Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 2 –
Abgabe Donnerstag: 30.10

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, ebene Kurve und p ein Punkt der Ebene, der nicht auf dieser Kurve liegt. Beweisen Sie, dass

$$I_f(p) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{\vec{t}(s)}{\gamma(s) - p} ds$$

ganzzahlig ist (diese Zahl misst, wie oft die Kurve sich um den Punkt p windet).

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve, $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ ihre natürliche Parametrisierung und $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$ das Tangentialfeld. Wir betrachten das Tangentialfeld als eine Kurve

$$\gamma^* := \vec{t}(s) : [0, l] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Beweisen Sie: gilt $\kappa(s) \neq 0$ für alle s, so ist γ^* eine reguläre Kurve $\mathcal{C}^*$.

b) Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Krümmung κ^* und die Windung τ^* der Kurve $\mathcal{C}^*$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Beweisen Sie, dass eine C^3-Kurve genau dann eine Schraubenlinie ist, wenn ihre Krümmung $\kappa > 0$ und ihre Windung τ konstant sind.
(Hinweis: Benutzen Sie Satz 4 und projizieren die Kurve auf eine Ebene orthogonal zu $\vec{a}$, wo $\langle \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle =$ konst.).

Aufgabe 4 (2 Punkte). Ist γ die Bahnkurve eines beliebigen Körpers der Masse $m \neq 0$, so ist sein Drehimpuls definiert als

$$L := m\gamma \times \dot{\gamma}.$$

Diese physikalische Größe misst den Rotationsanteil der Bewegung.

a) Wie lautet die Ableitung des Drehimpulsvektors?

b) Der Beschleunigungsvektor $\ddot{\gamma}$ erfüllt die Newton'sche Gleichung, $\vec{F} = m\ddot{\gamma}$. Für welcher Kraftfelder verschwindet die Ableitung des Drehimpulses? Gilt dies auch für das Gravitationkraftfeld

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

wo G die Gravitationskonstante ist, $m_1,\ m_2$ die Massen der beiden Körper und $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2$ die Positionen der Körper sind. Dabei wird angenommen, dass ein Körper (z.B. die Sonne) sich immer im Ursprung befindet.

c) Für welche Bewegungen im Gravitationsfeld verschwindet der Drehimpuls?

d) Man folgere, dass für Bewegungen mit konstantem Drehimpuls und $\dot{\gamma} \neq 0$ die Bewegung in einer Ebene stattfindet.