Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 5 –

Abgabe Montag: 23-11

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (1.5.4 #6). Sei V ein endlichdimensionaler Komplexer Vektorraum mit nicht ausgearteten schiefsymmetrischen Bilinearform Ω . Wir definieren

$$\mathbf{GSp}(V, \Omega) = \{g \in \mathbf{GL}(V) : \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times \text{ sodass } \Omega(gx, gy) = \lambda \Omega(x, y) \forall x, y \in V\}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Homomorphismus

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbf{Sp}(V, \Omega) \rightarrow \mathbf{GSp}(V, \Omega); \quad (\lambda, g) \mapsto \lambda g$$

surjektiv ist. Was ist der Kern dieses Homomorphismus.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{GSp}(V, \Omega)$ eine algebraische Untergruppe von $\mathbf{GL}(V)$ ist.

c) Beschreiben Sie $\text{Lie}(\mathbf{GSp})$.

Aufgabe 2 (1.5.4 #7). Sei $G = \mathbf{GL}(1, \mathbb{C})$ und $\varphi : G \rightarrow G$ gegeben durch $\varphi(z) = \bar{z}$. Zeigen Sie, dass φ ein nicht regulärer Gruppe Homomorphismus ist.

Aufgabe 3 (1.5.4 #8). Sei $P \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ die Untergruppe gegeben durch

$$P = \{g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) : g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : a \in \mathbf{GL}(p, \mathbb{C}), d \in \mathbf{GL}(n-p, \mathbb{C}), b \in M_{p, n-p}(\mathbb{C})\}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Ideal $\mathcal{J}_P$ generiert ist durch die Matrixfunktionen x_{ij} mit $p < i \leq n$ und $1 \leq j \leq p$.

b) Benutzen Sie a) um zu zeigen, dass

$$\text{Lie}(P) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} : A \in M_p(\mathbb{C}), D \in M_{n-p}(\mathbb{C}), B \in M_{p, n-p}(\mathbb{C})\}.$$

Aufgabe 4 (1.5.4 #2). Geben Sie, ein algebraisches Beweis von die Gleichung

$$d\pi^*(A) = -d\pi(A)^t.$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Standard-Darstellung von $\mathfrak{so}(3, \mathbb{F})$ und die Adjungierte-Darstellung isomorph sind. Zeigen Sie, dass die Standard-Darstellung von $\mathbf{SO}(3, \mathbb{F})$ und die Adjungierte-Darstellung isomorph sind.

Aufgabe 6 (1.5.4 #5). Wir definieren $\varphi(A) = \begin{bmatrix} \det(A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ für $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $A \mapsto \varphi(A)$ ein injectiver regulärer Gruppenhomomorphismus von $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ zu $\mathbf{SL}(n+1, \mathbb{C})$ ist. Zeigen Sie, dass $d\varphi(X) = \begin{bmatrix} -\text{tr}(X) & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$ für $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7. Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine Darstellung und sei B eine nicht ausgeartete positive definite Bilinearform auf V . Sei B invariant unter $\pi(G)$, also

$$B(\pi(g)x, \pi(g)y) = B(x, y), \quad \forall g \in G, x, y \in V.$$

Dann gilt, dass $\pi : G \rightarrow \mathbf{SO}(V, B) \subset \mathbf{GL}(V)$.

a) Sei $W \subset V$ ein G -invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass

$$W^\perp = \{v \in V : B(v, x) = 0 \forall x \in W\}$$

auch G -invariant ist. Folgern Sie, dass

$$\pi(g) = \begin{bmatrix} \pi(g)|_W & 0 \\ 0 & \pi(g)|_{W^\perp} \end{bmatrix}$$

auf $W \oplus W^\perp = V$.

b) Zeigen Sie, dass (π, V) Isomorph zu (π^*, V^*) ist.

c) Untersuchen Sie was passiert für Teil a) und b) wenn B nicht positiv definit ist.

Aufgabe 8 (1.5.4 #1). Sei (π, V) eine rationale Darstellung der linearen algebraischen Gruppe G .

a) Definieren Sie $d\pi(A)$ durch die Gleichung

$$(\star) \quad X_A(f_C \circ \pi)(I) = f_{d\pi(A)C}(I).$$

Folgern Sie aus Proposition 1.4.9, dass $d\pi([A, B]) = [d\pi(A), d\pi(B)]$ für $A, B \in \mathfrak{g}$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\star$ die Gleichung

$$X_A(f \circ \pi) = (X_{d\pi(A)}f) \circ \pi$$

für alle $f \in \mathcal{O}[\mathbf{GL}(V)]$ impliziert.

Aufgabe 9. Sei

$$H^3(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{F}) : x, y, z \in \mathbb{F} \right\}$$

die Heisenberg Gruppe. Sei $\pi : H^3(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbf{GL}(3, \mathbb{F})$ die Standard-Darstellung. Beschreiben Sie die Unterräumen, der invariant unter $H^3(\mathbb{F})$ sind. Haben diesen Unterräumen ein invariantes Komplement?