\eta} 0,$$

wenn $n \rightarrow \infty$. Dies folgt aus der Stetigkeit von f_η in η und aus $\delta_{n,j} \xrightarrow{\mathbb{P}_\eta} 0$. Anschließend ergibt sich mittels der Berechnung von $\ddot{K}_n(\eta)$ aus (44)

$$\begin{aligned} \ddot{K}_n(\eta_n) &= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m (Z_j - f_{\eta_n}(y_j)) \frac{e^{-\varkappa y_j}}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 & y_j \\ y_j & -y_j^2 \sigma_0^2 \end{pmatrix} + \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \frac{e^{-2\varkappa y_j}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & -y_j \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j^4 \sigma_0^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \frac{e^{-2\varkappa y_j}}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & -y_j \sigma_0^2 \\ -y_j \sigma_0^2 & y_j^4 \sigma_0^4 \end{pmatrix} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\eta}(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m e^{-2\varkappa y_j} & -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-2\varkappa y_j} \\ -\sigma_0^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j e^{-2\varkappa y_j} & \sigma_0^4 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^2 e^{-2\varkappa y_j} \end{pmatrix} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\eta}(1) \xrightarrow{\mathbb{P}_\eta} \frac{2}{\pi} V(\eta), \end{aligned}$$

mit

$$V(\eta) := \begin{pmatrix} \int_{\delta}^{1-\delta} e^{-2\kappa y} dy & -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} ye^{-2\kappa y} dy \\ -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} ye^{-2\kappa y} dy & \sigma_0^4 \int_{\delta}^{1-\delta} y^2 e^{-2\kappa y} dy \end{pmatrix}.$$

Da der stochastische Term unter \mathbb{P}_η verschwindet, verbleibt nur der deterministische Term, sodass $V(\eta)$ ebenfalls deterministisch ist. Die Konvergenz des deterministischen Terms ist dabei mithilfe der Riemann-Summenapproximation ersichtlich. Bezüglich der Invertierbarkeit der Matrix $V(\eta)$ ist es hinreichend, dass $V(\eta)$ positiv definit ist. Hierfür ist wie bei dem Nachweis der positiven Definitheit von der Matrix aus (46) der erste Hauptminor offensichtlich strikt positiv. Für den zweiten Hauptminor erhalten wir wiederum die Determinante von $V(\eta)$ durch

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} \int_{\delta}^{1-\delta} e^{-2\kappa y} dy & -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} ye^{-2\kappa y} dy \\ -\sigma_0^2 \int_{\delta}^{1-\delta} ye^{-2\kappa y} dy & \sigma_0^4 \int_{\delta}^{1-\delta} y^2 e^{-2\kappa y} dy \end{pmatrix} \right| \\ &= \sigma_0^4 \int_{\delta}^{1-\delta} e^{-2\kappa y} dy \int_{\delta}^{1-\delta} y^2 e^{-2\kappa y} dy - \sigma_0^4 \left(\int_{\delta}^{1-\delta} ye^{-2\kappa y} dy \right)^2. \end{aligned}$$

Mit analoger Argumentation von der Matrix (46) folgt die strikte Positivität des zweiten führenden Hauptminors. Insbesondere muss für die Invertierbarkeit die Determinante ungleich Null sein, was durch die Eigenschaft der positiven Definitheit erfüllt ist. Somit sind die Kriterien des Grenzwertsatzes 1.3.6 erfüllt und es folgt

$$\sqrt{m_n n} ((\hat{\sigma}_0^2, \hat{\kappa})^T - (\sigma_0^2, \kappa)^T) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^4 \Gamma \pi V(\eta)^{-1} U(\eta) V(\eta)^{-1}\right),$$

für $n \rightarrow \infty$ und die Behauptung folgt. □

6 Simulation des SPDE-Modells

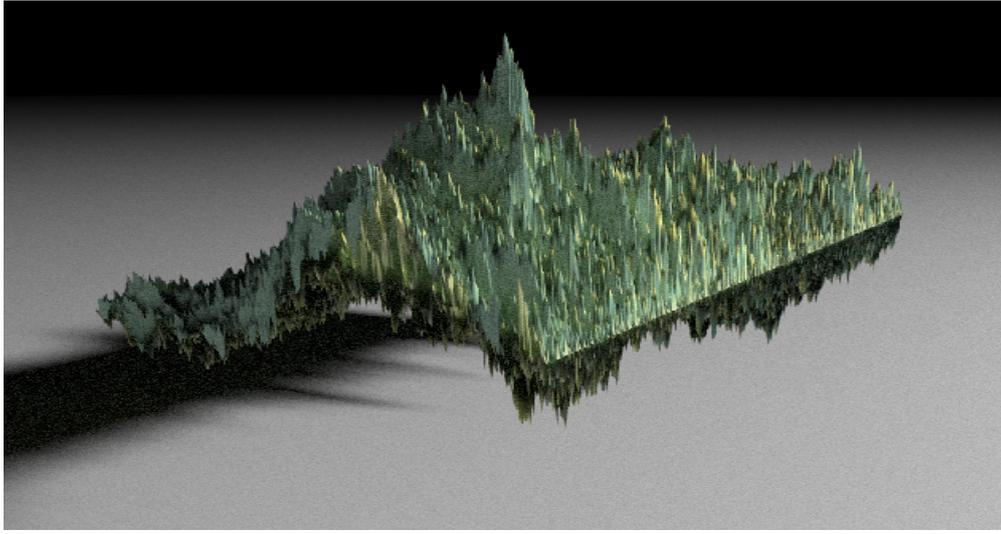


Abbildung 6.1: Simulation einer Lösung der SPDE aus (1) mit den Parametern $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$. Dargestellt wird ein Ausschnitt der ersten hundert Orts- und ersten tausend Zeitpunkte.

In diesem letzten Kapitel werden wir die Simulation des betrachteten SPDE-Modells aus (2.2) besprechen. Hierbei werden unter Anderem die einzelnen Komponenten des Modells wie Basisvektoren und stochastische Fourierkoeffizienten grafisch dargestellt. Wir werden ebenso ein geeignetes Abbruchkriterium für die Fourierreihe im Hinblick auf Laufzeit und Effizienz im zweiten Unterkapitel diskutieren. Die Effizienz wird dabei anhand ausgewählter Resultate bewertet werden, sodass gleichzeitig diese Resultate anhand von Monte-Carlo-Simulationen zu beobachten sind. Im letzten Unterkapitel werden wir dann abschließend die Schätzer aus Kapitel 4 und 5 simulieren und zum Teil miteinander vergleichen.

6.1 Grundlagen des SPDE-Modells

Wir beginnen mit der Implementierung des SPDE-Modells aus Kapitel 2.2. Hierbei betrachteten wir als Ausgangssituation die folgende lineare parabolische stochastische partielle Differentialgleichung

$$\left[\begin{array}{l} dX_t(y) = \left(\vartheta_2 \frac{\partial^2 X_t(y)}{\partial y^2} + \vartheta_1 \frac{\partial X_t(y)}{\partial y} + \vartheta_0 X_t(y) \right) dt + \sigma_t dB_t(y), \\ X_0(y) = \xi(y), \\ X_t(y_{min}) = X_t(y_{max}) = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{auf } (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times [y_{min}, y_{max}], \\ \text{auf } [y_{min}, y_{max}], \\ \text{für alle } t \geq 0, \end{array} \right]$$

wobei B_t eine zylindrische Brownsche Bewegung auf dem Sobolev-Raum auf $[y_{min}, y_{max}]$ ist. Wie zuvor, wählen wir ohne Einschränkung $[y_{min}, y_{max}] = [0, 1]$. Mithilfe einer Zerlegung der SPDE in ein Faktormodell erhalten wir wie in Kapitel 2.3.1 die folgende Darstellung einer Lösung X_t

$$X_t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) e_k(y),$$

mit

$$x_k(t) = e^{-t\lambda_k} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dB_s^k, \quad e_k(y) = \sqrt{2} \sin(\pi k y) \exp \left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y \right],$$

wobei B_t^k unabhängige Brownsche Bewegungen für $k \geq 1$ sind und

$$\lambda_k = -\vartheta_0 + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} + \vartheta_2 \pi^2 k^2, \quad \langle f, g \rangle_{\vartheta} = \int_0^1 \exp \left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y \right] f(y) g(y) dy$$

die Zerfallsrate sowie das Skalarprodukt des Hilbertraums $H_{\vartheta} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\vartheta} < \infty, f(0) = f(1) = 0\}$. Für die Simulation einer Lösung muss demnach lediglich der Koordinatenprozess $x_k(t)$ geeignet simuliert werden sowie ein hinreichendes Abbruchkriterium für die Reihenentwicklung besprochen werden. Beginnen wir mit dem stochastischen Koordinatenprozess. Wie bereits in Kapitel 2.3.1 gezeigt, erfüllt $x_k(t)$ die Ornstein-Uhlenbeck-Dynamik. Wir werden daher die Verteilung einer Lösung der Ornstein-Uhlenbeck SDE⁴ bestimmen. Infolgedessen können wir das SPDE-Modell simulieren. Sei hierfür x_t ein Lösungsprozess der Ornstein-Uhlenbeck SDE, so ist

$$x_t = e^{-\vartheta t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} dW_s,$$

mit $\vartheta \neq 0$. Da der Integrand deterministisch ist, ist das Itô-Integral für festes $t > 0$ zentriert normalverteilt. Sei die Anfangsbedingung zusätzlich deterministisch, so ist die Verteilung von x_t zentriert normalverteilt und wird demnach durch den Erwartungswert und die Kovarianz charakterisiert. Es folgt

$$\mathbb{E}[x_t] = e^{-\vartheta t} x_0 + \mathbb{E} \left[\sigma \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} dW_s \right] = e^{-\vartheta t} x_0$$

und für $0 < t_1 \leq t_2$

$$\text{Cov}(x_{t_1}, x_{t_2}) = \mathbb{E}[x_{t_1} x_{t_2}] - \mathbb{E}[x_{t_1}] \mathbb{E}[x_{t_2}] = \mathbb{E}[x_{t_1} x_{t_2}] - e^{-\vartheta(t_1+t_2)} x_0^2.$$

⁴SDE steht für stochastic differential equation, zu Deutsch: stochastische Differentialgleichung.

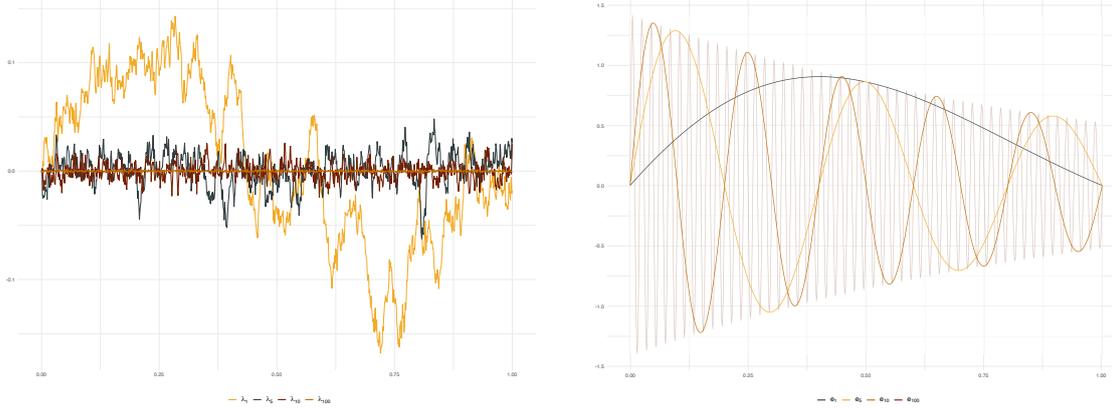


Abbildung 6.2: Links: Vier Realisierungen von Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit Zerfallsrate λ_k , $k = 1, 5, 10, 100$. Simuliert wurde dabei auf dem Zeitintervall $[0, 1]$ mit $\Delta_n = 1000$ sowie den Parametern $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 1$ und $\vartheta_2 = 1/2$. Als Anfangsbedingung wurde $\xi = 0$ gewählt. Rechts: Darstellung von vier Basisvektoren e_k , $k = 1, 5, 10, 100$ mit identischen Parametern wie auf der linken Seite.

Das gemischte Moment berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_{t_1} x_{t_2}] &= e^{-\vartheta(t_1+t_2)} x_0^2 + e^{-\vartheta t_1} \mathbb{E} \left[\sigma \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right] + e^{-\vartheta t_2} \mathbb{E} \left[\sigma \int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sigma^2 \int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right] \\ &= e^{-\vartheta(t_1+t_2)} x_0^2 + \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right]. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_{t_1}, x_{t_2}) &= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_1} e^{\vartheta s} dW_s \right)^2 \right] + \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \int_{t_1}^{t_2} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} e^{2\vartheta s} ds + \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \right] \mathbb{E} \left[\int_{t_1}^{t_2} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \left[\frac{1}{2\vartheta} e^{2\vartheta s} \right]_0^{t_1} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\vartheta} e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \left(e^{2\vartheta t_1} - 1 \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\vartheta} \left(e^{-\vartheta(t_2-t_1)} - e^{-\vartheta(t_2+t_1)} \right). \end{aligned}$$

Mit analoger Rechnung für $t_2 \leq t_1$ folgt für $t_1, t_2 > 0$ folgt ebenso

$$\text{Cov}(x_{t_1}, x_{t_2}) = \frac{\sigma^2}{2\vartheta} \left(e^{-\vartheta|t_2-t_1|} - e^{-\vartheta(t_2+t_1)} \right)$$

und demnach auch

$$\text{Var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\vartheta} \left(1 - e^{-2\vartheta t} \right).$$

Insbesondere stabilisiert sich die Varianz für $t \rightarrow \infty$ bei $\sigma^2/(2\vartheta)$, wohingegen der Erwartungswert gegen Null konvergiert. Für den Fall, dass $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_{x_0}, \sigma_{x_0}^2)$, so verändert sich lediglich der berechnete Erwartungswert zu $\mathbb{E}[x_t] = e^{-\vartheta t} \mathbb{E}[x_0] = e^{-\vartheta t} \mu_{x_0}$ und der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess besitzt aufgrund der Unabhängigkeit der Anfangsbedingung folglich die Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_{t_1}, x_{t_2}) &= \text{Cov} \left(e^{-\vartheta t_1} x_0 + \sigma \int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s, e^{-\vartheta t_2} x_0 + \sigma \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right) \\ &= e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \text{Var}(x_0) + \text{Cov} \left(\sigma \int_0^{t_1} e^{-\vartheta(t_1-s)} dW_s, \sigma \int_0^{t_2} e^{-\vartheta(t_2-s)} dW_s \right) \\ &= e^{-\vartheta(t_1+t_2)} \sigma_{x_0}^2 + \frac{\sigma^2}{2\vartheta} \left(e^{-\vartheta|t_2-t_1|} - e^{-\vartheta(t_2+t_1)} \right). \end{aligned}$$

Die Verteilung ist dann gegeben durch:

$$x_t \sim \mathcal{N} \left(e^{-\vartheta t} \mu_{x_0}, \frac{\sigma^2}{2\vartheta} \left(1 - e^{-2\vartheta t} \right) + e^{-2\vartheta t} \sigma_{x_0}^2 \right).$$

Setzen wir nun die Darstellung des Koordinatenprozesses ein, so ergibt sich mit $\vartheta = \lambda_k$

$$x_k(t) \sim \mathcal{N} \left(e^{-\lambda_k t} \mathbb{E}[\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}], \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} \left(1 - e^{-2\lambda_k t} \right) + e^{-2\lambda_k t} \text{Var}(\langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta}) \right),$$

für $k \geq 1$. Im Falle von $\xi = 0$ erhalten wir als Struktur in der Zeit eine zentrierte Normalverteilung mit Varianz $\sigma^2(1 - \exp(-2\lambda_k t))/(2\lambda_k)$. Wir simulieren somit Realisierungen der Inkremente des Koordinatenprozesses über das diskrete Gitter in Zeit und Raum. Betrachten wir nun die Inkremente, so erhalten wir mit der Anfangsbedingung x_0

$$\begin{aligned} x_k(t + \Delta_n) - x_k(t) e^{-\lambda_k \Delta_n} &= e^{-\lambda_k(t+\Delta_n)} x_0 - e^{-\lambda_k t} x_0 \\ &\quad + \sigma \left(\int_0^{t+\Delta_n} e^{-\lambda_k(t+\Delta_n-s)} dW_s - e^{-\lambda_k \Delta_n} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} dW_s \right) \\ &= \sigma \int_t^{t+\Delta_n} e^{-\lambda_k(t+\Delta_n-s)} dW_s \end{aligned}$$

und demzufolge die rekursive Darstellung

$$x_k(t + \Delta_n) = x_k(t) e^{-\lambda_k \Delta_n} + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\lambda_k \Delta_n]}{2\lambda_k}} \mathcal{N}_t,$$

6.2 Abbruchkriterium für das Faktormodell

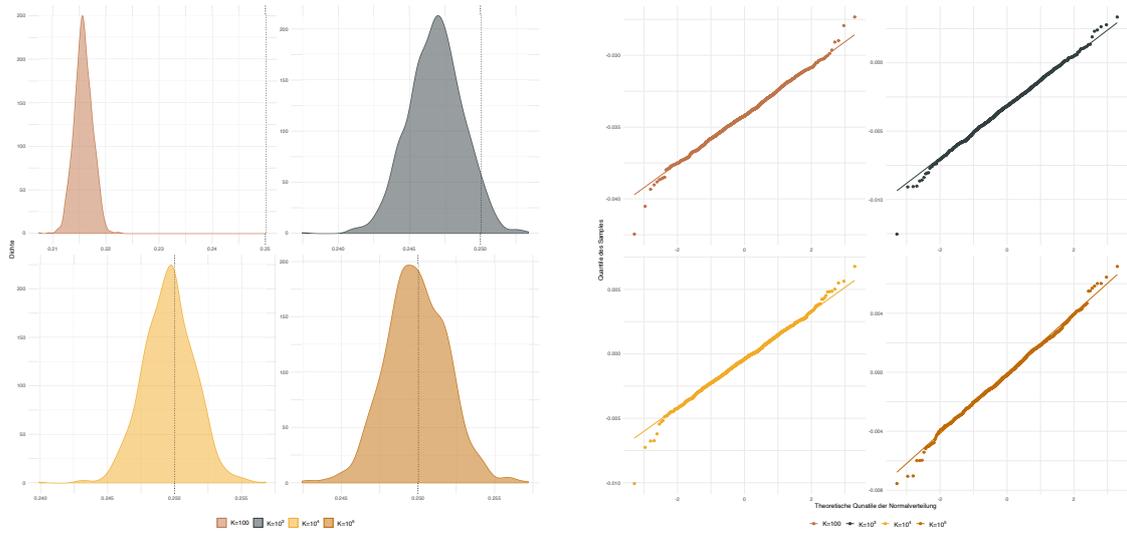


Abbildung 6.3: Links: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\sigma}_y^2$ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen, an der Stelle $y = 1/2$. Rechts: Q-Q-Plot über die Fehlerabweichung zwischen reskalierten Schätzer und dem wahren σ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen, an der Stelle $y = 1/2$. Das zugrundeliegende SPDE-Modell wurde anhand den Parametern $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ erstellt.

mit unabhängig identisch standardnormalverteilten Zufallsvariablen \mathcal{N}_t zu den Zeitpunkten $t = 0, \dots, (n-1)\Delta_n$. Die Abbildung 6.2 visualisiert Realisierungen des hergeleiteten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Zerfallsraten λ_k , für $k = 1, 5, 10, 100$.

6.2 Abbruchkriterium für das Faktormodell

Wir widmen uns nun der Bewertung eines geeigneten Abbruchkriteriums für die Fourierreihe des Faktormodells. Es ist sofort ersichtlich, dass je größer das Abbruchkriterium sein wird, umso mehr entspricht die Simulation einer tatsächlichen Lösung der stochastischen partiellen Differentialgleichung aus (2.2) und desto genauer werden die Simulationen den Resultaten dieser Arbeit entsprechen. Ebenso offensichtlich ist, dass eine genaue Lösung dieser SPDE jedoch nicht durch eine Fourierreihe simuliert werden kann. Die Fragestellung dieses Kapitels ist deshalb gegeben durch die Präzision der Simulationen gemessen an zwei unterschiedlichen Resultaten aus dieser Arbeit im Vergleich zu den Laufzeitkosten, die durch eine höhere Wahl des Abbruchkriteriums entsteht. Präzision ist hierbei im Sinne von

$$X_t(y) \approx \sum_{k=1}^K x_k(t) e_k(y),$$

für ein $K \in \mathbb{N}$ zu verstehen. Wir werden nachfolgend die vier Fälle $K \in \{100, 10^3, 10^4, 10^5\}$ für das Abbruchkriterium vergleichen. Bei einer zu kleinen Wahl von K wird eine zusätzliche negative Verzerrung in den Schätzungen in Bezug auf die Abweichung des simulierten zum theoretischen Modell zu beobachten sein. Vergleiche hierzu Abbildung 6.3. Die Simulation wird dabei wie im theoretischen Modell auf einem diskrettem Gitter in äquidistanter Zerlegung in der Zeit auf $[0, T]$, mit einer

Feinheit von Δ_n und Ortsbeobachtungen y_i für $i \in \{1, \dots, m\}$ berechnet werden. Ebenso wird die Raumkoordinate auf einem äquidistantem Gitter mit einer Feinheit von $|y_i - y_{i-1}| = 1/100$ beobachtet werden. Hierfür werden wir 1000 Monte-Carlo-Simulationen für die jeweiligen Abbruchkriterien durchführen. Als Gütekriterium wird sowohl der Schätzer der reskalierten realisierten Volatilität, als auch die Autokovarianz der Inkremente dienen. Die 1000 Monte-Carlo-Simulationen wurden über die Parameter $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2, \sigma = 1/4$ und der Anfangsbedingung $\xi = 0$ auf den Ortskoordinaten $y_i = i/100$, für $i = 1, \dots, 99$ und den Zeitkoordinaten $t_i = i/10^4$, für $i = 1, \dots, 10^4$ simuliert. Für eine grafische Darstellung eines simulierten Modells anhand der genannten Parameter sei auf Abbildung 6.1 am Beginn des Kapitels 6.3 verwiesen. Die tatsächliche Berechnung aller Simulationen wurden mithilfe des Hochleistungsrechners MaRC2 der Philipps-Universität Marburg durchgeführt. Dafür wurden pro Skript 64 Kerne verwendet. Der Programmcode wurde dementsprechend parallelisiert.

Wir beginnen mit der Anpassung von $\hat{\sigma}_{1/2}$ an das wahre $\sigma = 1/4$ über die vier Fälle des Abbruchkriteriums $K = 100, 10^3, 10^4, 10^5$. Bezeichne hierfür $\hat{\sigma}_{y,i}^2$ die Schätzung von $\hat{\sigma}_y$ der i -ten Simulation, wobei $i = 1, \dots, 1000$. Über die $(\hat{\sigma}_{y,i}^2)_{i=1, \dots, 1000}$ wird anschließend eine Kerndichteschätzung durchgeführt, sodass wir anhand der geschätzten Dichte eine grafische Aussage über das Verhalten des Schätzers bei einer gegebenen Wahl des Abbruchkriteriums treffen können. Da wir ohne Einschränkung die Zeitspanne des Modells auf Eins gesetzt haben werden wir für den Vergleich zwischen Schätzer und wahren Parameter das Ergebnis lediglich wurzeln. Im Allgemeinen schätzten wir die konstante Volatilität jedoch über den gesamten Zeitraum, sodass für einen passenden Vergleich das Ergebnis der Schätzung zusätzlich durch die Zeitspanne dividiert werden sollte. Dies wird insbesondere bei der semiparametrischen Schätzung in Form einer integrierten zeitabhängigen Volatilität ersichtlich, wie in Bibinger und Trabs (2019) behandelt.

In Abbildung 6.3 sind dabei die Ergebnisse der vier Fälle dargestellt. Erwartungsgemäß liefert ein Abbruch nach 10^5 Reihenglieder in der Fourierreihe die besten Ergebnisse. Ein Abbruch bei $K = 10^4$ ist allerdings auch noch möglich, wohingegen die Simulation des Modells unterhalb dieser Schranke nicht zu empfehlen ist. Es wurde weiterhin eine mittlere Abweichung von

$$\mu(\hat{\sigma}_y^2, \sigma) := \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \sqrt{\frac{1}{T} \hat{\sigma}_{y,i}^2} - \sigma, \quad (47)$$

der 10^3 reskalierten Schätzungen zu $\sigma = 1/4$ von

K	$\mu(\hat{\sigma}_y^2, \sigma)$	$\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_y^2, \sigma)$
10^2	-0.0341567	0.001726869
10^3	-0.003198113	0.001941864
10^4	-0.0004328306	0.001904703
10^5	-0.0001368372	0.002009071

ermittelt. Die in der Tabelle angegebene Standardabweichung $\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_y^2, \sigma)$ wurde anhand des erwartungstreuen Schätzers für die Varianz analog zu (47) berechnet. Wir beobachten hierbei eine Varianz welche in den Fällen 10^3 bis 10^5 ungefähr bei 0.00195 liegt und somit in der Abweichung des Schätzers gleichmäßig bleibt. Klarerweise ist die Varianz durch den zentralen Grenzwertsatz nach unten hin be-

6.2 Abbruchkriterium für das Faktormodell

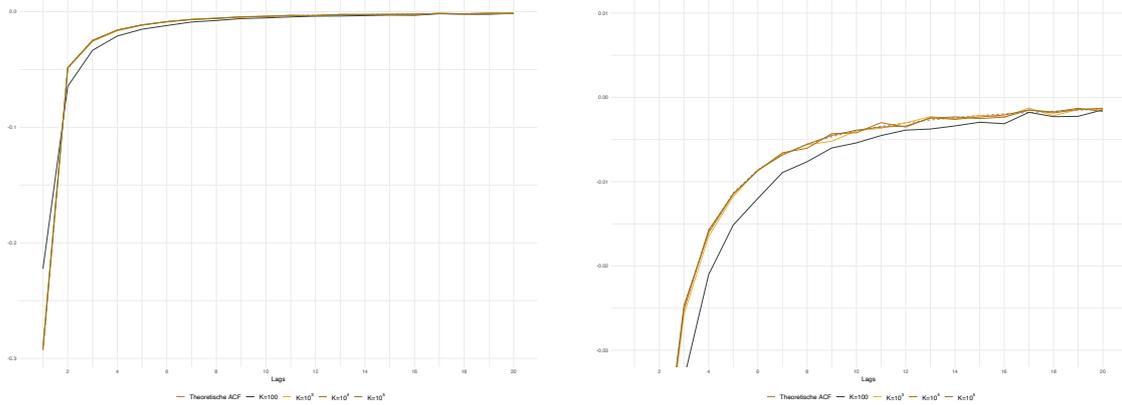


Abbildung 6.4: Links: Berechnung der mittleren Autokovarianz der Inkremente aus 1000 Monte-Carlo-Simulationen, mit den Parametern $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ und den Lags $|i - j| = 1, \dots, 20$ in verschiedenen Raumkoordinaten. Rechts: Selbe Grafik mit kleinerem Maßstab auf der y -Achse. Die theoretische Autokorrelation ist dabei durch Satz 3.2.1 gegeben.

schränkt, sodass wir ab einem gewissen Punkt mit einem höheren Abbruch der Reihe keine merkliche Verbesserung erwarten können. Eine Verbesserung ist dabei im arithmetischen Mittel zu beobachten. Je höher die Abbruchschranke K desto genauer schätzen wir die wahre Volatilität.

Vergleichen wir mittels der gleichen Daten die theoretischen Autokovarianzen der Inkremente mit den empirischen, so erhalten wir für die Lags $|i - j| = 1, \dots, 20$ im Punkt $y = 1/2$ die Ergebnisse aus Abbildung 6.4. Bezeichnen wir nun mit $\hat{\rho}_{y,i}(l)$ die geschätzte Autokorrelation des Lags l aus der i -ten Simulation und mit $\rho(l)$ die theoretische Autokorrelation nach Satz 3.2.1, so berechnet sich die mittlere Abweichung zwischen Schätzung und Theorie durch

$$\mu(\hat{\rho}_{y,i}, \rho) := \left| \frac{1}{20} \sum_{l=1}^{20} \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \hat{\rho}_{y,i}(l) - \rho(l) \right|.$$

Betrachten wir auf analoge Weise den Schätzer für die Standardabweichung so erhalten wir:

K	$\mu(\hat{\rho}_{y,i}, \rho)$	$\bar{\sigma}(\hat{\rho}_{y,i}, \rho)$
10^2	0.0009537571	0.01680895
10^3	0.00007894646	0.001210336
10^4	0.000005129928	0.0003147294
10^5	0.0000185157	0.0002416327

Die Ergebnisse dieses Kriteriums sind ab $n = 10^4$ sehr nah an der theoretischen Autokorrelation. Für ein kleineres n ist hierbei jedoch die Schranke $K = 100$ aufgrund einer verhältnismäßig größeren Abweichung in Bezug zu den anderen Schranken nicht zu empfehlen.

Wenden wir uns abschließend der Laufzeit für die jeweiligen Abbruchkriterien $K \in \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$ zu. Es ergab sich eine insgesamt und durchschnittliche Laufzeit des Modells für 1000 Monte-Carlo-Simulationen von

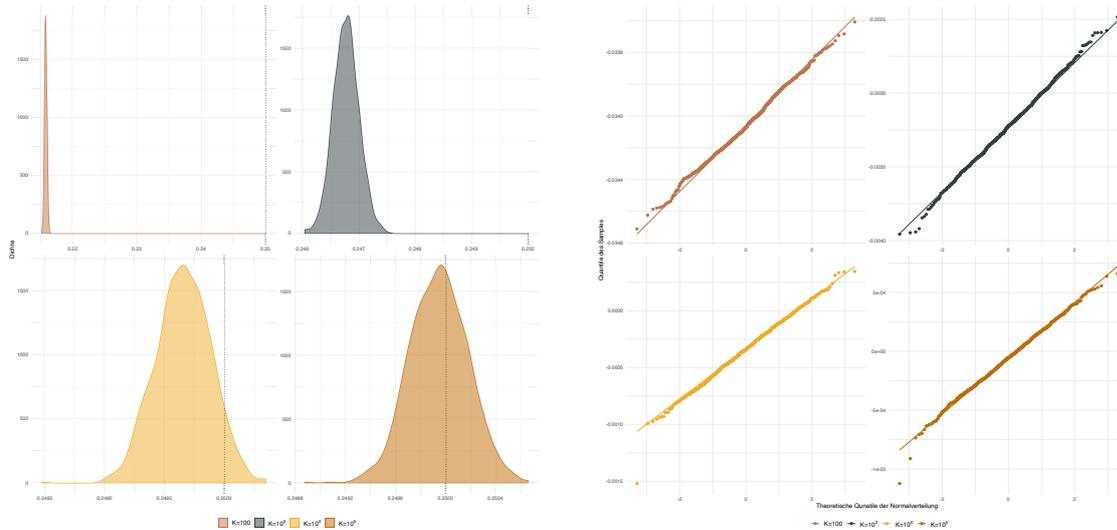


Abbildung 6.5: Links: Kerndichteschätzung über die Schätzungen von $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen über die Raumkoordinaten $y_i = i/100$ für $i = 10, \dots, 90$. Rechts: Q-Q-Plot über die Fehlerabweichung zwischen reskalierten Schätzer und dem wahren σ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen. Das zugrundeliegende SPDE-Modell wurde anhand den Parametern $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ simuliert.

K	Totale Laufzeit	\emptyset Laufzeit pro Simulation
10^2	5.98 Std.	21.53 Sek.
10^3	55.91 Std.	201.27 Sek. \approx 3.35 Min.
10^4	567.04 Std. \approx 23.63 Tage	2041.34 Sek. \approx 34.02 Min.
10^5	5959.84 Std. \approx 248.33 Tage	21455.43 Sek. \approx 5.96 Std.

Die rechenintensivsten Simulationen, $K = 10^5$, besaß dabei eine insgesamt Laufzeit von ungefähr 248 Tagen. Eine Simulation dauerte folglich durchschnittlich circa 6 Stunden, bei 64 Kernen. Im Vergleich dazu besitzt die Schranke $K = 10^4$ nur eine durchschnittliche Laufzeit von ungefähr 35 Minuten und erzielte bei den vorangegangenen Vergleichen ähnlich gute Ergebnisse. Daher ist im Allgemeinen die Partialsumme des Modells anhand der gewählten Kriterien an der Stelle $K = 10^4$ zu bevorzugen.

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

Ziel dieses letzten Kapitels ist es, die getroffenen Aussagen über die Asymptotik der vorgestellten Schätzer grafisch darzustellen und zu vergleichen. Als Grundlage hierfür werden, wie in Kapitel 6.2, dieselben 1000 Monte-Carlo-Simulationen des SPDE-Modells anhand der Parameter $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2, \sigma = 1/4$ und der Anfangsbedingung $\xi = 0$ auf dem gleichen äquidistanten Gitter in Ort und Zeit verwendet werden. Bevor wir mit der Asymptotik beginnen betrachten wir den Volatilitätsschätzer in mehreren Raumkoordinaten $\hat{\sigma}_{n,m_n}^2$. Die Abbildung 6.5 zeigt dabei eine Kerndichteschätzung über die 1000 Monte-Carlo-Simulationen mit den oben erwähnten Parametern. In Bezug auf die Analyse des Schätzers $\hat{\sigma}_y^2$ aus Kapitel 6.2 wurde in gleicher Abbildung ebenso ein Quantil-Quantil Plot gegen eine Normalverteilung dargestellt. Betrachten wir die Grenzwertsätze 4.1.3 für den Schätzer $\hat{\sigma}_y^2$ und 4.2.1 für den Schätzer $\hat{\sigma}_{n,m_n}^2$, so erwarten wir dank der schnelleren Rate für den Volatilitätsschätzer in mehreren Raumkoordinaten entsprechend eine geringere Varianz. Genauer gesagt soll die Varianz

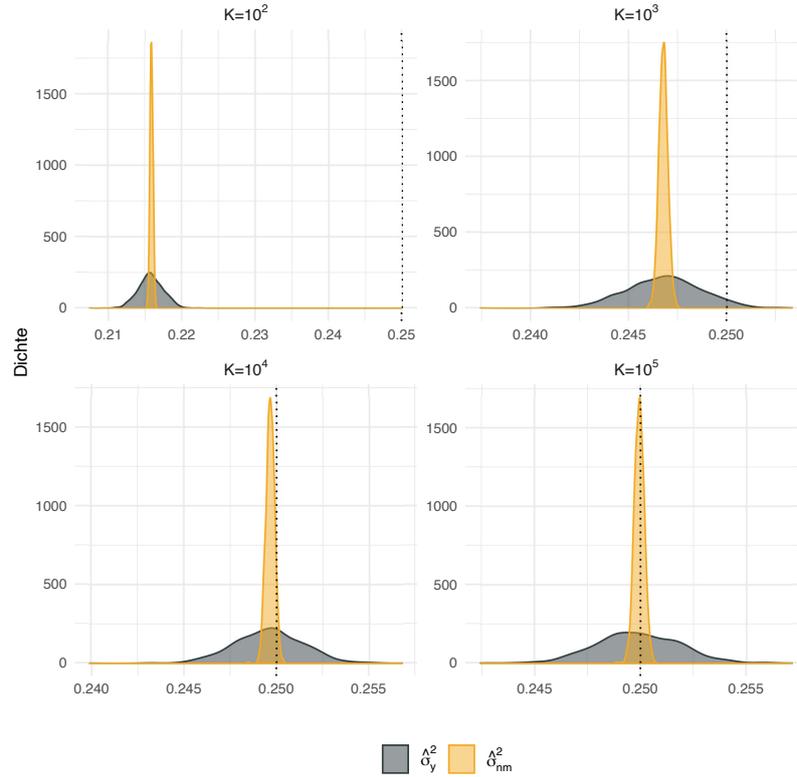


Abbildung 6.6: Dargestellt ist der direkte Vergleich der Kerndichteschätzung beider Volatilitätsschätzer $\hat{\sigma}_y^2$ und $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ über 1000 Monte-Carlo-Simulationen. Das SPDE-Modell wurde dabei anhand der Parameter $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ simuliert. Die Kerndichteschätzungen wurden zusätzlich in vier unterschiedliche Anordnungen für die Reihendarstellung einer Lösung eingeteilt. Zusätzlich ist die wahre Volatilität von $\sigma = 1/4$ eingezeichnet.

der Abweichung zwischen Schätzer und wahren Parameter um \sqrt{m} geringer sein. Die Simulation wurde dabei auf einem Gitter mit 10^4 Stützstellen in der Zeit und 100 Stützstellen im Ort simuliert. Die nachfolgende Tabelle soll die schnelle Anpassung des Schätzers an die wahre Volatilität nochmals numerisch widerspiegeln.

K	$\mu(\hat{\sigma}_{n,m}^2, \sigma^2)$	$\bar{\sigma}(\hat{\sigma}_{n,m}^2, \sigma^2)$
10^2	-0.03406022	0.0001998414
10^3	-0.003228682	0.0002268885
10^4	-0.0003413749	0.0002299184
10^5	-0.00005789596	0.0002317843

Die Kennwerte $\mu(\cdot, \cdot)$ und $\bar{\sigma}(\cdot, \cdot)$ sind dabei analog zu denen in Kapitel 6.2 zu verstehen. Die verbesserte Rate durch das Schätzen in mehreren Raumkoordinaten wird abermals bei einem direkten grafischen Vergleich zwischen beiden Schätzern ersichtlich. Siehe hierfür Abbildung 6.6. Da das in Kapitel 6.2 diskutierte Abbruchkriterium sich hauptsächlich auf die Lage der geschätzten Dichte bezog, ist auch hier erst ein Reihenabbruch ab einer Schranke von $K = 10^4$ zu empfehlen. Abschließend stellen wir für die beiden Schätzer $\hat{\sigma}_y^2$ und $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ deren Asymptotik im Sinne der beiden Sätze 4.1.3 und 4.2.1 dar. Zusätzlich untersuchen wir die standardisierte Darstellung des Schätzers $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ gegen die

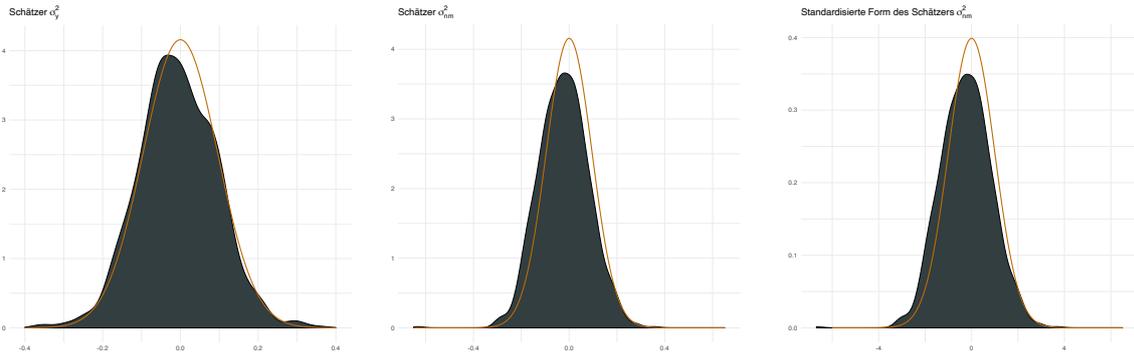


Abbildung 6.7: Alle Grafiken wurden anhand eines SPDE-Modells mit den Parametern $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ simuliert. Die Berechnung aller Simulationen wurde anhand eines Abbruchkriteriums der Reihe von $K = 10^5$ vorgenommen. Links: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\sigma}_y^2$ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen anhand der Raumkoordinate $y = 1/2$. Die farbige Linie entspricht der Dichte einer zentrierten Normalverteilung mit Varianz $\pi\Gamma\sigma^4$. Mitte: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ der 1000 Monte-Carlo-Simulationen über die Raumkoordinaten $y_i = i/100$ für $i = 5, \dots, 95$. Die farbige Linie entspricht der Dichte einer zentrierten Normalverteilung mit Varianz $\pi\Gamma\sigma^4$. Rechts: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse des standardisierten Schätzers von $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ nach Satz 4.2.3 der 1000 Monte-Carlo-Simulationen über die Raumkoordinaten $y_i = i/100$ für $i = 5, \dots, 95$. Die farbige Linie entspricht der Dichte einer Standardnormalverteilung. Für alle Kerndichteschätzungen wurde für die Bandbreite die Silverman rule-of-thumb für Gaußsche Kerndichteschätzung als Voreinstellung der R-Funktion `MASS:kde2d` gewählt.

Standardnormalverteilung entsprechend zum Satz 4.2.3. Siehe hierfür Abbildung 6.7. In allen drei Abbildungen wurde jeweils die Dichte der asymptotischen Verteilung als Linie eingezeichnet. Für die linke und mittige Abbildung entspricht dies der Dichte von $\mathcal{N}(0, \pi\Gamma\sigma^4)$, in der rechten Abbildung wurde die Dichte von $\mathcal{N}(0, 1)$ eingezeichnet. Die Darstellung der asymptotischen Anpassung im Fall des Schätzers $\hat{\sigma}_y^2$ wurde im Ortspunkt $y = 1/2$ betrachtet. Hierbei wurde über die Volatilitätsschätzung der 1000 Monte-Carlo-Simulationen anschließend eine Kerndichteschätzung durchgeführt, welche in allen drei Grafiken als graue Fläche eingezeichnet wurde. Des Weiteren wurde für die Schätzer $\hat{\sigma}_{n,m}^2$ und $\tilde{\sigma}_{n,m}^4$ eine Beschränkung von $\delta = 0.05$ zum Rand hin bei einer äquidistanten Feinheit von $|y_i - y_{i-1}| = 1/100$ für $i = 1, \dots, 100$ gewählt. Wir können bereits für eine Anzahl der Beobachtungen in der Zeit von $n = 10^4$ eine gute Anpassung an die asymptotische Verteilung in allen drei Fällen beobachten. Auch hier ist eine negative Verzerrung in der Anpassung an die asymptotische Verteilung zu erkennen.

Abschließend betrachten wir den Minimum-Kontrast-Schätzer $\hat{\eta}$ des Parameters

$$\eta = (\sigma_0^2, \varkappa), \quad \text{mit} \quad \sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2}} \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}.$$

Wie in Kapitel 5 erläutert, ist das gleichzeitige Schätzen und eindeutige Identifizieren der Parameter im Differentialoperator A_ϑ unter dem vorgestellten Ansatz nur bedingt möglich. So können beispielsweise ϑ_2 und σ geschätzt werden, sofern ϑ_1 bekannt ist. Dahingegen ist das Schätzen von ϑ_0 an dieser Stelle nicht möglich. Mit der Wahl der Parameter $\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ erhalten wir den zu schätzenden zweidimensionalen Parameter $\eta = (\sqrt{2}/16, 2) \approx (0.08838835, 2)$.

Abbildung 6.8 beschreibt dabei die Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\eta}$. Es wurde zudem eine mittlere Abweichung von

	$\mu(\hat{\eta}, \eta)$	$\bar{\sigma}(\hat{\eta}, \eta)$
σ_0^2	-0.0003534524	0.0003965346
\varkappa	-0.2201327	0.008546095

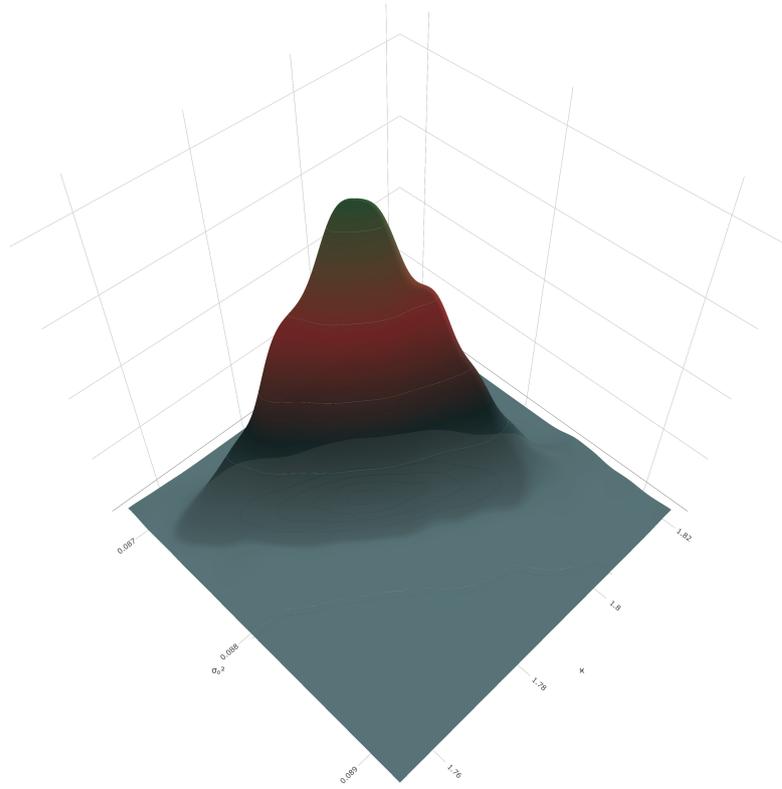


Abbildung 6.8: Kerndichteschätzung über 1000 Schätzungen des Minimum-Kontrast-Schätzers $\hat{\eta}$. Das zugrundeliegende SPDE-Modell wurde anhand der Parameter $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ simuliert. Jede Simulation wurde auf einem äquidistanten Gitter mit $n = 10^4$ Zeit- und $m = 100$ Ortspunkten bei einem $\delta = 0.05$ erstellt. Eine Interaktive Darstellung dieser Grafik kann zudem auf der Internetseite [SPDE-Simulation](#) betrachtet werden.

ermittelt. Während der Parameter σ_0^2 relativ genau geschätzt werden konnte ist die Schätzung von \varkappa stärker verzerrt. Betrachten wir den zentralen Grenzwertsatz 5.2.1 für den Schätzer $\hat{\eta}$ so erhalten wir für die in diesem Modell gewählten Parameter eine asymptotische Verteilung für die Abweichung zwischen Schätzer und wahren Parameter von

$$\begin{aligned} \sqrt{m_n n}((\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa})^T - (\sigma_0^2, \varkappa)^T) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^4 \Gamma \pi V(\eta)^{-1} U(\eta) V(\eta)^{-1}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.0454118 & 0.266523 \\ 0.2665230 & 10.917097 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

wobei U, V wie in Satz 5.2.1 definiert sind. Für den Fall, dass jeweils mindestens ein Parameter von $\vartheta_1, \vartheta_2, \sigma$ bekannt ist, lassen sich die verbleibenden Parameter eindeutig aus der Schätzung identifizieren. Abbildung 6.9 zeigt dabei die jeweiligen Kerndichteschätzungen, wenn ein Parameter als bekannt vorausgesetzt wird. Da die Parameter $\vartheta_1, \vartheta_2, \sigma$ gleichzeitig geschätzt werden, ist eine zusätzliche Verzerrung in Bezug auf das Schätzen von σ bei bekanntem Differentialoperator zu beobachten. Während

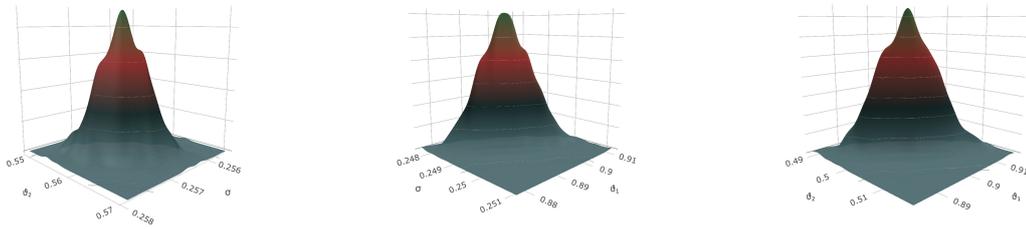


Abbildung 6.9: Alle Grafiken wurden mittels 1000 Monte-Carlo-Simulationen eines SPDE-Modells mit den Parametern $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 1/2$ und $\sigma = 1/4$ sowie $\xi = 0$ simuliert. Die Berechnung aller Simulationen wurde anhand eines Abbruchkriteriums der Reihe von $K = 10^5$ vorgenommen. Links: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\eta}$ bei bekanntem ϑ_1 . Mitte: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\eta}$ bei bekanntem ϑ_2 . Rechts: Kerndichteschätzung über die Ergebnisse von $\hat{\eta}$ bei bekanntem σ .

σ und ϑ_2 in Abbildung 6.9 bereits relativ präzise geschätzt wurde, konnte ϑ_1 nur mit einer größeren Verzerrung geschätzt werden.

Alle Details zur Simulation und Aufbereitung der Daten können in dem im Anhang beigefügten R-Code nachgelesen werden. Eine interaktive Simulation eines SPDE-Modells kann zudem auf der Seite [SPDE-Simulation](https://pbossert.shinyapps.io/SPDE_Simulation/)⁵ betrachtet werden. Die Seite wurde auf Basis von R-Shiny erstellt und kann als Code ebenfalls im Anhang nachgelesen werden.

⁵Link zur Internetseite: https://pbossert.shinyapps.io/SPDE_Simulation/

Anhang

Bildverzeichnis

Titelseite: <http://www.online.uni-marburg.de/hrz/stadt/bilder/philtra.gif>

Alle weiteren Grafiken wurden selbständig erzeugt und sind als Code im Folgekapitel [R-Code](#) zu finden.

R-Code

Es folgen die R-Codes zu den Plots dieser Arbeit. Die Codes wurde dabei zur Übersicht in verschiedene Bereiche geteilt. Der erste Bereich beinhaltet dabei Funktionen, welche sowohl zur Unterstützung der Simulationen für das SPDE-Modells als auch zur grafischen Darstellung erstellt wurden.

Hilfsfunktionen

```
1 # stochastic model SPDE with ornstein-uhlenbeck
2 library(parallel)
3 library(pbapply)
4
5 numCores <- detectCores()
6
7
8 simulateSPDEData <- function(theta0,theta1,theta2,sigma,xi,xrep,time,timeRep,numberOfSum,onlyOneY = F,oneY = NA){
9   if(theta1 == 0){
10    ek <-function(k,y) {sqrt(2)*sin(k*pi*y)}
11   } else{
12    ek <-function(k,y) {sqrt(2)*sin(k*pi*y)*exp(-theta1/(2*theta2)*y)}
13   }
14
15   lambda <- function(k){-theta0 + theta1^2/(4*theta2) + pi^2*k^2*theta2}
16   xkMatrix <- do.call(rbind,
17     mclapply(1:numberOfSum, function(k){
18       OUSPDE(k,time = time,timeRep = timeRep,sigma=sigma,lambda = lambda,xi=xi,ek=ek)
19     },mc.cores = numCores)
20   )
21
22   if(onlyOneY == T){seq = oneY}
23   else {seq = seq(0,1,1/xrep)}
24
25
26   l <- mclapply(seq, function(y){
27
28     tlist <- lapply(2:length(seq(0,time,1/timeRep)), function(t){
29       erg <- lapply(1:numberOfSum, function(k){
30         if(ek(k,y)==0 || xkMatrix[k,t]==0){0}
31         else{xkMatrix[k,t]*ek(k,y)}
32       })
33
34       sum(unlist(erg))
35     })
36   unlist(tlist)
```

6 Simulation des SPDE-Modells

```

37 },mc.cores = numCores
38 )
39 # horizontal ist Zeit, vertikal= Raum
40 z <- do.call(cbind,1)
41 x <- seq(0,1,1/xrep)
42 x0 <- xi(x)
43 z<-rbind(x0,z)
44 return(z)
45 }
46
47
48
49 OUSPDE <- function(k,time, timeRep, sigma, lambda,xi,ek){
50   timeInt <- seq(0,time,1/timeRep)[-1]
51   delta <- 1/timeRep
52   x0 <- function(k){integrate(function(y){xi(y)*ek(k,y)},0,1,subdivisions=2000,stop.on.error=F)$value}
53   scaling <- function(k){sigma*sqrt((1-exp(-2*lambda(k)*delta))/(2*lambda(k)))}
54   decay <- function(k){exp(-lambda(k)*delta)}
55   random <- rnorm(length(timeInt))
56   process <- vector(mode="numeric",length = length(random)+1)
57   process[1]= x0(k)
58   for(t in 1:length(random)){
59     process[t+1] <- process[t]*decay(k)+random[t]*scaling(k)
60   }
61
62   return(process)
63 }
64
65
66
67
68
69
70
71 maxInT <- function(z){
72   tlist <- lapply(1:dim(z)[2], function(t){
73     placeT <- z[t,]
74     maxPlaceT <- max(placeT)
75     c(maxPlaceT,seq(0,1,1/xrep)[which(placeT == maxPlaceT)])
76   })
77   mat <- do.call(rbind,tlist)
78   return(mat)
79 }
80
81
82 uniformlyHKDet <- function(time,space,xi){
83   f <- function(t){2*exp(-pi^2*t)*integrate(function(x){xi(x)*sin(pi*x)},0,1)$value}
84   l2 <- lapply(space, function(z){
85     f(time)
86   })
87   return(do.call(cbind,l2))
88 }
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98 ##### Grafische Funktionen
99 basicPlot <- function(x,y,z,alpha=0.85){
100   p <- plot_ly(x = ~x, y = ~y, z = ~z,width = 1000, height = 1000) %>%
101     add_surface(type="scatter3d",
102               # colorscale = "Cividis",
103               cauto = F,
104               cmin = min(z),
105               cmax = max(z),
106               colors = c("#4D6F73","#152626","#8C2B2B","#2C5937"),
107               contours = list(
108                 z = list(
109                   show=TRUE,
110                   usecolormap=TRUE,
111                   highlightcolor="#ff0000",
112                   project=list(z=TRUE)
113                 )
114               ),
115               showscale=FALSE,
116               lighting = list(diffuse = 3),
117               opacity = alpha
118             ) %>%
119     add_paths(type="scatter3d",x = ~x,y=~0, z = ~z[1,],

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```

120     line = list(color = 'black',width = 2),showlegend=F) %>%
121     add_paths(type="scatter3d",x = ~0.5,y=~y, z = ~z[,which(x==0.5)],
122     line = list(color = 'black',width = 2),showlegend=F)
123   return(p)
124 }
125
126 basicPlot2 <- function(x,y,z,alpha=0.95){
127   p <- plot_ly(x = ~x, y = ~y, z = ~z) %>%
128     add_surface(
129       cauto = F,
130       cmin = min(z),
131       cmax = max(z),
132       colors = c("#4D6F73","#152626","#8C2B2B","#2C5937"),
133       contours = list(
134         z = list(
135           show=TRUE,
136           usecolormap=TRUE,
137           highlightcolor="#ff0000",
138           project=list(z=TRUE)
139         )
140       ),
141       showscale=FALSE,
142       lighting = list(diffuse = 3),
143       opacity = 0.95
144     )
145   return(p)
146 }
147
148
149
150 simulateSPDEPlot <- function(theta0,theta1,theta2,sigma,xi,xrep,time,numberOfSum){
151   z <- simulateSPDEData(0,0,1,8,xi,xrep,time,100)
152   p <- basicPlot(x,y,z)
153   return(p)
154 }
155
156
157 getScene <- function(x,y,z,zAxisTitle = "Temperatur"){
158   scene = list(xaxis = list(title = "Ort"),
159     yaxis = list(title = "Zeit"),
160     zaxis = list(title = zAxisTitle),
161     # 1.Sicht: x=1.638, y= -1.828, y=1
162     # 2.Sicht: x=1.1 , y= -1.828, y=1
163     camera = list(eye = list (x = x, y = y, z = z)))
164   return(scene)
165 }
166
167
168 getScene2 <- function(x,y,z,xAxis="x-Achse",yAxis="y-Achse",zAxisTitle = ""){
169   scene = list(xaxis = list(title = xAxis),
170     yaxis = list(title = yAxis),
171     zaxis = list(title = zAxisTitle, showticklabels = F),
172     # 1.Sicht: x=1.638, y= -1.828, y=1
173     # 2.Sicht: x=1.1 , y= -1.828, y=1
174     camera = list(eye = list (x = x, y = y, z = z)))
175   return(scene)
176 }
177
178
179
180
181 ##### Auswertung der Daten
182
183 sigmaEstimator <- function(dat,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T,onlyOneY = F){
184   if (onlyOneY==T){
185     yIndex <- yPoint
186     datTime <- dat[,yIndex]
187   } else{
188     yPoint <- round(yPoint,3)
189     yIndex <- which(seq(0,1,1/xrep)>=yPoint)[1]
190     datTime <- dat[,yIndex]
191   }
192   n <- dim(dat)[1]
193   scale <- sqrt(theta2*pi)*exp(yPoint * theta1/theta2)/sqrt(n)
194   datTime1 <- datTime[-1]
195   datTime2 <- datTime[-n]
196   inc <- datTime1 - datTime2
197   if(isSigmaConstant == T){ return(sqrt(sum(inc^2)*scale/time))}
198   else {return(sum(inc^2)*scale)}
199 }
200
201
202 sigmaEstimatorY <- function(dat,yRange,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T,onlyOneY = F){

```

6 Simulation des SPDE-Modells

```

203 l <- lapply(yRange, function(y){
204   sigmaEstimator(dat,y,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant,onlyOneY)
205 })
206 estY <- unlist(l)
207 m <- length(estY)
208 return(1/m*sum(estY))
209 }
210
211
212
213
214
215 sigmaQuarticity <- function(dat,yRange,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T,onlyOneY = F){
216   m <- length(yRange)
217   scale <- theta2 * pi / (3 * m)
218
219   l <- lapply(yRange, function(y){
220     sigmaQuarticityHelp(dat,y,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant,onlyOneY)
221   })
222   return(scale * sum(unlist(l)))
223 }
224
225
226 sigmaQuarticityHelp <- function(dat,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant,onlyOneY){
227   if(onlyOneY==T){
228     yIndex <- yPoint
229     yPoint <- which(seq(0,1,1/xrep)==yPoint)
230     datTime <- dat[,yIndex]
231   } else{
232     yIndex <- which(seq(0,1,1/xrep)>=yPoint)[1]
233     print(yIndex)
234     datTime <- dat[,yIndex]
235   }
236   n <- dim(dat)[1]
237   datTime1 <- datTime[-1]
238   datTime2 <- datTime[-n]
239   inc <- datTime1 - datTime2
240   scale <- exp(2 * yPoint * theta1/theta2)
241   if(isSigmaConstant == T){ return(sqrt(sum(inc^4)*scale/time))}
242   else {return(sum(inc^4)*scale)}
243 }
244
245
246
247
248
249
250 f_sk <- function(s,k,y){s / pi * exp(-k*y)}
251
252 etaHelp_Z_j <- function(dat,y,yRange){
253   yIndex <- which(yRange>=round(y,3))[1]
254   datTime <- dat[,yIndex]
255
256   n <- dim(dat)[1]
257   datTime1 <- datTime[-1]
258   datTime2 <- datTime[-n]
259   inc <- datTime1 - datTime2
260
261   return(1/sqrt(n)*sum(inc^2))
262 }
263
264 etaEstimator <- function(dat,yRange){
265   l <- lapply(yRange, function(y){
266     etaHelp_Z_j(dat,y,yRange)
267   })
268   dat2 <- data.frame(cbind(unlist(l),yRange))
269   est <- nls(formula = V1 ~ sigma4/sqrt(pi)*exp(-kappa*yRange),start = list(sigma4 = 1, kappa = 1),data=dat2)
270   return(coef(est))
271 }
272
273
274
275 autoCorSPDE <- function(dat,yPoint,xrep,maxLag){
276   theoreticalacf <- function(lag){
277     return(-sqrt(lag)+0.5*(sqrt(lag-1)+sqrt(lag+1)))
278   }
279
280   yIndex <- which(seq(0,1,1/xrep)==yPoint)
281   n <- dim(dat)[1]
282   datTime <- dat[,yIndex]
283   datTime1 <- datTime[-1]
284   datTime2 <- datTime[-n]
285   inc <- datTime1 - datTime2

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```
286 datlags <- stats::acf(inc,plot=F,lag.max = maxLag)
287
288
289 datPlot <- data.frame(x=1:maxLag,yTheoretical=theoreticalacf(1:maxLag),yDat = datlags$acf[-1])
290
291 return(datPlot)
292 }
293
294
295
296 monteCarloSPDEsigma <- function(datList,rep,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T){
297   l <- pblapply(1:rep,function(i){
298     dat <- datList[[i]]
299     sigmaEstimator(dat = dat,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=isSigmaConstant)
300   },mc.cores = numCores)
301   return(unlist(l))
302 }
303
304 monteCarloSPDEsigmaY <- function(datList,rep,yRange,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T){
305   l <- pblapply(1:rep,function(i){
306     dat <- datList[[i]]
307     sigmaEstimatorY(dat = dat,yRange,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=isSigmaConstant)
308   })
309   return(unlist(l))
310 }
311
312 monteCarloSPDEsigmaQuarticity <- function(datList,rep,yRange,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T){
313   l <- mclapply(1:rep,function(i){
314     dat <- datList[[i]]
315     sigmaQuarticity(dat = dat,yRange,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=isSigmaConstant)
316   },mc.cores = numCores)
317   return(unlist(l))
318 }
319
320
321 monteCarloSPDEacf <- function(datList,rep,yPoint,xrep,maxLag){
322   l <- mclapply(1:rep,function(i){
323     dat <- datList[[i]]
324     autoCorSPDE(dat = dat,yPoint,xrep,maxLag)$yDat
325   },mc.cores = numCores)
326   acfData <- do.call(rbind,l)
327   return(acfData)
328 }
329
330
331 monteCarloSPDE_eta <- function(datList,yRange){
332   l <- pblapply(datList,function(dat){
333     etaEstimator(dat = dat,yRange = yRange)
334   })
335   return(do.call(rbind,l))
336 }
337
338
339 theorem31 <- function(dat,xrep){
340   n <- dim(dat)[1]
341   list <- lapply(1:(xrep+1),function(i){
342     datTime <- dat[,i]
343     datTime1 <- datTime[-1]
344     datTime2 <- datTime[-n]
345     1/sqrt(n)*sum((datTime1 - datTime2)^2)
346   })
347   return(unlist(list))
348 }
349
350 monteCarloSPDE_T31 <- function(datList,rep,xrep){
351   n <- dim(datList[[1]])[1]
352   l <- mclapply(1:rep,function(i){
353     dat <- datList[[i]]
354     theorem31(dat,xrep)
355   },mc.cores = numCores)
356   dat1 <- do.call(rbind,l)
357   dat2 <- rep(0,(xrep+1))
358   for(i in 1:(xrep+1)){
359     dat2[i] <- 1/n*sum(dat1[,i])
360   }
361   return(dat2)
362 }
363
364 f31 <- function(x,theta1,theta2,sigma){
365   exp(-x*theta1/theta2)*sigma^2/(sqrt(theta2*pi))
366 }
```

Heat-Kernel Simulationen

```

1 setwd("/Users/patrickbossert/Dropbox/Masterarbeit/Plots")
2 source("SPDE_Help_Functions.r")
3 library(plotly)
4 library(ggplot2)
5 library(grDevices)
6 ownColor2 <- c("#323E40", "#F2AB27", "#732002", "#D95323", "#023373", "#BF8A6B")
7 ownColor3 <- c("#0367A6", "#F2B705", "#8C0E03", "#2E5931", "#D9A384", "#D96262")
8
9 createData <- F
10 whichPlots <- 3 #0=Alles, 1=detHK, 2sHK, 3=general
11 xi <- function(y){400*(-y^2+y)}
12 sigma <- 0.25
13 time <- 1
14 xrep <- 10
15 timeRep <- 1000
16 numberOfSum <- 10000
17 theta0 <- 0
18 theta1 <- 0
19 theta2 <- 1
20
21 #general Plot
22 theta0G <- 0
23 theta1G <- 1
24 theta2G <- 1/2
25 sigmaG <- 0.25
26 xiG <- function(y){0}
27 xrepG <- 30
28 timeG <- 1
29 timeRepG <- 1000
30
31
32 # create Data if necessary
33 if(createData == T){
34   x <- seq(0,1,1/xrep)
35   y <- seq(0,time,1/timeRep)
36   xG <- seq(0,1,1/xrepG)
37   yG <- seq(0,timeG,1/timeRep)
38
39   if(whichPlots==1){
40     system.time(zHKDet <- simulateSPDEData(theta0 = 0, theta1 = 0, theta2 = 1, sigma = 0,
41                                           xi = xi, 100, time, timeRep, numberOfSum = numberOfSum ))
42     saveRDS(zHKDet, "Data/zHKDet")
43   }
44   if(whichPlots==2){
45     system.time(zHKStoch <- simulateSPDEData(theta0 = 0, theta1 = 0, theta2 = 1, sigma = sigma,
46                                           xi = xi, xrep, time, timeRep, numberOfSum = numberOfSum ))
47     saveRDS(zHKStoch, "Data/zHKStoch")
48   }
49   if(whichPlots == 3){
50     system.time(zGeneral <- simulateSPDEData(theta0 = theta0G, theta1 = theta1G, theta2 = theta2G, sigma = sigmaG,
51                                           xi = xiG, xrep = xrepG, time = timeG, timeRep=timeRepG, numberOfSum = 10000))
52     saveRDS(zGeneral, "Data/zGeneral")
53   }
54   if(whichPlots == 0){
55     system.time(zHKDet <- simulateSPDEData(theta0 = 0, theta1 = 0, theta2 = 1, sigma = 0,
56                                           xi = xi, xrep, time, timeRep, numberOfSum = numberOfSum ))
57     system.time(zHKStoch <- simulateSPDEData(theta0 = 0, theta1 = 0, theta2 = 1, sigma = sigma,
58                                           xi = xi, xrep, time, timeRep, numberOfSum = numberOfSum ))
59     system.time(zGeneral <- simulateSPDEData(theta0 = theta0G, theta1 = theta1G, theta2 = theta2G, sigma = sigmaG,
60                                           xi = xiG, xrep = xrepG, time = timeG, timeRep=timeRepG, numberOfSum = numberOfSum))
61     saveRDS(zHKDet, "Data/zHKDet")
62     saveRDS(zHKStoch, "Data/zHKStoch")
63     saveRDS(zGeneral, "Data/zGeneral")
64   }
65 }
66
67
68 } else{
69   x <- seq(0,1,1/xrep)
70   y <- seq(0,time,1/timeRep)
71   xG <- seq(0,1,1/xrepG)
72   yG <- seq(0,time,1/timeRep)
73   zHKDet <- readRDS("Data/zHKDet")
74   zHKStoch <- readRDS("Data/zHKStoch")
75   zGeneral <- readRDS("Data/zGeneral")
76 }
77
78
79 # Heat Kernel
80 (pHKD11 <- basicPlot(seq(0,1,1/100), y[1:which(y==0.3)], zHKDet[1:which(y==0.3)], 0.95) %>%

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```

81 layout(title = '', scene = getScene(x = 1.8, y = -1.8, z = 0.1))
82 (pHKD12 <- basicPlot(seq(0,1,1/100),y[1:which(y==0.3)],zHKDet[1:which(y==0.3)],,0.95) %>%
83 layout(title = '', scene = getScene(x = 1.8, y = 1.8, z = 0.1))
84
85
86 z2 <- uniformlyHKDet(time = y,space = x,xi)
87 (pHKD21 <- pHKD11 %>% add_surface(type="scatter3d",z = ~z2,
88                                showscale=FALSE,
89                                lighting = list(diffuse = 3),
90                                opacity = 0.7,
91                                colorscale = list(c(0,"rgb(255,255,255)"),c(1,"rgb(255,255,255)")))
92 )
93 (pHKD22 <- pHKD12 %>% add_surface(type="scatter3d",z = ~z2,
94                                showscale=FALSE,
95                                lighting = list(diffuse = 3),
96                                opacity = 0.7,
97                                colorscale = list(c(0,"rgb(255,255,255)"),c(1,"rgb(255,255,255)")))
98 )
99
100
101
102
103
104 #### Stochastisch-Heat Kernel
105
106 (pHKS1 <- basicPlot(x,y[1:which(y==0.3)],zHKStoch[1:which(y==0.3)],,alpha = 0.95) %>%
107 layout(title = '', scene = getScene(1.8, y = -1.8, z = 0.5))
108 (pHKS2 <- basicPlot(x,y[1:which(y==0.3)],zHKStoch[1:which(y==0.3)],,alpha = 0.95) %>%
109 layout(title = '', scene = getScene(1.8, y = 1.8, z = 0.5))
110
111
112
113
114 # colorscale = "earth
115 #### Generell
116 (pGeneral <- plot_ly(x = ~xG, y = ~yG, z = ~zGeneral,width = 1000, height = 1000) %>%
117 add_surface(type="scatter3d",
118             #colorscale="Viridis",
119             cauto = F,
120             cmin = min(zGeneral),
121             cmax = max(zGeneral),
122             contours = list(
123               z = list(
124                 show=F,
125                 usecolormap=TRUE,
126                 highlightcolor="#ff0000",
127                 project=list(z=TRUE)
128               )
129             ),
130             showscale=FALSE,
131             lighting = list(diffuse = 10),
132             opacity = 1
133 ) %>%
134 add_paths(type="scatter3d",x = ~xG,y=0, z = ~zGeneral[1,],
135           line = list(color = 'black',width = 2),showlegend=F))
136
137 (pGeneral1 <-pGeneral %>% layout(title = '', scene = getScene(1.8, y = -1.8, z = 0.8))
138
139
140
141
142
143
144 #### speziell Plots
145
146 (pdet <- plot_ly(x = ~seq(0,1,1/100)[1:which(seq(0,1,1/100)==0.5)], y = ~y, z = ~zHKDet[,1:which(seq(0,1,1/100)==0.5)],width = 1000,
147 height = 1000) %>%
148 add_surface(type="scatter3d",
149             #colors = c("#171E26", "#364659", "#D92B04", "#D92B04", "#D92B04", "#8C2703"),
150             #colorscale="Cividis",
151             contours = list(
152               z = list(
153                 show=TRUE,
154                 usecolormap=TRUE,
155                 highlightcolor="#ff0000",
156                 project=list(z=TRUE)
157               )
158             ),
159             showscale=FALSE,
160             lighting = list(diffuse = 3),
161             opacity = 0.9
162 ) %>%
163 add_paths(type="scatter3d",x = ~x,y=0, z = ~zHKStoch[1,],

```

6 Simulation des SPDE-Modells

```
163     line = list(color = 'black',width = 1,showlegend=F) %>%
164     add_paths(type="scatter3d",x = ~0.5,y=~y, z = ~zHKStoch[,which(x==0.5)],
165     line = list(color = "gray",width = 3),showlegend=F)
166 )
167
168 (pCompare1 <- pdet %>% layout(title = '', scene = getScene(1.8, y = -1.8, z = 0.1)))
169 (pCompare2 <- pdet %>% layout(title = '', scene = getScene(x = 1.8, y = 1.8, z = 0.1)))
170
171
172
173
174
175 #save
176 orca(pHKD11, "Plots/heatkernel11.svg")
177 orca(pHKD12, "Plots/heatkernel12.svg")
178 orca(pHKD21, "Plots/heatkernel21.svg")
179 orca(pHKD22, "Plots/heatkernel22.svg")
180
181 orca(pHKS1, "Plots/heatkernelS1.svg")
182 orca(pHKS2, "Plots/heatkernelS2.svg")
183 orca(pCompare1, "Plots/heatkernelComp1.svg")
184 orca(pCompare2, "Plots/heatkernelComp2.svg")
185
186
187
188 maxLag <- 15
189
190 yACFHK <- c(autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.1,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yTheoretical,
191 autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.1,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yDat,
192 autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.3,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yDat,
193 autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.5,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yDat,
194 autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.71,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yDat,
195 autoCorSPDE(zHKStoch,yPoint = 0.9,xrep = xrep,maxLag = maxLag)$yDat)
196 acfDatHK <- data.frame(y = yACFHK,
197 group = as.factor(rep(1:6,each=maxLag)), x = 1:maxLag)
198
199
200 (acfHKS <- ggplot(acfDatHK,aes(x=x,y=y,group=group,color=group))+
201 geom_line(data=subset(acfDatHK,group==1),linetype = "dashed")+
202 geom_line(data=subset(acfDatHK,group!=1))+
203 theme_minimal()+
204 labs(y="",x="Lags")+
205 scale_x_continuous(breaks=seq(0,maxLag,by=2))+
206 scale_color_manual(name = "", labels = c("Theoretische ACF","y=0.1", "y=0.3", "y=0.5","y=0.7","y=0.9"),
207 values = ownColor2[c(1:5,6)])+
208 theme(legend.position="bottom"))
209
210 cairo_ps(filename = "../Tex/acfHKS.eps", width = 13, height = 7,bg="transparent")
211 acfHKS
212 dev.off()
```

Monte-Carlo-Simulationen

```
1 library(svMisc)
2
3 readData <- function(simName,loop){
4   l <- list()
5   for (i in 1:loop) {
6     svMisc::progress(i,max.value = loop,progress.bar = T)
7     l <- c(l,readRDS(paste("/Volumes/INTENSO/",simName,"/SIM_",simName,"_",i,"/MCK",simName,"_",i,".rds",sep = "")))
8   }
9   return(l)
10 }
11
12
13 MC1 <- readData("10K",100)
14 MC2 <- readData("1K",200)
15 MC3 <- readData("100",200)
16 MC4 <- readData("100K",1000)
17
18 setwd("/Users/patrickbossert/Dropbox/Masterarbeit/Plots")
19 source("SPDE_Help_Functions.r")
20 library(ggplot2)
21
22 theta0G <- 0
23 theta1G <- 1
24 theta2G <- 1/2
25 sigmaG <- 0.25
26 xiG <- function(y){0}
```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```

27 xrepG <- 100
28 timeG <- 1
29 timeRepG <- 10000
30 mcRep = 1000
31 yPoint <- 0.5
32
33
34 maxLag <- 20
35
36 ownColor2 <- tinaCol2 <- c("#323E40", "#F2AB27", "#BF6B04", "#732002", "#D95323", "#2E5902", "#4C6C73",
37 "#D9B88F", "#BF9169", "#735236", "#D96262", "#D9CC11")
38 ownColor3 <- c("#BF7449", "#323E40", "#F2AB27", "#BF6B04", "#8C7D30")
39
40 # geschätztes sigma ueber alle MC Simulationen
41 ergSigma1 <- monteCarloSPDEsigma(MC3, mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, time=timeG,
42 timeRep=timeRepG, theta1=theta1G, theta2=theta2G, isSigmaConstant=T) # K=100
43 ergSigma2 <- monteCarloSPDEsigma(MC2, mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, time=timeG,
44 timeRep=timeRepG, theta1=theta1G, theta2=theta2G, isSigmaConstant=T) # K=1000
45 ergSigma3 <- monteCarloSPDEsigma(MC1, mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, time=timeG,
46 timeRep=timeRepG, theta1=theta1G, theta2=theta2G, isSigmaConstant=T) # K=10.000
47 ergSigma4 <- monteCarloSPDEsigma(MC4, mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, time=timeG,
48 timeRep=timeRepG, theta1=theta1G, theta2=theta2G, isSigmaConstant=T) # K=100.000
49
50 datSigmaDens <- data.frame(sigma = c(ergSigma1, ergSigma2, ergSigma3, ergSigma4),
51 group = factor(rep(1:4, each=mcRep)),
52 sigmaDiff = c(ergSigma1, ergSigma2, ergSigma3, ergSigma4) - sigmaG)
53 (pDensSigma <- ggplot(datSigmaDens, aes(x=sigma, group=group, fill=group, color=group)) +
54 geom_density(alpha=0.5, adjust = 1) +
55 geom_vline(xintercept = sigmaG, linetype="dotted")+
56 theme_minimal()+
57 labs(y="Dichte", x="")+
58 scale_color_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=10"^-3), expression("K=10"^-4), expression("K=10"^-5)), values =
59 ownColor3)+
60 scale_fill_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=10"^-3), expression("K=10"^-4), expression("K=10"^-5)), values =
61 ownColor3)+
62 theme(legend.position="bottom")+
63 facet_wrap(~group, scales='free', ncol=2)+
64 theme(
65 strip.background = element_blank(),
66 strip.text.x = element_blank(),
67 legend.title = element_text(size = 14),
68 legend.text = element_text(size = 11)
69 )
70 )
71
72 cairo_ps(filename = "../Tex/pDensSigma2.eps", width = 13, height = 13, bg="transparent")
73 pDensSigma
74 dev.off()
75
76
77 (qqSigma <- ggplot(datSigmaDens, aes(sample=sigmaDiff, group=group, color=group)) +
78 stat_qq()+
79 stat_qq_line()+
80 theme_minimal()+
81 labs(y="Quantile des Samples", x="Theoretische Quantile der Normalverteilung")+
82 scale_color_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=10"^-3), expression("K=10"^-4), expression("K=10"^-5)), values =
83 ownColor3)+
84 scale_fill_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=10"^-3), expression("K=10"^-4), expression("K=10"^-5)), values =
85 ownColor3)+
86 theme(legend.position="bottom")+
87 facet_wrap(~group, scales='free', ncol=2)+
88 theme(
89 strip.background = element_blank(),
90 strip.text.x = element_blank(),
91 legend.title = element_text(size = 14),
92 legend.text = element_text(size = 11)
93 )
94 )
95
96 cairo_ps(filename = "../Tex/pqqSigma.eps", width = 13, height = 13, bg="transparent")
97 qqSigma
98 dev.off()
99
100 # mittlere Abweichung
101 mean(ergSigma1 - sigmaG)
102 mean(ergSigma2 - sigmaG)
103 mean(ergSigma3 - sigmaG)
104 mean(ergSigma4 - sigmaG)
105

```

6 Simulation des SPDE-Modells

```
106 |
107 | sd(ergSigma1 - sigmaG)
108 | sd(ergSigma2 - sigmaG)
109 | sd(ergSigma3 - sigmaG)
110 | sd(ergSigma4 - sigmaG)
111 |
112 |
113 |
114 |
115 |
116 |
117 | ### geschaeztztes acf ueber alle MC Simulationen
118 | ergAcf1 <- monteCarloSPDEacf(MC3, rep=mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, maxLag=maxLag)
119 | ergAcf2 <- monteCarloSPDEacf(MC2, rep=mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, maxLag=maxLag)
120 | ergAcf3 <- monteCarloSPDEacf(MC1, rep=mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, maxLag=maxLag)
121 | ergAcf4 <- monteCarloSPDEacf(MC4, rep=mcRep, yPoint=yPoint, xrep=100, maxLag=maxLag)
122 |
123 | # mittlere acf ueber alle MC simulationen
124 | l21 <- lapply(1:maxLag, function(i){
125 |   sum(ergAcf1[,i])/mcRep
126 | })
127 | l22 <- lapply(1:maxLag, function(i){
128 |   sum(ergAcf2[,i])/mcRep
129 | })
130 | l23 <- lapply(1:maxLag, function(i){
131 |   sum(ergAcf3[,i])/mcRep
132 | })
133 | l24 <- lapply(1:maxLag, function(i){
134 |   sum(ergAcf4[,i])/mcRep
135 | })
136 | mAcf1 <- unlist(l21)
137 | mAcf2 <- unlist(l22)
138 | mAcf3 <- unlist(l23)
139 | mAcf4 <- unlist(l24)
140 |
141 |
142 |
143 | yTheoretical <- autoCorSPDE(diag(1000),0.9,xrep = 100, maxLag = maxLag)$yTheoretical
144 | acfDat <- data.frame(y = c(yTheoretical,mAcf1,mAcf2,mAcf3,mAcf4),
145 |   group = as.factor(rep(1:5,each=maxLag)), x= 1:maxLag)
146 |
147 | (mLags1 <- ggplot(acfDat, aes(x=x,y=y,group=group,color=group))+
148 |   geom_line(data=subset(acfDat, group==1), linetype = "dashed")+
149 |   geom_line(data=subset(acfDat, group!=1))+
150 |   theme_minimal()+
151 |   labs(y="", x="Lags")+
152 |   scale_x_continuous(breaks=seq(0, maxLag, by=2))+
153 |   scale_color_manual(name = "", labels = c("Theoretische ACF", "K=100", expression("K=10-3"),
154 |     expression("K=10-4"), expression("K=10-5")),
155 |     values = ownColor3)+
156 |   theme(legend.position="bottom",
157 |     legend.title = element_text(size = 14),
158 |     legend.text = element_text(size = 11)
159 | )
160 | )
161 |
162 |
163 |
164 | (mLags2 <- ggplot(acfDat, aes(x=x,y=y,group=group,color=group))+
165 |   geom_line(data=subset(acfDat, group==1), linetype = "dashed")+
166 |   geom_line(data=subset(acfDat, group!=1))+
167 |   theme_minimal()+
168 |   labs(y="", x="Lags")+
169 |   scale_x_continuous(breaks=seq(0, maxLag, by=2))+
170 |   scale_color_manual(name = "", labels = c("Theoretische ACF", "K=100", expression("K=10-3"),
171 |     expression("K=10-4"), expression("K=10-5")),
172 |     values = ownColor3)+
173 |   theme(legend.position="bottom",
174 |     legend.title = element_text(size = 14),
175 |     legend.text = element_text(size = 11)
176 |   )+
177 |   coord_cartesian(ylim=c(-0.03, 0.01)))
178 |
179 |
180 | cairo_ps(filename = "../Tex/mLags1.eps", width = 13, height = 10, bg="transparent")
181 | mLags1
182 | dev.off()
183 | cairo_ps(filename = "../Tex/mLags2.eps", width = 13, height = 10, bg="transparent")
184 | mLags2
185 | dev.off()
186 |
187 |
188 |
```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```
189 ###
190 mean(mAcf1 - yTheoretical)
191 mean(mAcf2 - yTheoretical)
192 mean(mAcf3 - yTheoretical)
193 mean(mAcf4 - yTheoretical)
194 sd(mAcf1 - yTheoretical)
195 sd(mAcf2 - yTheoretical)
196 sd(mAcf3 - yTheoretical)
197 sd(mAcf4 - yTheoretical)
198
199
200
201
202
203
204 ##### sigma ueber ort und raum
205
206 ergSigmaY1 <- monteCarloSPDEsigmaY(MC3,mcRep,yRange = seq(0.1,0.9,0.01),xrep=100,time=timeG,
207                                   timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=T) # K=100
208 ergSigmaY2 <- monteCarloSPDEsigmaY(MC2,mcRep,yRange = seq(0.1,0.9,0.01),xrep=100,time=timeG,
209                                   timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=T) # K=1000
210 ergSigmaY3 <- monteCarloSPDEsigmaY(MC1,mcRep,yRange = seq(0.1,0.9,0.01),xrep=100,time=timeG,
211                                   timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=T) # K=10.000
212
213 ergSigmaY4 <- monteCarloSPDEsigmaY(MC4,mcRep,yRange = seq(0.1,0.9,0.01),xrep=100,time=timeG,
214                                   timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=T) # K=100.000
215 saveRDS(ergSigmaY1,"Data/ergSigmaY1.RDS")
216 saveRDS(ergSigmaY2,"Data/ergSigmaY2.RDS")
217 saveRDS(ergSigmaY3,"Data/ergSigmaY3.RDS")
218 saveRDS(ergSigmaY4,"Data/ergSigmaY4.RDS")
219 ergSigmaY1 <- readRDS("Data/ergSigmaY1.RDS")
220 ergSigmaY2 <- readRDS("Data/ergSigmaY2.RDS")
221 ergSigmaY3 <- readRDS("Data/ergSigmaY3.RDS")
222 ergSigmaY4 <- readRDS("Data/ergSigmaY4.RDS")
223 datSigmaDensY <- data.frame(sigma = c(ergSigmaY1,ergSigmaY2,ergSigmaY3,ergSigmaY4),
224                               group = factor(rep(1:4,each=mcRep)),
225                               sigmaDiff = c(ergSigmaY1,ergSigmaY2,ergSigmaY3,ergSigmaY4)-sigmaG)
226 (pDensSigmaY <- ggplot(datSigmaDensY, aes(x=sigma,group=group,fill=group,color=group)) +
227   geom_density(alpha=0.5,adjust = 1) +
228   geom_vline(xintercept = sigmaG,linetype="dotted")+
229   theme_minimal()+
230   labs(y="Dichte",x="")+
231   scale_color_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=103"), expression("K=104"), expression("K=105")),values =
232     ownColor3)+
233   scale_fill_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=103"), expression("K=104"), expression("K=105")),values =
234     ownColor3)+
235   theme(legend.position="bottom")+
236   facet_wrap(~group, scales='free',ncol=2)+
237   theme(
238     strip.background = element_blank(),
239     strip.text.x = element_blank(),
240     legend.title = element_text(size = 14),
241     legend.text = element_text(size = 11)
242   )
243 )
244 cairo_ps(filename = "../Tex/pDensSigma2Y.eps", width = 13, height = 13,bg="transparent")
245 pDensSigmaY
246 dev.off()
247
248 mean(ergSigmaY1 - sigmaG)
249 mean(ergSigmaY2 - sigmaG)
250 mean(ergSigmaY3 - sigmaG)
251 mean(ergSigmaY4 - sigmaG)
252 sd(ergSigmaY1 - sigmaG)
253 sd(ergSigmaY2 - sigmaG)
254 sd(ergSigmaY3 - sigmaG)
255 sd(ergSigmaY4 - sigmaG)
256
257 (qqSigmaY <- ggplot(datSigmaDensY, aes(sample=sigmaDiff,group=group,color=group)) +
258   stat_qq()+
259   stat_qq_line()+
260   theme_minimal()+
261   labs(y="Quantile des Samples",x="Theoretische Qunatile der Normalverteilung")+
262   scale_color_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=103"), expression("K=104"), expression("K=105")),values =
263     ownColor3)+
264   scale_fill_manual(name = "", labels = c("K=100", expression("K=103"), expression("K=104"), expression("K=105")),values =
265     ownColor3)+
266   theme(legend.position="bottom")+
267   facet_wrap(~group, scales='free',ncol=2)+
268   theme(
269     strip.background = element_blank(),
270     strip.text.x = element_blank(),
271     legend.title = element_text(size = 14),
```

6 Simulation des SPDE-Modells

```

268     legend.text = element_text(size = 11)
269   )
270 )
271 cairo_ps(filename = "../Tex/pqqSigmaY.eps", width = 13, height = 13,bg="transparent")
272 qqSigmaY
273 dev.off()
274
275
276
277 ### Vergleich ein ort mehrere Orte
278
279 datCompare <- data.frame(sigma = c(datSigmaDens$sigma,datSigmaDensY$sigma),
280                             group = as.factor(rep(rep(2:5,each=1000),2)),
281                             group2 = as.factor(rep(1:2,each=length(datSigmaDens$sigma))))
282
283
284
285
286 (pDensSigmaCompare <- ggplot(datCompare, aes(x=sigma,group=group2,fill=group2,color=group2)) +
287   geom_density(alpha=0.5,adjust = 1) +
288   geom_vline(xintercept = sigmaG,linetype="dotted")+
289   theme_minimal()+
290   labs(y="Dichte",x="")+
291   facet_wrap("group", scales='free',ncol=2,labeller = label_bquote("K=10" ^ .(as.numeric(group) + 1)))+
292   scale_color_manual(name = "", labels = c(expression(hat(sigma)[y]^2),expression(hat(sigma)[nm]^2)),
293                     values = ownColor3[c(2,3)])+
294   scale_fill_manual(name = "", labels = c(c(expression(hat(sigma)[y]^2),expression(hat(sigma)[nm]^2))),
295                    values = ownColor3[c(2,3)])+
296   theme(legend.position="bottom")+
297   theme(
298     legend.title = element_text(size = 14),
299     legend.text = element_text(size = 10),
300     strip.text.x = element_text(size = 10 )
301     # strip.text.x = element_blank()
302   )
303 )
304
305 cairo_ps(filename = "../Tex/pDensCompare.eps", bg="transparent")
306 pDensSigmaCompare
307 dev.off()
308
309
310
311 ##### Asymptotik
312 source("SPDE_Help_Functions.r")
313 library(ggplot2)
314 library(reshape2)
315 theta0G <- 0
316 theta1G <- 1
317 theta2G <- 1/2
318 sigmaG <- 0.25
319 xiG <- function(y){0}
320 xrepG <- 100
321 timeG <- 1
322 timeRepG <- 10000
323 mcRep = 1000
324 yPoint <- 0.5
325
326 x1 <- sqrt(timeRepG)*(monteCarloSPDEsigma(MC4,mcRep,yPoint=yPoint,xrep=xrepG,time=timeG,
327                                         timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=F)-sigmaG^2)
328
329 datAsym1 <- data.frame(x=x1,
330                       xNorm = seq(-0.4,0.4,length.out = 1000),
331                       yNorm = dnorm(seq(-0.4,0.4,length.out = 1000),0,sqrt(pi*sigmaG^4*0.7504116)))
332 (gg1 <- ggplot(datAsym1)+
333   geom_density(aes(x=x),fill="#323E40")+
334   geom_line(aes(x=xNorm,y=yNorm),col="#BF6B04",size=0.7)+
335   theme_minimal()+
336   labs(x="",y="", title = expression("Schaetzer" ^ sigma[y] ^ 2))
337 )
338
339
340 yRange = seq(0.05,0.95,0.01)
341 x2 <- sqrt(length(yRange)*timeRepG)*(monteCarloSPDEsigmaY(MC4,mcRep,yRange = yRange,xrep=100,time=timeG,
342                                                         timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,isSigmaConstant=F)-sigmaG^2)
343
344 #save(x2,"Data/ergYRangeMC.RDS")
345 #x2 <- readRDS("Data/ergYRange.RDS")
346 datAsym2 <- data.frame(x=x2,
347                       xNorm = seq(-0.65,0.65,length.out = 1000),
348                       yNorm = dnorm(seq(-0.65,0.65,length.out = 1000),0,sqrt(pi*sigmaG^4*0.7504116)))
349 (gg2 <- ggplot(datAsym2)+
350   geom_density(aes(x=x),fill="#323E40")+

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```
351 geom_line(aes(x=xNorm,y=yNorm),col="#BF6B04",size=0.7)+
352 theme_minimal()+
353 labs(x="",y="",title = expression("Schaezter" ~ sigma[nm] ^ 2))
354 )
355
356 x3 <- x2*1/sqrt(pi*0.7504116*monteCarloSPDEsigmaQuarticity(MC4,mcRep,yRange = yRange,xrep=100,time=timeG,
357 timeRep=timeRepG,theta1=theta1G,theta2=theta2G,
358 isSigmaConstant=F))
359
360 saveRDS(x3,"Data/ergSND.RDS")
361
362 x3 <- readRDS("Data/ergSND.RDS")
363 datAsym3 <- data.frame(x=x3,
364 xNorm = seq(-6,6.5,length.out = 1000),
365 yNorm = dnorm(seq(-6,6.5,length.out = 1000),0,1))
366 (gg3 <- ggplot(datAsym3)+
367 geom_density(aes(x=x),fill="#323E40")+
368 geom_line(aes(x=xNorm,y=yNorm),col="#BF6B04",size=0.7)+
369 theme_minimal()+
370 labs(x="",y="",title = expression("Standardisierte Form des Schaezters" ~ sigma[nm] ^ 2))
371 )
372
373
374
375 cairo_ps(filename = "../Tex/pAsymp1.eps", bg="transparent")
376 gg1
377 dev.off()
378
379 cairo_ps(filename = "../Tex/pAsymp2.eps", bg="transparent")
380 gg2
381 dev.off()
382
383 cairo_ps(filename = "../Tex/pAsymp3.eps", bg="transparent")
384 gg3
385 dev.off()
```

Plots zu Kapitel 5

```
1 ### Minimum-Kontrast-Schaezter
2
3 setwd("/Users/patrickbossert/Dropbox/Masterarbeit/Plots")
4 source("SPDE_Help_Functions.r")
5 library(MASS)
6 library(plotly)
7 library(mvtnorm)
8 library(pbapply)
9
10 theta0G <- 0
11 theta1G <- 1
12 theta2G <- 1/2
13 sigmaG <- 0.25
14 xiG <- function(y){0}
15 xrepG <- 100
16 timeG <- 1
17 timeRepG <- 10000
18 mcRep = 1000
19 yRange <- seq(0.05,0.95,1/100)
20 delta <- 0.05
21 Theta1 <- sigmaG^2/sqrt(theta2G)
22 Theta2 <- theta1G/theta2G
23 Sys.setenv('PLOTLY_MATHJAX_PATH' = '$/Users/patrickbossert/MathJax-master/es5')
24
25 dat <- monteCarloSPDE_eta(MC4,yRange)
26 dat <- as.data.frame(dat)
27 mean(dat$sigma4-Theta1)
28 sd(dat$sigma4-Theta1)
29 mean(dat$kappa-Theta2)
30 sd(dat$kappa-Theta2)
31
32
33
34
35 #vartheta 1 bekannt
36 # kappa = theta2
37 # sigma4 = sigma^2
38 dat1 <- dat
39 dat1$kappa <- theta1G/dat$kappa
40 dat1$sigma4 <- sqrt(dat$sigma4*sqrt(dat1$kappa))
41 zEst1 <- with(dat1, MASS::kde2d(sigma4, kappa,n=1000))
```

6 Simulation des SPDE-Modells

```

42 | (k5_theta1 <- basicPlot2(zEst1$x, zEst1$y, zEst1$z, 0.95) %>%
43 |   layout(title = '', scene = getScene2(x = 1.6, y = 1.6, z = 0.4, xAxis = "\U03C3", yAxis = "\U03D1\U2082")) %>%
44 |   config(mathjax = 'cdn')
45 | )
46 |
47 | #vartheta 2 bekannt
48 | # kappa = theta1
49 | # sigma4 = sigma^2
50 | dat2 <- dat
51 | dat2$kappa <- dat$kappa*theta2G
52 | dat2$sigma4 <- sqrt(dat$sigma4*sqrt(theta2G))
53 | zEst2 <- with(dat2, MASS::kde2d(sigma4, kappa, n=1000))
54 | (k5_theta2 <- basicPlot2(zEst2$x, zEst2$y, zEst2$z, 0.95) %>%
55 |   layout(title = '', scene = getScene2(x = 1.65, y = -1.65, z = 0.4, xAxis = "\U03C3", yAxis = "\U03D1\U2081"))
56 | )
57 |
58 |
59 | #sigma bekannt
60 | # kappa = theta1
61 | # sigma4 = theta2
62 | dat3 <- dat
63 | dat3$sigma4 <- (sigmaG^2/dat$sigma4)^2
64 | dat3$kappa <- dat$kappa*dat3$sigma4
65 | zEst3 <- with(dat3, MASS::kde2d(sigma4, kappa, n=1000))
66 | (k5_sigma <- basicPlot2(zEst3$x, zEst3$y, zEst3$z, 0.95) %>%
67 |   layout(title = '', scene = getScene2(x = 1.55, y = -1.55, z = 0.4, xAxis = "\U03D1\U2082", yAxis = "\U03D1\U2081"))
68 | )
69 |
70 |
71 | # nichts bekannt
72 | dat4 <- dat
73 | zEst4 <- with(dat4, MASS::kde2d(sigma4, kappa, n=1000))
74 | (k5_nothing <- basicPlot2(zEst4$x, zEst4$y, zEst4$z, 0.95) %>%
75 |   layout(title = '', scene = getScene2(x = 1.65, y = -1.65, z = 0.4, xAxis = "\U03C3\U2080\U00B2", yAxis = "\U03F0"))
76 | )
77 |
78 |
79 |
80 |
81 | orca(k5_theta1, "Plots/K5_1.svg")
82 | orca(k5_theta2, "Plots/K5_2.svg")
83 | orca(k5_sigma, "Plots/K5_3.svg")
84 | orca(k5_nothing, "Plots/K5_4.svg")
85 |
86 |
87 |
88 |
89 |
90 | # Asymptotik
91 | # Daten
92 | datAsymp <- dat
93 | datAsymp$sigma4 <- (dat$sigma4 - Theta1)*sqrt(length(yRange)*timeRepG)
94 | datAsymp$kappa <- (dat$kappa - Theta2)*sqrt(length(yRange)*timeRepG)
95 | zAsymp_dat <- with(datAsymp, MASS::kde2d(sigma4, kappa, n=1000))
96 |
97 | # Normal Distribution
98 | # Kappa = Theta2
99 | f11 <- function(x){exp(-4*Theta2*x)}
100 | f12 <- function(x){-exp(-4*Theta2*x)*x*Theta1}
101 | f22 <- function(x){exp(4*Theta2*x)*x^2*Theta1^2}
102 | a11 <- integrate(f11,delta,1-delta)$value
103 | a12 <- integrate(f12,delta,1-delta)$value
104 | a21 <- a12
105 | a22 <- integrate(f22,delta,1-delta)$value
106 | U <- matrix(c(a11,a12,a21,a22),nrow = 2,byrow = T)
107 |
108 | g11 <- function(x){exp(-2*Theta2*x)}
109 | g12 <- function(x){-exp(-2*Theta2*x)*x*Theta1}
110 | g22 <- function(x){exp(2*Theta2*x)*x^2*Theta1^2}
111 | b11 <- integrate(g11,delta,1-delta)$value
112 | b12 <- integrate(g12,delta,1-delta)$value
113 | b21 <- b12
114 | b22 <- integrate(g22,delta,1-delta)$value
115 | V <- matrix(c(b11,b12,b21,b22),nrow = 2,byrow = T)
116 |
117 | vAsymp <- pi* Theta1^2 * 0.7504116 * solve(V) %*% U %*% solve(V)
118 | xAsymp <- seq(-1.5,1.5,1/100)
119 | yAsymp <- seq(-5,5,1/100)
120 | l1 <- pblapply(xAsymp, function(x){
121 |   l2 <- lapply(yAsymp, function(y){
122 |     dmnorm(c(x,y),c(0,0),sqrt(vAsymp))
123 |   })
124 |   unlist(l2)

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```
125 })
126 zAsymp <- do.call(cbind, l1)
```

Sonstige Simulationen

```
1
2 ##### Ornstein Uhlenbeck und ek
3
4 ekG <- function(k,y) {sqrt(2)*sin(k*pi*y)*exp(-theta1G/(2*theta2G)*y)}
5 lambdaG <- function(k){-theta0G + theta1G^2/(4*theta2G) + pi^2*k^2*theta2G}
6
7
8 OU1 <- OUSPDE(1,time=timeG, timeRep=timeRepG, sigma=sigmaG, lambda=lambdaG,xi=xiG,ek=ekG)
9 OU2 <- OUSPDE(5,time=timeG, timeRep=timeRepG, sigma=sigmaG, lambda=lambdaG,xi=xiG,ek=ekG)
10 OU3 <- OUSPDE(10,time=timeG, timeRep=timeRepG, sigma=sigmaG, lambda=lambdaG,xi=xiG,ek=ekG)
11 OU4 <- OUSPDE(100,time=timeG, timeRep=timeRepG, sigma=sigmaG, lambda=lambdaG,xi=xiG,ek=ekG)
12 datOU <- data.frame(x=rep(seq(0,timeG,1/timeRepG),4),y=c(OU1,OU2,OU3,OU4),group=as.factor(rep(1:4,each=length(OU1))))
13
14 (pOU <- ggplot(datOU,aes(x=x,y=y,group=group,color=group))+geom_line()+
15   theme_minimal()+
16   labs(y="",x="")+
17   scale_color_manual(name = "", labels = expression(lambda[1],lambda[5],lambda[10],lambda[100]),
18     values = ownColor2[c(2,1,4,3)])+
19   theme(legend.position="bottom")
20 )
21
22
23 xG2 <- seq(0,1,1/1000)
24 datEK <- data.frame(x=rep(xG2,4),y=c(ekG(1,xG2),ekG(5,xG2),ekG(10,xG2),ekG(100,xG2)),group=as.factor(rep(1:4,each=length(xG2))))
25 (pEK <- ggplot(datEK,aes(x=x,y=y,group=group,color=group))+
26   geom_line(data=subset(datEK,group==4),alpha=0.25)+
27   geom_line(data=subset(datEK,group!=4))+
28   theme_minimal()+
29   labs(y="",x="")+
30   scale_color_manual(name = "", labels = expression(e[1],e[5],e[10],e[100]),values=ownColor2)+
31   theme(legend.position="bottom")
32 )
33
34 cairo_ps(filename = "../Tex/OU.eps", width = 13, height = 10,bg="transparent")
35 pOU
36 dev.off()
37
38 cairo_ps(filename = "../Tex/EK.eps", width = 13, height = 10,bg="transparent")
39 pEK
40 dev.off()
41
42
43
44
45 # Schaubild zu Satz 3.1
46
47 y1 <- monteCarloSPDE_T31(MC1,mcRep,10)[-c(1,11)]
48 x1 <- seq(0,1,1/10)[-c(1,11)]
49 x2 <- seq(0,1,1/1000)
50 y2 <- f31(x2,1,0.5,0.25)
51
52 dat31_1 <- data.frame(x=x1,y=y1)
53 dat31_2 <- data.frame(x=x2,y=y2)
54 (plot31 <- ggplot(dat31_1,aes(x=x,y=y,color=y))+
55   geom_point()+
56   geom_line(data = dat31_2,aes(x=x,y=y))+
57   theme_minimal()+
58   theme(legend.position = "none")+
59   labs(x="",y="")+
60   scale_x_continuous(breaks=seq(0,1,1/10))
61 )
62 cairo_ps(filename = "../Tex/plot31.eps", width = 13, height = 10,bg="transparent")
63 plot31
64 dev.off()
65
66
67
68 # Kapitel 6 Cover
69 library(rayshader)
70
71 createData <- F
72 theta0G <- 0
73 theta1G <- 1
74 theta2G <- 1/2
```

6 Simulation des SPDE-Modells

```
75 sigmaG <- 0.25
76 xiG <- function(y){0}
77 xrepG <- 1000
78 timeG <- 1
79 timeRepG <- 1000
80 if(createData == T){
81   system.time(dat <- simulateSPDEData(theta0 = theta0G,theta1 = theta1G,theta2 = theta2G,sigma = sigmaG,
82                                     xi = xiG,xrep = xrepG,time = timeG,timeRep=timeRepG,numberOfSum = 1000))
83   dat <- dat * 100000
84 } else {
85   dat <- readRDS("Data/zGeneral") * 10000
86 }
87 dat <- dat * 2
88 #dat <- dat[c(1:150),]
89
90 dat %>%
91   sphere_shade(zscale = 10, texture = "imhof1") %>%
92   plot_3d(dat, zscale = 50, fov = 80, theta = 45, phi = 15,
93          windowsize = c(1000, 800), zoom = 0.7,
94          water = F, waterdepth = 0, wateralpha = 0.5, watercolor = "lightblue",
95          waterlinecolor = "white", waterlinealpha = 0.5,solid=F)
96
97 render_highquality(lightdirection = 100, lightaltitude = 30, clamp_value = 10,
98                   samples=300, clear=TRUE,print_scene_info=TRUE,camera_location = c(-174.65015365918,142.601262011658,174.6501596372))
99
100 #render_depth(focus = 0.6, focallength = 200, clear = TRUE)
101
102
103 (gg = ggplot(datSigmaDens) +
104   stat_density_2d(aes(x = sigma, y = sigmaDiff, fill = stat(nlevel)),
105                  geom = "polygon", n = 100, bins = 10, contour = TRUE) +
106   facet_wrap(group~.) +
107   scale_fill_viridis_c(option = "A"))
108 plot_gg(gg, width = 5, height = 5, multicore = TRUE, scale = 250,
109        zoom = 0.7, theta = 10, phi = 30, windowsize = c(800, 800))
```

Interaktive Simulation

```
1 library(shiny)
2 library(plotly)
3 library(parallel)
4 numCores <- detectCores()
5 dat <- data.frame()
6
7 basicPlot <- function(x,y,z,alpha=0.85){
8   p <- plot_ly(x = ~x, y = ~y, z = ~z,width = 1000, height = 1000) %>%
9     add_surface(type="scatter3d",
10              colorscale = "Cividis",
11              cauto = F,
12              cmin = min(z),
13              cmax = max(z),
14              #colors = c("#4D6F73", "#152626", "#8C2B2B", "#2C5937"),
15              contours = list(
16                z = list(
17                  show=TRUE,
18                  usecolormap=TRUE,
19                  highlightcolor="#ff0000",
20                  project=list(z=TRUE)
21                )
22              ),
23              showscale=FALSE,
24              lighting = list(diffuse = 3),
25              opacity = alpha
26            ) %>%
27     add_paths(type="scatter3d",x = ~x,y=~0, z = ~z[,1],
28             line = list(color = 'black',width = 2),showlegend=F) %>%
29     add_paths(type="scatter3d",x = ~0.5,y=~y, z = ~z[,which(x==0.5)],
30             line = list(color = 'black',width = 2),showlegend=F)
31   return(p)
32 }
33
34 basicPlot2 <- function(x,y,z,alpha=0.95){
35   p <- plot_ly(x = ~x, y = ~y, z = ~z) %>%
36     add_surface(
37       cauto = F,
38       cmin = min(z),
39       cmax = max(z),
40       colors = c("#4D6F73", "#152626", "#8C2B2B", "#2C5937"),
41       contours = list(
```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```

42     z = list(
43       show=TRUE,
44       usecolormap=TRUE,
45       highlightcolor="#ff0000",
46       project=list(z=TRUE)
47     )
48   ),
49   showscale=FALSE,
50   lighting = list(diffuse = 3),
51   opacity = 0.95
52 )
53 return(p)
54 }
55
56 getScene <- function(x,y,z,zAxisTitle = ""){
57   scene = list(xaxis = list(title = "Ort"),
58             yaxis = list(title = "Zeit"),
59             zaxis = list(title = zAxisTitle),
60             # 1.Sicht: x=1.638, y= -1.828, y=1
61             # 2.Sicht: x=1.1 , y= -1.828, y=1
62             camera = list(eye = list (x = x, y = y, z = z)))
63   return(scene)
64 }
65
66
67 getScene2 <- function(x,y,z,xAxis="x-Achse",yAxis="y-Achse",zAxisTitle = ""){
68   scene = list(xaxis = list(title = xAxis),
69             yaxis = list(title = yAxis),
70             zaxis = list(title = zAxisTitle, showticklabels = F),
71             # 1.Sicht: x=1.638, y= -1.828, y=1
72             # 2.Sicht: x=1.1 , y= -1.828, y=1
73             camera = list(eye = list (x = x, y = y, z = z)))
74   return(scene)
75 }
76
77
78 simulateSPDEData <- function(theta0,theta1,theta2,sigma,xi,xrep,time,timeRep,numberOfSum,onlyOneY = F,oneY = NA){
79   if(theta1 == 0){
80     ek <-function(k,y) {sqrt(2)*sin(k*pi*y)}
81   } else{
82     ek <-function(k,y) {sqrt(2)*sin(k*pi*y)*exp(-theta1/(2*theta2)*y)}
83   }
84
85   lambda <- function(k){-theta0 + theta1^2/(4*theta2) + pi^2*k^2*theta2}
86   xkMatrix <- do.call(rbind,
87     lapply(1:numberOfSum, function(k){
88       OUSPDE(k,time = time,timeRep = timeRep,sigma=sigma,lambda = lambda,xi=xi,ek=ek)
89     })
90 )
91
92   if(onlyOneY == T){seq = oneY}
93   else {seq = seq(0,1,1/xrep)}
94
95
96   l <- lapply(seq, function(y){
97
98     tlist <- lapply(2:length(seq(0,time,1/timeRep)), function(t){
99       erg <- lapply(1:numberOfSum, function(k){
100         if(ek(k,y)==0 || xkMatrix[k,t]==0){0}
101         else{xkMatrix[k,t]*ek(k,y)}
102       })
103
104       sum(unlist(erg))
105     })
106     incProgress(1/xrep, detail = paste("Task: ", y))
107     unlist(tlist)
108   })
109
110   ## fuege die einzelnen Vektoren als Spalten hintereinander, also horizontal ist Zeit, vertikal= Raum
111   z <- do.call(cbind,l)
112   x <- seq(0,1,1/xrep)
113   x0 <- xi(x)
114   z<-rbind(x0,z)
115   return(z)
116 }
117
118
119
120 OUSPDE <- function(k,time, timeRep, sigma, lambda,xi,ek){
121   timeInt <- seq(0,time,1/timeRep)[-1]
122   delta <- 1/timeRep
123   x0 <- function(k){integrate(function(y){xi(y)*ek(k,y)},0,1,subdivisions=2000,stop.on.error=F)$value}
124   scaling <- function(k){sigma*sqrt((1-exp(-2*lambda(k)*delta))/(2*lambda(k)))}

```

6 Simulation des SPDE-Modells

```

125 decay <- function(k){exp(-lambda(k)*delta)}
126 random <- rnorm(length(timeInt))
127 process <- vector(mode="numeric",length = length(random)+1)
128 process[1]= x0(k)
129 for(t in 1:length(random)){
130   process[t+1] <- process[t]*decay(k)+random[t]*scaling(k)
131 }
132
133 return(process)
134 }
135
136
137
138
139
140 sigmaEstimator <- function(dat,yPoint,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T,onlyOneY = F){
141   if(onlyOneY==T){
142     yIndex <- yPoint
143     datTime <- dat[,yIndex]}
144   else{
145     yPoint <- round(yPoint,3)
146     yIndex <- which(seq(0,1,1/xrep)>=yPoint)[1]
147     datTime <- dat[,yIndex]
148   }
149   n <- dim(dat)[1]
150   scale <- sqrt(theta2*pi)*exp(yPoint * theta1/theta2)/sqrt(n)
151   datTime1 <- datTime[-1]
152   datTime2 <- datTime[-n]
153   inc <- datTime1 - datTime2
154   if(isSigmaConstant == T){ return(sqrt(sum(inc^2)*scale/time))}
155   else {return(sum(inc^2)*scale)}
156 }
157
158
159 sigmaEstimatorY <- function(dat,yRange,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant=T,onlyOneY = F){
160   l <- lapply(yRange, function(y){
161     sigmaEstimator(dat,y,xrep,time,timeRep,theta1,theta2,isSigmaConstant,onlyOneY)
162   })
163   estY <- unlist(l)
164   m <- length(estY)
165   return(1/m*sum(estY))
166 }
167
168
169 f_sk <- function(s,k,y){s / pi * exp(-k*y)}
170
171 etaHelp_Z_j <- function(dat,y,yRange){
172   yIndex <- which(yRange>=round(y,3))[1]
173   datTime <- dat[,yIndex]
174
175   n <- dim(dat)[1]
176   datTime1 <- datTime[-1]
177   datTime2 <- datTime[-n]
178   inc <- datTime1 - datTime2
179
180   return(1/sqrt(n)*sum(inc^2))
181 }
182
183 etaEstimator <- function(dat,yRange){
184   l <- lapply(yRange, function(y){
185     etaHelp_Z_j(dat,y,yRange)
186   })
187   dat2 <- data.frame(cbind(unlist(l),yRange))
188   est <- nls(formula = V1 ~ sigma4/sqrt(pi)*exp(-kappa*yRange),start = list(sigma4 = 1, kappa = 1),data=dat2)
189   return(coef(est))
190 }
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207

```

6.3 Schätzer und Grenzwertsätze

```

208
209
210 # Define UI for application that draws a histogram
211 ui <- fluidPage(
212   titlePanel("Simulation of stochastic partial differential equations (SPDE's)",
213
214
215   sidebarLayout(
216
217     sidebarPanel(
218       helpText(withMathJax("Choose parameter for the following SPDE-model: 
$$X_t = \text{Big}(\frac{\partial^2 X_t(y)}{\partial y^2} + \frac{\vartheta_1}{\partial y} X_t(y) + \vartheta_0 X_t(y)) + \sigma E_t(y)$$
"),
219       numericInput(inputId = "theta0", label = " $\vartheta_0$ ", value = 0),
220       numericInput(inputId = "theta1", label = " $\vartheta_1$ ", value = 0.5),
221       numericInput(inputId = "theta2", label = " $\vartheta_2$ ", value = 1, min = 0.1),
222       numericInput(inputId = "sigma", label = " $\sigma$ ", value = 0.25, min = 0.0001),
223       helpText(withMathJax("Choose initial condition  $\xi(x)$  for the SPDE.
224         Make sure the function satisfies the boundary condition  $\xi(0) = \xi(1) = 0$ .
225         Also choose  $x$  as the argument for  $\xi(x)$  and use mathematical operators such
226         as  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  between each term. Default value is  $\xi(x) = 0$ .")),
227       textInput("xi", label = "Start condition  $\xi(x)$ "),
228       helpText("The following setup is for managing the rendering as same as managing the runtime of the computations.
229         With the first slider one can determine the time horizon. While the second slider speeds up the runtime.
230         Since the SPDE-Model is simulated through a Fourier-series  $X_t(y) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K x_k(t) e_k(y)$ 
231         where  $x_k$  are Ornstein-Uhlenbeck-processes and  $e_k$  are suitable eigenfunctions,
232         one can manage the termination of the series. Note that a small choice for  $K$  can affect a
233         negative bias in the calculation. In fact, a choice of  $K=10^4$  is recommended for precise estimations."),
234       sliderInput(inputId = "yPointSlider", withMathJax("Number of points in time shown"), 10, 1000, 1000),
235       sliderInput(inputId = "numberOfSum", withMathJax("Number of computations  $K$ "), 10, 10000, 10, step = 100),
236       helpText("Setup the parameters for the section estimators. The value for  $y$ -point must be
237         in between  $[\delta, 1-\delta]$  for  $\delta > 0$  and is used for the volatility
238         estimator  $\hat{\sigma}_y^2$  in one spatial point. The value  $\hat{\sigma}$  is
239         used for the volatility estimator  $\hat{\sigma}_{[n,m]}^2$  in multiple spatial points.
240         Any spatial point within the range  $[\delta, 1-\delta]$  will be used."),
241       numericInput(inputId = "yPoint", label = " $y$ -point", value = 0.5),
242       numericInput(inputId = "delta", label = " $\delta$ ", value = 0.05),
243       submitButton(" Apply Changes", icon("refresh")),
244       helpText("For additional information e.g. on the theoretical part consult:"),
245       uiOutput("urlTab"),
246       width = 4
247     ),
248     mainPanel(
249       tabsetPanel(type = "tabs",
250         tabPanel("Plot", plotlyOutput(outputId = "plot")),
251         tabPanel("Estimators", withMathJax(), h4("Estimators for volatility and differential operator"),
252           p(paste("The estimators are collected in the rows, where  $\hat{\sigma}_y^2$  and  $\hat{\sigma}_{[n,m]}^2$ 
253             indicates volatility estimation and  $\hat{\eta}$  for
254             the differential operator, where  $\eta = (\sigma_0^2, \text{varkappa}) =$ 
255              $(\sigma^2 / \sqrt{\vartheta_2}, \vartheta_1 / \vartheta_2)$ ."), sep = "")),
256           withMathJax(tableOutput("estimators")) ),
257         tabPanel("Plot Estimator", withMathJax(),
258           h4("Kernel-density estimation for  $\eta$ "),
259           p("The figure below shows a kernel-density-estimation of  $\hat{\eta}$ 
260             based on 1000 Monte-Carlo-simulations with the parameters
261              $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 1/2$ ,  $\sigma = 1/4$ 
262             and  $\xi(x) = 0$ . Therefore a  $\eta = (\sigma_0^2, \text{varkappa}) = (\sqrt{2}/16, 2) \approx (0.08838835, 2)$ 
263             is to be estimated. Each Monte-Carlo-simulation was simulated on a discrete grid with  $n=10^4$  points in
264             time and  $m=100$  spatial points."),
265           plotlyOutput(outputId = "plotEstimatorsEta", height = "100%")
266         )
267       )
268     )
269   )
270 )
271
272 server <- function(input, output) {
273
274   output$urlTab <- renderUI({
275     url <- a("Volatility estimation for stochastic PDEs using high-frequency observations", href="https://arxiv.org/abs/1710.03519")
276     tagList("", url)
277   })
278
279   output$estimators <- renderTable({
280     yRange <- seq(input$delta, 1-input$delta, 1/100)
281     sigma1 <- sigmaEstimator(dat = dat, yPoint = input$yPoint, xrep = 100, time = 1, timeRep = 1000, theta1 = input$theta1, theta2 = input$
282       theta2)
283     sigma2 <- sigmaEstimatorY(dat = dat, yRange = yRange, xrep = 100, time = 1, timeRep = 1000, theta1 = input$theta1, theta2 = input$theta2)
284     eta <- etaEstimator(dat = dat, yRange = yRange)
285     mat <- matrix(c(round(sigma1, 4), "", "", round(sigma2, 4), "", "", round(eta[1], 4), round(eta[2], 4)), ncol = 3, byrow = T)
286     withMathJax()

```

6 Simulation des SPDE-Modells

```
286 rownames(mat) <- c("\\hat{\\sigma}_y^2\\)", "\\hat{\\sigma}_{n,m}^2\\)", "\\hat{\\eta}\\)")
287 withMathJax()
288 colnames(mat) <- c("\\sigma\\)", "\\sigma_0^2=\\sigma^2 / \\sqrt{\\vartheta_2}\\)",
289 "\\varkappa=\\vartheta_1/ \\vartheta_2\\)")
290 withMathJax()
291 mat
292 },bordered = T,rownames = T,colnames = T)
293
294
295 output$plot <- renderPlotly({
296
297   if(input$xi != ""){
298     xi <- function(x){eval(parse(text = input$xi))}
299   } else {
300     xi = function(x){0}
301   }
302
303   withProgress(message = "Generating Data", value = 0,{
304     dat <- simulateSPDEData(theta0 = input$theta0,theta1 = input$theta1,
305                           theta2 = input$theta2, sigma = input$sigma,xi,xrep = 100,
306                           time = 1,timeRep = 1000,numberOfSum = input$numberOfSum)
307   })
308
309   x <- seq(0,1,1/100)
310   y <- seq(0,1,1/1000)
311
312   basicPlot(x = x,y = y[1:(input$yPointSlider + 1)],z = dat[1:(input$yPointSlider + 1),,alpha = 0.95] %>%
313     layout(title = '', scene = getScene(2, y = -2, z = 0.5))
314
315 })
316
317 output$plotEstimatorsEta <- renderPlotly({
318   dat4 <- readRDS("kappaDat.RDS")
319   zEst4 <- with(dat4, MASS::kde2d(sigma4, kappa,n=1000))
320   k5_nothing <- basicPlot2(zEst4$x, zEst4$y, zEst4$z, 0.85) %>%
321     layout(title = '', scene = getScene2(x = 1, y = -1, z = 1.7,xAxis = "\\U03C3\\U2080\\U00B2",yAxis = "\\U03F0"))
322
323 })
324
325
326
327 }
328
329 # Run the application
330 shinyApp(ui = ui, server = server)
```

Sonstige Berechnungen

Es folgt die Bestimmung des numerischen Werts Γ aus Satz 4.1.5.

```
1 GammaCalc <- function(n){
2   I <- function(r){2*sqrt(r+1)-sqrt(r+2)-sqrt(r)}
3   erg <- sum(I(0:n)^2)
4   return(1/(pi)*(erg+2))
5 }
6 GammaCalc(100000)
7 [1] 0.7504116
```

Notationsverzeichnis

Allgemeine Notationen

$f^{(n)}$	n -te Ableitung von f
$[X, Y](t)$	Quadratische Kovariation der Prozesse X, Y zum Zeitpunkt t
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$L^2(\Omega)$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω
$L^p(\Omega)$	L^p -Raum über Ω
$\mathcal{C}^p(O)$	Raum der p -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf O
\bar{z}	Komplex Konjugierte einer Zahl $z \in \mathbb{C}$
$a \wedge b$ bzw. $a \vee b$	$\min(a, b)$ bzw. $\max(a, b)$, für $a, b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{O}(f)$ bzw. $o(f)$	O-Notation der Ordnung f (Landau-Symbole)
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(f)$ bzw. $o_{\mathbb{P}}(f)$	Stochastische O-Notation der Ordnung f (Landau-Symbole)

Arbeitsspezifische Notationen

Kapitel 2

A_{ϑ}	$\vartheta_0 + \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \vartheta_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
H_{ϑ}	$\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \ f\ _{\vartheta} < \infty, f(0) = f(1) = 0\}$
$\langle f, g \rangle_{\vartheta}$	$\int_0^1 \exp\left[\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} y\right] f(y) g(y) dy$
$e_k(y)$	$\sqrt{2} \sin(\pi k y) \exp\left[-\frac{\vartheta_1}{2\vartheta_2} y\right]$
λ_k	$-\vartheta_0 + \frac{\vartheta_1^2}{4\vartheta_2} + \vartheta_2 \pi^2 k^2$
$x_k(t)$	$e^{-t\lambda_k} \langle \xi, e_k \rangle_{\vartheta} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \sigma_s dB_s^k$

Kapitel 3

$\Delta_i x_k$	$A_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k}$
$A_{i,k}$	$(e^{-\lambda_k i \Delta_n} - e^{-\lambda_k (i-1) \Delta_n}) \langle \xi, e_k \rangle$
$B_{i,k}$	$\int_0^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) \sigma dW_s^k$
$C_{i,k}$	$\int_{(i-1)\Delta_n}^{i\Delta_n} e^{-\lambda_k(i\Delta_n - s)} \sigma dW_s^k$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_y^2 & \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y) e^{y\vartheta_1/\vartheta_2} \\
 \Sigma_{i,j}^{B,k} & \sigma^2 (e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} - e^{-\lambda_k (i+j-2)\Delta_n}) \frac{(1-e^{-\lambda_k \Delta_n})^2}{2\lambda_k} \\
 \Sigma_{i,j}^{C,k} & \mathbb{1}_{\{j=i\}} \sigma^2 \frac{1-e^{-2\lambda_k \Delta_n}}{2\lambda_k} \\
 \Sigma_{i,j}^{BC,k} & \mathbb{1}_{\{i>j\}} \sigma^2 e^{-\lambda_k \Delta_n (i-j)} (e^{\lambda_k \Delta_n} - e^{-\lambda_k \Delta_n}) \frac{e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1}{2\lambda_k}
 \end{aligned}$$

Kapitel 4

$$\begin{aligned}
 \Delta_i \tilde{x}_k & \tilde{A}_{i,k} + B_{i,k} + C_{i,k} = \tilde{B}_{i,k} + C_{i,k} \\
 \tilde{A}_{i,k} & \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \\
 \tilde{B}_{i,k} & \tilde{A}_{i,k} + B_{i,k} = \sigma \int_{-\infty}^{(i-1)\Delta_n} e^{-\lambda_k ((i-1)\Delta_n - s)} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1) dW_s^k \\
 \zeta_{n,i} & \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i X)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \\
 \tilde{\zeta}_{n,i} & \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (\Delta_i \tilde{X})^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \\
 V_{p,\Delta_n}(y) & \frac{1}{p\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^p (\Delta_i \tilde{X})^2(y) \exp\left[\frac{y \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \\
 \tilde{\Sigma}_{i,j}^{B,k} & \frac{\sigma^2}{2\lambda_k} (e^{-\lambda_k \Delta_n} - 1)^2 e^{-\lambda_k \Delta_n |i-j|} \\
 \hat{\sigma}_{n,m}^2 & \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{y_j}^2 = \frac{\sqrt{\vartheta_2 \pi}}{mn\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y_j) \exp\left[\frac{y_j \vartheta_1}{\vartheta_2}\right] \\
 \tilde{\sigma}_{n,m}^4 & \frac{\vartheta_2 \pi}{3m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^4(y_j) \exp(2y_j \vartheta_1/\vartheta_2)
 \end{aligned}$$

Kapitel 5

$$\begin{aligned}
 \sigma_0^2 & \frac{\sigma^2}{\sqrt{\vartheta_2}} \\
 \varkappa & \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \\
 \eta & (\sigma_0^2, \varkappa) \\
 Z_j & \frac{1}{n\sqrt{\Delta_n}} \sum_{i=1}^n (\Delta_i X)^2(y_j) = f_{\sigma_0^2, \varkappa}(y_j) + \delta_{n,j} \\
 f_{s,k}(y) & \frac{s}{\sqrt{\pi}} e^{-ky} \\
 (\hat{\sigma}_0^2, \hat{\varkappa}) & \arg \min_{s,k} \sum_{j=1}^m (Z_j - f_{s,k}(y_j))^2
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- Larry C Andrews. Special functions of mathematics for engineers. McGraw-Hill New York, 1992.
- Markus Bibinger. Skript zur Mathematischen Statistik. 2017.
- Markus Bibinger. Skript zur Stochastic Integration. Universität Marburg, 2018. URL https://ilias.uni-marburg.de/ilias.php?ref_id=1428463&cmdClass=ilrepositorygui&cmdNode=rv&baseClass=ilrepositorygui.
- Markus Bibinger. Vorlesungsmitschrieb zur Statistik für stochastische Prozesse. 2019.
- Markus Bibinger und Mathias Trabs. Volatility estimation for stochastic pdes using high-frequency observations. Stochastic Processes and their Applications, 2019.
- Rudolf Brigola. Fourier-Analysis und Distributionen. Springer Fachmedien Wiesbaden, 1997.
- Giuseppe Da Prato und Jerzy Zabczyk. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge university press, 2014.
- Otto Forster. Analysis 1, volume 12. Springer, 2004.
- Claude Frankignoul. Large scale air-sea interactions and climate predictability. In Elsevier Oceanography Series, volume 25, pages 35–55. Elsevier, 1979.
- Leszek Gawarecki und Vidyadhar Mandrekar. Stochastic differential equations in infinite dimensions: with applications to stochastic partial differential equations. Springer Science & Business Media, 2010.
- Philip Hartman. Ordinary differential equations, classics in applied mathematics, vol. 38, society for industrial and applied mathematics (siam), philadelphia, pa, 2002, corrected reprint of the second (1982) edition. Corrected reprint of the second, 1982.
- Florian Hildebrandt und Mathias Trabs. Parameter estimation for spdes based on discrete observations in time and space. arXiv preprint arXiv:1910.01004, 2019.
- Hajo Holzmann und Markus Bibinger. Skript zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Universität Marburg, 2016. URL https://ilias.uni-marburg.de/goto.php?target=crs_1165845&client_id=UNIMR.
- Leon Isserlis. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. Biometrika, 12(1/2):134–139, 1918.

- Volker John. Skript zu Numerical Methods for Partial Differential Equations. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2013. URL https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE_FUB/num_pde_fub.pdf.
- D. Khoshnevisan. An introduction to parabolic spdes. 2016. URL <HTTP://WWW.MATH.UTAH.EDU/~DAVAR>.
- Achim Klenke. Wahrscheinlichkeitstheorie, volume 1. Springer, 2006.
- Sergey V Lototsky und Boris L Rozovsky. Stochastic partial differential equations. Springer, 2017.
- Magda Peligrad, Sergey Utev, et al. Central limit theorem for linear processes. The Annals of Probability, 25(1):443–456, 1997.
- Phillip E Protter. Stochastic integration and differential equations, 2004.
- Igor Rostislavovich Shafarevich und Miles Reid. Basic algebraic geometry, volume 2. Springer, 1994.
- Dirk Werner. Funktionalanalysis. Springer, 2006.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Masterarbeit eigenständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Diese Arbeit hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Ort, Datum

Verfasser