Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 11 –
Abgabe Montag: 26.01

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechne die Christoffel-Symbole für die Schwarzschild-Halbebene P_I mit der Metrik

$$g = \frac{1}{h(r)}dr^2 - h(r)dt^2, \quad h(r) := 1 - \frac{2m}{r},$$

a) für das Orthonormalreper $\{e_1 = \sqrt{h}\,\partial_r, e_2 = \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_t\}$,

b) und für das Reper der Koordinaten $\{v_1 = \partial_r, v_2 = \partial_t\}$.

c) Folgere daraus (in beiden Fällen) die Formeln für die Zusammenhangsformen ω_{ij}.

d) Zeige, dass die Gaußsche Krümmung der Schwarzschild-Halbebene $G = 2m/r^3$ ist.

e) Stellen Sie die Geodätengleichung auf und zeigen Sie, dass folgende Erhaltungsgrößen existieren:

$$M = \frac{1}{h(r)}\dot{r}^2 - h(r)\dot{t}^2, \quad E = h\dot{t}$$

Berechnen Sie die lichtartigen ($M = 0$) Geodäten. Zeigen Sie außerdem, dass eine geeignete Parametrisierung der Linien $t = \text{const}$ raumartigen Geodäten sind, d.h. Geodäten mit $M > 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $M = \mathbb{R}^3$ und bezeichne mit $D_X Y$ die Richtungsableitung der vektorwertigen Funktion $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Richtung des Vektors X. Man beweise, dass durch

$$\nabla_X Y = D_X Y + \tfrac{1}{2} X \times Y$$

eine kovariante Ableitung definiert wird, die alle Eigenschaften (1) – (4) der Vorlesung, nicht aber Eigenschaft (5) hat.

[Hinweis: Was ist $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$?]

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei (M,g) eine semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g. Wir definieren auf M eine neue Metrik durch $\tilde{g} = e^{2f}g$. Man zeige für den Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla^{\tilde{g}}$ dieser neuen Metrik:

$$\nabla^{\tilde{g}}_X Y = \nabla^g_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\mathrm{grad}(f)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $e_1, \ldots, e_m$ ein lokales Orthonormalreper einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ das duale Reper. Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$d\sigma_i = \sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha \wedge \omega_{\alpha i}$$

gilt.