Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 1 –

Abgabe Montag: 26-10

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (**1.1.5.** Ex. 2). Beschreiben Sie die Signatur von $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i}$ on $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 (**1.1.5.** Ex. 3). Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ und sei B eine schiefsymmetrische oder symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von B auf

$$W^{\perp} = \{v \in V : \ B(x,y) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$$

nicht ausgeartet ist.

Aufgabe 3 (**1.1.5** Ex. 4). Sei V der Vektorraum der symmetrischen 2×2 Matrizen über $\mathbb{F}$. Für $x, y \in V$ definieren wir

$$B(x,y) := \det(x+y) - \det(x) - \det(y).$$

a) Zeigen Sie, dass B nicht ausgeartet ist, und wenn $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, dann ist die Signatur von B gleich $(1,2)$.

b) Sei $g \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{F})$ und definiere $\varphi(g) \in \mathbf{GL}(V)$ durch $\varphi(g)(v) = gvg^t$. Zeigen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist mit Kern $\{\pm 1\}$.

Aufgabe 4 (**1.1.5** Ex. 10). Wir identifizieren $\mathbb{H}^n$ mit $\mathbb{C}^{2n}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ durch die Abbildung $a + \mathbf{j}b \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, mit $a, b \in \mathbb{C}^n$. Sei $T = A + \mathbf{j}B \in M_n(\mathbb{H})$ mit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie, dass die Links-Multiplikation von T auf $\mathbb{H}^n$ korrespondiert mit der Multiplikation von $\begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^{2n}$.

b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation mit $\mathbf{i}$ auf $M_n(\mathbb{H})$ korrespondiert mit

$$\begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} iA & -i\overline{B} \\ -iB & -i\overline{A} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 5 (1.2.6 Ex. 1). Zeigen Sie, dass die Jacobi Identität gilt für $\mathrm{End}(V)$.

Aufgabe 6 (1.2.6 Ex. 3). Sei B eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{F}$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{so}(V, B)$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist.

b) Sei B nicht ausgeartet. Beweisen Sie, dass $\mathrm{tr}(X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{so}(V, B)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7 (**1.1.5** Ex. 11). Erinnern Sie sich an die Gruppe

$$\mathbf{Sp}(p, q) = \{g \in \mathbf{GL}(p + q, \mathbb{H}) : g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

und die Bilinearform $B(x, y) = x^* I_{p,q} y$ auf $\mathbb{H}^n$. Unter der Identifizierung von $\mathbb{H}^n$ mit $\mathbb{C}^{2n}$ von Aufgabe 4 sehen wir B als eine $\mathbb{H}$-wertige Funktion auf $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n}$.

a) Zeigen Sie, dass $B(x, y) = \overline{B_0(x, y)} + \mathbf{j} B_1(x, y)$, wobei B_0 eine $\mathbb{C}$-Hermitische Form auf $\mathbb{C}^{2n}$ mit Signatur $(2p, 2q)$ ist und B_1 eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische $\mathbb{C}$-Bilinearform auf $\mathbb{C}^{2n}$.

b) Benutzen Sie a) um zu zeigen, dass $\mathbf{Sp}(p, q) = \mathbf{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, B_1) \cap \mathbf{U}(\mathbb{C}^{2n}, B_0)$.

Aufgabe 8 (1.2.6 Ex. 5). Sei $B_0(x, y)$ die Hermitische form und $B_1(x, y)$ die schiefsymmetrische form auf $\mathbb{C}^{2n}$ aus Aufgabe 7.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{sp}(p, q) = \mathfrak{su}(\mathbb{C}^{2n}, B_0) \cap \mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n}, B_1)$ wenn $M_n(\mathbb{H})$ identifiziert ist mit einem Unterraum von $M_{2n}(\mathbb{C})$ wie in Aufgabe 4.

b) Benutzen Sie teil a) um zu zeigen, dass $\mathfrak{sp}(p, q) \subset \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{H})$.