Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 9 –
Abgabe Donnerstag: 15.12

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei M eine Fläche und $\sigma : (a,b) \to M$ eine Kurve derart, dass -
die Hauptnormale $\vec{h}$ immer orthogonal zum Flächennormalenvektor e_3 ist, und
- die Krümmung κ_σ von σ nie null ist. Man beweise, dass

$$G(\sigma) = -\tau_\sigma^2$$

wobei $G(\sigma)$ die längs der Kurve berechnete Gaußsche Krümmung bzw. τ_σ die Windung von σ ist.
Hinweis: Die symmetrische Bilinearform $S(\vec{v}) \cdot S(\vec{w})$, wobei S die Weingarten Abbildung ist, erfüllt

$$S(\vec{v}) \cdot S(\vec{w}) - 2H\ \mathrm{II}(\vec{V}, \vec{w}) + G\ \mathrm{I}(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Beweisen Sie, dass die *Hopf-Faserung*

$$\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1,\ (z,w) \mapsto [z,w]$$

eine Submersion ist. Was ist das Urbild eines projektiven Punktes.

Präsenzaufgaben:

Definition. Ein Killing Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine infinitesimale Isometrie, das bedeutet, dass ihr Fluss H_t für kleine t eine lokale Isometrie erzeugt.

Aufgabe 3. Für $M = \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld beschrieben durch eine Abbildung $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei wir den Tangentialraum mit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ identifizieren. Wir sagen, dass ein Vektorfeld X linear ist falls es durch eine $(n \times n)$-Matrix $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Beweisen Sie, dass ein Vektorfeld ein Killing Feld ist, genau dann wenn die Matrix schiefsymmetrisch ist.

Aufgabe 4. Sei V ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M mit kompaktem Träger (das bedeutet, dass V auserhalb einer kompakten Menge verschwindet). Beweisen Sie, dass V einen Fluss generiert.

Aufgabe 5. Sei H_t ein Fluss auf einer Mannigfaltigkeit M mit infinitesimalem Erzeuger V. Zeigen Sie, dass $H_t^*(V) = V$.