Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm

Wintersemester 2014/2015

Übungen zur Differentialgeometrie 1
– Blatt 12 –
Abgabe Montag: 02.02

Hausaufgaben:
Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $f : N \to (M, g)$ eine Immersion von einer glatten Mannigfaltigkeit N nach einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Beschreiben Sie die induzierte Metrik auf N. Wir definieren einen Zusammenhang auf N durch

$$(\nabla_X Y)(p) = \Big((\nabla^g_{\overline{X}} \overline{Y})(f(p))\Big)^T,$$

wo $\overline{X}$, $\overline{Y}$ Erweiterungen von $Df \cdot X, Df \cdot Y$ auf einer offenen Menge in M sind, und $()^T$ ist die Projektion auf $T_pN \subset T_{f(p)}M$. Zeigen Sie, dass der induzierte Zusammenhang der Levi-Civita Zusammenhang für die induzierte Metrik ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierte Metrik. Sei $\gamma : I \to M^2$ eine differentierbare Kurve und sei V das Vektorfeld entlang γ: $V(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \gamma(t)$. Wir sehen V als eine Abbildung $V : I \to \mathbb{R}^3$ an.

a) Zeigen Sie, dass V parallel ist genau dann wenn $\frac{dV}{dt}$ senkrecht zu $T_{\gamma(t)}M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist, wo $\frac{dV}{dt}$ die normale Ableitung von $V : I \to \mathbb{R}^3$ ist.

c) Sei $\gamma(t) : I \to S^2$ eine Breitengrad,

$$\gamma(t) = (\cos(t)\cos(\alpha), \sin(t)\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Beschreiben Sie den Paralleltransport entlang γ.
Hinweis: Zeigen Sie, dass der Paralleltransport entlang des Kegels C tangential zu S^2 entlang γ das gleiche ergibt wie der Paralleltransport entlang S^2. Und benutzen Sie, dass man den Kegel aufschneiden und ihn so in $\mathbb{R}^2$ einbetten kann.