Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 4 –
Abgabe Montag: 10.11

Definition. Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die *Gaußsche Krümmung* $G : M^2 \to \mathbb{R}$ ist die durch die Gleichung

$$d\omega_{12} = -G \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

definiert.

Sie können annehmen dass die Funktion G unabhängig von der Wahl des lokalel Repers der Vektorfelder ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

a) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung des Helikoids. (siehe Übungsblatt 3)

b) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung des hyperbolischen Hyperboloids

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Hinweis: Parametrisieren Sie den Hyperboloid durch

$$(u, v) \mapsto (\sqrt{1+u^2}\cos(v), \sqrt{1+u^2}\sin(v), u).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Geben Sie auf S^3 drei orthonormale, tangentiale Vektorfelder $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 : S^3 \to TS^3$ an und berechnen Sie die Kommutatoren $[\vec{V}_i, \vec{V}_j]$.
Hinweis: Betrachten Sie S^3 als die Einheitssphäre in den Quaternionen. Die Vektorfelder sind Abbildungen

$$\vec{V}_i : S^3 \to \mathbb{R}^4.$$

Benutzen Sie dass man die Vektorfelder $\vec{V}_i$ lokal um ein Punkt $x \in S^3$ fortsetzen kann zu einer Abbildung $\vec{V}_i : x \in U \to \mathbb{R}^4$, mit $U \subset \mathbb{R}^4$ offen. Die Kommutatoren sind dann die Einschränkungen auf S^3 von:

$$[\vec{V}_i, \vec{V}_j] = d_{\vec{V}_i}(\vec{V}_j) - d_{\vec{V}_j}(\vec{V}_i).$$

(wahrscheinlich sind die Vektorfelder $\vec{V}_i$, die Sie hinschreiben, global definiert.)

Aufgabe 3 (4 Punkte). Seien X, Y, Z Vektorfelder und f eine glatte Funktion auf einer Mannigfaltigkeit M^k. Beweisen Sie, dass in lokalen Koordinaten sowohl die Jakobi Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

als auch die Formel

$$[X, f \cdot Y] = X(f) \cdot Y + f \cdot [X, Y]$$

gilt.