Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 8 –
Abgabe Montag: 8.12

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Für Flächenstücke $\phi(u,v)$, bei denen $g_{12}=0$ und g_{11}, g_{22} nur vom Parameter v abhängen, gilt:

a) Die Linien $\{u = \text{const.}\}$ sind Geodäten.

b) Eine (durch Bogenlänge parametrisierte) Kurve γ ist geodätisch $\iff$ es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$u' = \frac{c}{g_{11}}, \quad v' = \pm\frac{\sqrt{g_{11}-c^2}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass eine Geodäte die Gleichungen

$$g_{11}u'' + (g_{11})_v u'v' = 0, \quad 2g_{22}v'' - (g_{11})_v(u')^2 + (g_{22})_v(v')^2 = 0.$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Seien (φ,ψ) die sphärischen Koordinaten der Sphäre $S^2\backslash\{N,S\}$ außerhalb des Nord- und Südpols. Man definiere die *Mercator Projektion* als die Abbildung

$$f : S^2 \setminus \{N,S\} \to \mathbb{R}^2 \ : \ f(\varphi,\psi) = \Big(\varphi, \ln\tan\big(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\big)\Big).$$

Beweisen Sie die in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften:

a) Die Mercator Projektion ist konform.

b) Loxodrome werden auf Geraden abgebildet (Vergleichen mit der stereographischen Projektion)

c) Die Mercator Projektion ist nicht flächenerhaltend (Berechnen Sie den Faktor der die lokale Flächenänderung angibt. Wo ist die Flächenverzerrung am größten?)

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 3. Betrachte die Menge $M^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad -\pi/2 < y < \pi/2\}$ mit der semi Riemann'schen Metrik

$$g = \frac{dx^2 - dy^2}{\cos^2(y)}.$$

a) Zeigen Sie, dass $E = \frac{x'^2 - y'^2}{\cos^2(y)}$ und $P = \frac{x'}{\cos^2(y)}$ erste Integrale des geodätischen Flusses sind, die außerdem die Bedingung $P^2 - E \geq 0$ erfüllen.

b) Diskutieren Sie die geodätischen Linien auf M^2. Nehmen Sie hierfür an, dass y eine Funktion von x ist und integrieren Sie die auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen.

c) Zeigen Sie, dass es auf M^2 Punkte gibt, die nicht durch Geodäten verbunden sind.