Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren
– Blatt 0 –
Abgabe Donnerstag: –

Aufgabe 1.

a) Sei $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$.

b) Sei $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Zeigen Sie, dass
$$qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

c) Die Norm $|q|$ ist definiert durch $|q| := \sqrt{qq^*}$. Zeigen Sie, dass $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$ wenn $q \neq 0$.

d) Zeigen Sie, dass $|pq| = |p||q|$.

e) Zeigen Sie, dass $S^3 := \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2. Sei V und W endlichdimensionale Vektorräumen über $\mathbb{F}$. Zeigen Sie, dass es ein kanonische Isomorphismus gibt
$$W^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(W, V).$$

Aufgabe 3. Sind $(a_i)_{i\in I}$ bzw. $(b_j)_{j\in J}$ Basen der Vektorräumen V bzw. W uber $\mathbb{F}$. Zeigen Sie, dass $(a_i \otimes b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $V \otimes W$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionale Vektorräumen. Erinnern Sie sich an die Abbildung
$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'.$$
Sie ist festgelegt durch $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$. Sei $(a_i)_{i\in I}$ bzw. $(b_j)_{j\in J}$ Basen der Vektorräumen V bzw. W uber $\mathbb{F}$ und ebenso für sei $(a'_i)_{i\in I'}$ bzw. $(b'_j)_{j\in J'}$ Basen der Vektorräumen V' bzw. W' über $\mathbb{F}$. Geben Sie eine Matrixbeschreibung von $f\otimes g$ bezüglich $(a_i \otimes b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ und $(a'_i \otimes b'_j)_{(i,j)\in I'\times J'}$

Aufgabe 5. Sei K ein Teilkörper von K'. Dann ist K' ein K-Vektorraum. Daher ist für jeden K-Vektorraum V das Tensorprodukt
$$V_{k'} = V \otimes K'$$
ein K-Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $V_{K'}$ ein natürliche K'-Vektorraumstruktur erhält. Durch
$$(x \otimes \lambda) \cdot \mu = x \otimes \lambda\mu,$$
wobei $\lambda \in \mathbb{K}'$.

b) Zeigen Sie, dass ffür jede K-lineare Abbilding $f : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen definiert

$$Tf = f \otimes \mathrm{id}_{K'}$$

eine K'-lineare Abbildung von $V_{K'}$ in $W_{K'}$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k \neq 0$$

genau dann falls $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7. Sei V ein n-dimensionale Vektorraum und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orthonormale Basis bezüglich ein gewisse Metrik. Beweisen Sie, dass für jede k-form ω

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \wedge (e_i \lrcorner \omega) = k\omega$$

gilt.