Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 7 –
Abgabe Montag: 1.12

Hausaufgaben:
Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie (ohne die mittlere Krümmung zu berechnen), dass die folgenden beiden Flächen Minimalflächen sind:

a) *Enneper'sche Fläche*

$$\mathcal{E}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2).$$

b) *Bour'sche Fläche*

$$\mathcal{B}(r,\theta) = (r\cos(\theta) - (1/2)r^2\cos(2\theta), -r\sin(\theta) - (1/2)r^2\sin(2\theta), (4/3)r^{3/2}\cos(3\theta/2))$$

Plotten Sie die Skizzen mittels eines geeigneten Computerprogramms (z.B. Sage, Maple oder Mathematica).

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien

$$\mathcal{E}(u,v) = \operatorname{Re}\Phi(u+iv), \quad \tilde{\mathcal{E}}(u,v) = \operatorname{Im}\Phi(u+iv)$$

der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ mit $\sum_{k=1}^{3} (\partial_z \Phi_k)^2 = 0$. Man definiere durch

$$\Psi_t(u,v) = \operatorname{Re}\left(e^{-it}(\mathcal{E} + i\tilde{\mathcal{E}})\right) = \mathcal{E}\cos t + \tilde{\mathcal{E}}\sin t \tag{1}$$

eine Familie von Flächen (parametrisiert durch t). Zeigen Sie, dass $\Psi_t(u,v)$ isothermische Minimalflächen für alle t sind. Beweisen Sie außerdem, dass alle Flächen der Familie (1) dieselbe erste Grundform und dieselbe Gauß'sche Krümmung (als Funktion der Parameter u, v haben). Geben Sie die erste Grundform explizit in den Koordinaten u, v an.

Präsenzaufgaben:
Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die Großkreise auf der Sphäre $\mathcal{S}^2$ genau die Geodäten sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie direkt mittels der Geodätengleichung, dass auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ die Halbgeraden parallel zur y-Achse Geodäten sind. Geben Sie ihre explizite Parametrisierung an.