Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren
– Blatt 3 –
Abgabe Montag: 9-11

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (**1.3.8** #4). Zeigen Sie, dass φ aus Aufgabe **1.1.5** #4 Stetig ist und dass $d\varphi$ einem Lie-Algebra Isomorphismus ist. Benutzen Sie diesen Ergebnis um zu zeigen, dass $\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathbf{SO}(V, B)$ offen ist.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass $\exp : \mathfrak{so}(2) \to \mathbf{SO}(2)$ surjektiv ist. Hinweis: Berechnen Sie:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass für jeden Matrix $x \in \mathbf{SO}(n)$ existiert eine Matrix $y \in \mathbf{SO}(n)$, sodass $x = yby^{-1}$ wo b nur 2×2 und 1×1 Block-Matrizen auf der Diagonale hat.

c) Die Exponentialabbildung bildet $\mathfrak{so}(n)$ surjektiv auf $\mathbf{SO}(n)$ ab für $n \geq 2$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathbf{SO}(n)$ zusammenhangend ist.

Aufgabe 3. Sei $H \subset G$ ein offene Untergruppe. Zeigen Sie, dass H auch geschlossen ist.

Aufgabe 4. Wir identifizieren $M_n(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$. Sei $\langle -, - \rangle$ die induzierte Metrik auf $M_n(\mathbb{R})$ mit der Standard-Metrik auf $\mathbb{R}^{n^2}$.

a) Zeigen Sie, dass
$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(XY^t), \quad X, Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ enthalten in eine Späre von radius $\sqrt{n}$ um der Ursprung ist, bezüglich diese Metrik.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ kompakt ist.

Aufgabe 5 (**1.1.5** #6). Sei V ein $2n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$. Betrachten Sie den Raum $W = \Lambda^n V$. Sei $\omega \in \Lambda^{2n} V \backslash \{0\}$. Wir definieren die Bilinearform $B(u, v)$ auf W durch $u \wedge v = B(u, v)\omega$.

a) Zeigen Sie, dass B nicht ausgeartet ist.

b) Zeigen Sie, dass B schiefsymmetrisch ist wenn n ungerade ist und symmetrisch wenn n gerade ist.

c) Was ist die Signatur von B, wenn n gerade ist und $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (1.1.5 #7). Sei $V = \mathbb{F}^4$ mit e_1, e_2, e_3, e_4 als Basis und sei $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. Wir definieren $\varphi : \mathbf{SL}(4, \mathbb{F}) \to \mathbf{SO}(\Lambda^2\mathbb{F}^4, B)$ durch

$$\varphi(g)(u \wedge v) = gu \wedge gv.$$

a) Zeigen Sie, dass φ ein Gruppen homomorphismus mit Kern $\{\pm I\}$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Normalform um die Kern auszurechnen)

b) Zeigen Sie, dass φ stetig ist und dass $\mathrm{d}\varphi$ ein Lie-Algebra Isomorphismus ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7. In dieser Aufgabe wollen wir die orthogonale Darstellung der $\mathfrak{su}(2)$ vorstellen. Wir betrachten die Quaternionen als den Vektorraum der Matrizen

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$$

wobei die Multiplikation gegeben ist durch die Matrizenmultiplikation. Mit $\operatorname{im}\mathbb{H}$ bezeichnen wir die imanginären Quaternionen, die einen 3–dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{H}$ bilden, gegeben als

$$\operatorname{im}\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & w \\ -\bar{w} & -ix \end{pmatrix} : w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für $X, Y \in \mathbb{H}$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*).$$

a) Identifiziert man $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{R}^4$ indem (x_1, x_2, x_3, x_4) abgebildet wird auf

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

so beweise man, dass obiges Skalarprodukt gerade das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ darstellt. Ferner zeige man, dass $\operatorname{im}\mathbb{H}$ senkrecht auf $\mathbb{R} \cdot \mathbf{1}$ liegt, wo $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix sei.

b) Wir betrachten nun die Abbildung $\rho : \mathbf{SU(2)} \to \mathbf{GL}(\operatorname{im}\mathbb{H})$ gegeben durch

$$\rho_X(Z) = XZX^{-1}$$

für $X \in \mathbf{SU}(2)$ und $Z \in \operatorname{im}\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass ρ wohldefiniert ist und ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Wir schränken das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von $\mathbb{H}$ auf $\operatorname{im}\mathbb{H}$ ein. Zeigen Sie, dass für $X \in \mathbf{SU}(2)$ der Endomorphismus ρ_X eine orientierungserhaltene Isometrie ist, d.h. ein Element aus $\mathbf{SO}(3, \langle , \rangle)$. Den Gruppenhomomorphismus $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3, \langle , \rangle)$ nennt man die orthogonale Darstellung der $\mathbf{SU}(2)$.

d) Zeigen Sie, dass ρ surjektiv ist und berechnen Sie dessen Kern.

e) Zeigen Sie, dass ρ stetig ist und dass $\mathrm{d}\rho : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3, \langle , \rangle)$ ein Isomorphismus ist.