Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 6 –
Abgabe Montag:24.11

Aufgabe 1 (4 Punkte).

a) Sei

$$Q(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + b$$

für $\lambda_i, a_i, b \in \mathbb{R}$. Dann ist eine Quadrik die durch

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 0$$

definierte Fläche im R^3. Zeigen Sie, dass für die Gauß'sche Krümmung G und die mittlere Krümmung H gilt:

$$G = \frac{1}{(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)^2}\left[Q_1^2\lambda_2\lambda_3 + Q_2^2\lambda_1\lambda_3 + Q_3^2\lambda_1\lambda_2\right]$$

und

$$H = \frac{1}{2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\lambda_1(Q_2^2 + Q_3^2) + \lambda_2(Q_1^2 + Q_3^2) + \lambda_3(Q_1^2 + Q_2^2)\right]$$

wobei $Q_i := \frac{\partial Q}{\partial x_i}$.
Hinweis: Nutzen Sie das orthogonale Reper $(Q_1, Q_2, Q_3), (0, Q_3, -Q_2)$ und $(-Q_2^2 - Q_3^2, Q_1Q_2, Q_1Q_3)$.

b) Berechen Sie die Krümmung für den Spezialfall eines Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

und des hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0.$$

In welchen Punkten ist die Krümmung extremal?

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei M eine Fläche mit Normalenvektor e_3. Man beweise, dass die auf der Fläche definierte 1-Form $\eta = \langle x, de_3\rangle$ geschlossen ist, und folgere, dass für eine Kurve $\gamma \subset M$

$$\int_\gamma \eta = 0$$

gilt, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

b/w

a) M ist einfach zusammenhängend.

b) Die Kurve γ ist Rand einer zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $G \subset M$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Man klassifiziere alle Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung. Es ergeben sich insgesamt 9 geometrische Typen. Welche davon können kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand sein?
Hinweis: Parametrisieren Sie die Fläche durch

$$F(s, \varphi) = (r(s)\sin(\varphi), r(s)\cos(\varphi), z(s))$$

und setzen Sie voraus, dass die erzeugende Kurve der Fläche nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h.

$$\langle r', r' \rangle + \langle z', z' \rangle = 1.$$

Zeigen Sie zuerst, dass die Gaußsche Krümmung gegeben ist durch

$$G = -\frac{r''}{r}.$$