Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 5 –
Abgabe Montag: 17.11

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie: Eine zusammenhängende Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, deren zweite Fundamentalform II$=f\cdot$ Id in jedem Punkt ein Vielfaches der Identität ist, muss Teil einer Sphäre oder einer Ebene sein.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass f konstant sein muss. Die Aussage (mit im wesentlichen dem gleichen Beweis) stimmt übrigens auch für n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie: Jede kompakte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ besitzt mindestens einen Punkt, in dem die Gauß'sche Krümmung positiv ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f: M \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|^2$, und eine Kurve γ in M durch einen besonderen Punkt der Funktion f (welchen wohl?); untersuchen Sie dann die Funktion $g = f \circ \gamma$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei S^n die Sphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, \dots, 0, 1)$. Die stereographische Projektion ist ein Diffeomorphismus

$$P_N : S^n \backslash \{(0, \dots, 0, 2)\} \to \mathbb{R}^n.$$

Der Bildpunkt $P_N(\vec{x})$ ist der Punkt in $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der auf der Geraden durch $\vec{x}$ und $(0, \dots, 0, 2)$ liegt.

a) Geben Sie eine explizite Formel für $P_N(x_1, \dots, x_{n+1})$ und $P_N^{-1}(y_1, \dots, y_n)$.

b) Berechnen Sie die induzierte Metrik auf S^n.

c) Benutzen Sie die stereographische Projektion, um ein Vektorfeld auf S^2 zu konstruieren, das nur in einem Punkt verschwindet. Skizzieren Sie das Vektorfeld.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Eine Einbettung $f : M \to N$ ist eine injektive Immersion. Beweise, dass eine Einbettung von $S^n \times S^m$ in $\mathbb{R}^{n+m+1}$ existiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte). (Fortsetzung vom Aufgabe 2, Übungsblatt 3). Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche der Gestalt, dass die Tangentialvektoren $\partial/\partial u, \partial/\partial v$ in jedem Punkt orthogonal sind. Man setze

$$E = \left|\frac{\partial}{\partial u}\right|^2, \quad G = \left|\frac{\partial}{\partial v}\right|^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Gauß'sche Krümmung durch

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\sqrt{E}/\partial v}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\sqrt{G}/\partial u}{\sqrt{E}}\right)\right]$$

gegeben ist.

b) Berechnen Sie als Anwendung die Gauß'sche Krümmung einer Rotationsfläche, die von einer Kurve erzeugt wird, die nicht notwendig auf Bogenlänge parametrisiert ist. Was erhält man als Gauß'sche Krümmung der *Pseudosphäre*, also der Rotationsfläche der Traktrix $s \mapsto (e^{-s}, \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt)$? [Sie dürfen auch gerne eine andere Parametrisierung der Traktrix wählen – sie sind alle gleich unschön].