Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 3 –
Abgabe Montag: 3.11

Aufgabe 1 (4 Punkte). Betrachten Sie folgende 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = \frac{1}{yz}dx + \frac{1}{xz}dy + \frac{1}{xy}dz.$$

Zeigen Sie, dass die geometrische Distribution, die durch $\omega = 0$ definiert ist, integrabel ist. Finden Sie außerdem einen integrierenden Faktor für ω, d.h. eine glatte Funktion f, so dass $d(f \cdot \omega) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche der Gestalt, dass die Tangentialvektoren $\partial/\partial u, \partial/\partial v$ in jedem Punkt orthogonal sind. Man setze

$$E = \left|\frac{\partial}{\partial u}\right|^2, \quad G = \left|\frac{\partial}{\partial v}\right|^2$$

und wähle als Orthonormalreper

$$e_1 = E^{-1/2}\frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = G^{-1/2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Zeigen Sie, dass in dem dualen Reper $\sigma_1 = E^{1/2}du, \sigma_2 = G^{1/2}dv$ die Zusammenhangsform ω_{12} durch

$$\omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\sigma_1 + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sigma_2\right).$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Eine *Regelfläche* ist eine glatte Fläche, die eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$(u, v) \mapsto \alpha(u) + v\gamma(u)$$

besitzt, wobei α, γ Kurven sind, die entweder $\gamma' \neq 0$ oder $\alpha' \neq (\alpha' \cdot \gamma)\gamma$ erfüllen. Damit liegt für jedes u die Gerade $v \mapsto \alpha(u) + v\gamma(u)$ (= erzeugende Gerade) vollständig in der Fläche.

a) Was bedeutet es, wenn $\alpha'(u) = 0$, oder wenn $\gamma'(u) = 0$?

b) Beweisen Sie, dass die Schraubfläche / Helikoid

$$\big(s\cos t, s\sin t, bt\big),$$

das Möbius Band

$$\big(\sin u(2 - v\sin\frac{u}{2}), \cos u(2 - v\sin\frac{u}{2}), v\cos\frac{u}{2}\big),$$

und das hyperbolische Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Regelflächen sind. Finden Sie die darin liegenden Familien erzeugender Geraden. Geeignete Skizzen sind beizulegen.