Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 1 –
Abgabe Donnerstag: –

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V und W die infinitesimale Erzeuger des Flusses φ und ψ.

a) Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=0,\ t=0} \varphi_s \psi_t \varphi_s^{-1} \psi_t^{-1} = -[V, W]$$

gilt.

b) Beweisen Sie, dass wenn $\varphi_s \psi_t = \psi_t \varphi_s$ für alle $s,\ t \in \mathbb{R}$, dann $[V, W] = 0$

c) Beweisen Sie, dass wenn $[V, W] = 0$, dann gilt $\varphi_s^* W = W$ für alle s. Zeigen Sie anschließend, dass $\varphi_s \psi_t = \psi_t \varphi_s$ für alle $s,\ t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei M eine kompakte Fläche. Sei $f \in C^\infty(M)$ mit endlich vielen kritischen Punkten $p_1, \ldots, p_k$ und mit kritische Werten $c_1, \ldots, c_k$. Für $a < b \in \mathbb{R}$ definieren wir $M_a = f^{-1}(a)$, $M_{[a,b]} = f^{-1}([a, b])$, und $M_{(a,b)} = f^{-1}((a, b))$.

a) Beweisen Sie, dass wenn a ein regulärer Wert von f ist, dann ist M_a eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

b) Sei V das Vektorfeld $V = \mathrm{grad} f / |\mathrm{grad} f|^2$ auf $M \backslash \{p_1, \ldots, p_k\}$, und sei H der Fluss von V. Zeigen Sie, dass $f(H_s(p)) = f(p) + s$ falls $H_s(p)$ definiert ist.

c) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Interval ohne kritische Werter. Beweisen Sie, dass

$$H : [0, b-a] \times M_a \to M_{[a,b]}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Diese Aufgabe gilt für beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten.