

Übungen zur Differentialgeometrie 1

– Blatt 13 –

Abgabe Montag: 09.02

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (4 Punkte). Man beweise: ein 3-dimensionaler (zusammenhängender) Einstein-Raum ist notwendigerweise ein Raum konstanter Krümmung.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei (S^2, g_0) die 2-Sphäre mit der Standardmetrik und $S^2 \times S^2$ mit der Produktmetrik. Man zeige: $S^2 \times S^2$ ist ein Einstein-Raum, aber kein Raum konstanter Krümmung.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

- a) Bekanntlich kann man eine symmetrische Bilinearform $\varphi(x, y)$ stets aus der zugehörigen quadratischen Form $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$ zurückgewinnen über die sogenannte *Polarisationformel*

$$2\varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(x + y) - \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y).$$

Analog zeige man für den Krümmungstensor: $\mathcal{R}$ kann aus der biquadratischen Form

$$K(X, Y) = \langle \mathcal{R}(X, Y)Y, X \rangle$$

rekonstruiert werden (und damit aus der Kenntnis aller Schnittkrümmungen).

- b) Folgere: Wenn die Schnittkrümmung nicht von der Wahl der Ebene, sondern nur vom Punkt $p \in M$ abhängt, also eine skalare Funktion $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, so folgt

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = K (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$