Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 2 –

Abgabe Montag: 2-11

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (**1.3.8.** Ex. 2). In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})_+ = \{g \in M_n(\mathbb{R}) : \det(g) > 0\}$ weder injektiv noch surjektiv ist für $n \geq 2$.

a) Sei $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixform der Einparameter-Untergruppe $\varphi(t) = \exp(tX)$ und zeigen Sie, dass $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Sei $g = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Zeigen Sie, dass g sich nicht schreiben lässt durch $g = \exp(X)$ mit $X \in M_2(\mathbb{R})$. (Hinweis: Zeigen Sie erst, dass X nur eine Eigenwert haben kann und dass $\operatorname{tr}(X) = 0$.)

Definition. Das Zentrum einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist:

$$\mathscr{Z}(\mathfrak{g}) := \{g \in \mathfrak{g} : [g,x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Aufgabe 2 (**1.1.5** Ex. 13). Warum kann man $\mathbf{SL}(n,\mathbb{H})$ nicht definieren durch alle Elemente $g \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$ mit $\det(g) = 1$.

Aufgabe 3. Sei

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Lie Klammer $[A,B] = AB - BA$. Berechnen Sie das Zentrum von $\mathfrak{g}$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit der Eigenschaft $[x,[y,z]] = 0$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass $x \cdot y := x + y + [x,y]/2$ eine Gruppen-Struktur auf $\mathfrak{g}$ definiert. Zeigen Sie, dass die Lie-Algebra aus der vorherigen Aufgabe die Eigenschaft $[x,[y,z]] = 0$ erfüllt

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Dimension von: $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{u}(p,q)$ und $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$.

Aufgabe 6. Sei $A \in \mathbf{O}(3,\mathbb{R})$ und $A \notin \mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A konjugiert ist zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. Sei
$$A = \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\overline{z} & 0 \end{pmatrix},$$
wobei $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $Z_1,\ Z_2$ und Z_3 in
$$\exp(tA) \cdot \exp(tB) = \exp(tZ_1 + t^2 Z_2 + t^3 Z_3 + O(t^4)).$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 8 (**1.1.5** Ex. 12). Wir sehen
$$C(x, y) = x^* \mathbf{j} y,\ \ x, y \in \mathbb{H}^n$$
als eine $\mathbb{H}$-wertige Funktion auf $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n}$ mit der Identifizierung von $\mathbb{H}^n$ mit $\mathbb{C}^{2n}$ aus Aufgabe 4 (**1.1.5** Ex.10).

a) Zeigen Sie, dass $C(x, y) = \overline{C_0(x, y)} + \mathbf{j} x^t y$ für $x, y \in \mathbb{C}^{2n}$, wobei $C_0(x, y)$ eine $\mathbb{C}$-Hermitische Form auf $\mathbb{C}^{2n}$ von Signatur (n, n) ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{SO}^*(2n) = \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(\mathbb{C}^{2n}, C_0)$.

Aufgabe 9 (**1.3.8.** Ex. 1). Zeigen Sie, dass $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ surjektiv ist. (Hinweis: Benutzen Sie die Jordansche-Normalform.)