Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 4 –

Abgabe Montag: 16-11

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine lineare algebraische Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : X_A f|_G = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C})) \cap \mathcal{J}_G\}.$$

Aufgabe 2 (**1.4.5** #10). Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\mathbb{F}$ und seien D_1, D_2 Derivationen von $\mathcal{A}$. Zeigen sie, dass $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ eine Derivation von $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 3 (**1.4.5** #1). Sei $D_n = (\mathbb{C}^\times)^n$ ein algebraischer Torus der Dimension n. Zeigen Sie, dass wenn D_k isomorph zu D_n ist, dann gilt $k = n$.

Aufgabe 4 (**1.4.5** #2). Sei $\mathcal{A}$ eine endlichdimensionale assoziative Algebra über $\mathbb{C}$ mit Einheit 1. Sei G die Menge aller $g \in \mathcal{A}$, sodass g invertierbar ist. Für $a \in \mathcal{A}$ sei $L_a \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$ die Links-Multiplikation mit a. Wir definieren

$$\Phi : G \to \mathbf{GL}(\mathcal{A}); \quad \Phi(g) = L_g.$$

a) Zeigen Sie, dass $\Phi(G)$ eine lineare algebraische Gruppe in $\mathbf{GL}(\mathcal{A})$ ist.

b) Sei $a \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass ein links-invariantes Vektorfeld X_a auf G existiert, sodass

$$X_a f(g) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(g(1 + ta)) \quad \text{für } f \in \mathcal{O}[G].$$

c) Sei $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ der Vektorraum $\mathcal{A}$ mit der Lie Klammer $[a, b] = ab - ba$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $a \mapsto X_a$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ zu den links-invarianten Vektorfeldern auf G ist.

d) Sei $\{u_\alpha\}$ ein Basis für $\mathcal{A}$ und sei $\{u_\alpha^*\}$ die dual Basis. Wir definieren Strukturkonstanten $c_{\alpha\beta\gamma}$ durch $u_\alpha u_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma$. Sei $\partial/\partial_{u_\alpha}$ die Ableitung in Richtung u_α. Zeigen Sie, dass

$$X_{u_\beta} = \sum_\gamma \varphi_{\beta\gamma}(\partial/\partial_{u_\gamma}),$$

wobei $\varphi_{\beta\gamma} = \sum_\alpha c_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^*$ eine lineare Funktion auf $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 5 (**1.4.5** #3). Sei $\mathcal{A}$ eine endlichdimensionale Algebra über $\mathbb{C}$. Sei $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ die Multiplikation (nicht notwendig assoziativ). Wir definieren die Automorphismen-Gruppe von $\mathcal{A}$ durch

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \{g \in \mathbf{GL}(\mathcal{A}) : g\mu(X, Y) = \mu(gX, gY), \text{ für } X, Y \in \mathcal{A}\}.$$

b/w

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ eine linear algebraische Untergruppe von $\mathbf{GL}(\mathcal{A})$ ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe 6 (**1.4.5** #4). Sei $G \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine lineare-algebraische-Gruppe. Sei

$$\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \to M_n(\mathbb{C})$$

analytisch, wobei $r > 0$ und $\varphi(0) = I$ und $\varphi(z) \in G$. Beweisen Sie, dass

$$A = \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=0} \varphi(z) \in \mathfrak{g}.$$

(Hinweis: Schreiben sie $\varphi(z) = I + zA + z^2F(z)$, wobei $F(z)$ eine analytische Matrix-wertige Funktion ist. Zeigen Sie, dass $X_A f(g) = (d/dz)|_{z=0} f(g\varphi(z)) = 0$ für alle $f \in \mathcal{J}_G$.

Aufgabe 7 (**1.4.5** #5). Sei $B_\Gamma(x, y) = x^t \Gamma y$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$, wobei $\Gamma \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Sei G_Γ die Isometrie-Gruppe dieser Form. Wir definieren die Cayley-Transformation $c(A) = (I + A)(I - A)^{-1}$ für $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\det(I - A) \neq 0$.

a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $\det(I - A) \neq 0$. Beweisen Sie, dass $c(A) \in G_\Gamma$ genau dann wenn $A^t\Gamma + \Gamma A = 0$.

b) Geben Sie einen algebraischen Beweis, dass

$$(\star) \qquad \mathfrak{g}_\Gamma = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^t\Gamma + \Gamma A = 0\}.$$

Folgern Sie, dass die Lie-Algebra von der Lie-Gruppe G_Γ und der algebraischer Gruppe G_Γ das Gleiche sind. (Hinweis: Definieren Sie $\psi_B(g) = \mathrm{tr}((g^t\Gamma g - \Gamma)B)$ für alle $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ und $B \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $X_A\psi_B(I) = \mathrm{tr}((A^t\Gamma + \Gamma A)B)$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$. Weil ψ_B auf G_Γ verschwindet, folgern wir, dass alle $A \in \mathrm{Lie}(G)$ Gleichung $(\star)$ erfüllen. Umgekehrt, für eine Matrix A die $(\star)$ erfüllt definieren Sie $\varphi(z) = c(zA)$ und wenden Sie die vorherige Aufgabe und Teil a) an.)