

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 6 –

Abgabe Montag: 30-11

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (1.7.3 #2). Zeigen Sie, dass $\mathbf{Sp}(1)$ isomorph zu $\mathbf{SU}(2)$ als Lie Gruppe ist. (Hinweis: Benutzen Sie die Hausaufgabe auf Blatt 3.)

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{F})$ eine Lie Gruppe und

$$G_e := \{\exp(X_1) \cdots \exp(X_m) \in G : X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g} \text{ und } m \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass G_e die zusammenhängende Komponente der Identität ist.

Aufgabe 3 (1.7.3 #3). Sei ψ die reelle Transformation von $\mathbb{C}^{2n}$ gegeben durch

$$\psi[z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}] = [\bar{z}_{n+1}, \dots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_n].$$

Wir definieren $\mathbf{SU}^*(2n) = \{g \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{C}) : g\psi = \psi g\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{SU}^*(2n)$ als Lie Gruppe isomorph zu $\mathbf{SL}(n, \mathbb{H})$ ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung $\sigma(x) = \bar{x}$. Zeigen Sie, dass σ ein Automorphismus von $\mathbf{U}(n)$ und $\mathbf{SU}(n)$ ist. Zeigen Sie, dass σ ein äußerer Automorphismus ist für $n \geq 3$ und $\mathbf{U}(2)$ aber ein innerer Automorphismus für $\mathbf{SU}(2)$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{F})$ isomorph zu $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F})$ ist, wobei $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7 (1.7.3 #1). Sei $G = \mathbb{C}^\times$. Wir definieren die Konjugation $\tau(z) = \bar{z}^{-1}$. Sei $V \subset \mathcal{O}[G]$ der Unterraum mit Basis $f_1(z) = z$ und $f_2(z) = z^{-1}$. Wir definieren $(Cf)(z) = \bar{f}(\tau(z))$ und $\rho(z)f(w) = f(wz)$ für $f \in V$ und $z \in G$.

- a) Finden Sie eine Basis v_1, v_2 des reellen Unterraumes $V_+ = \{f \in V : Cf = f\}$, sodass in diese Basis

$$\rho(z) = \begin{bmatrix} (z + z^{-1})/2 & (z - z^{-1})/2i \\ -(z - z^{-1})/2i & (z + z^{-1})/2 \end{bmatrix},$$

für alle $z \in \mathbb{C}^\times$.

- b) Sei $K = \{z \in G : \tau(z) = z\}$. Benutzen Sie a) um zu zeigen, dass $G \cong \mathbf{SO}(2, \mathbb{C})$ als algebraische Gruppe und $K \cong \mathbf{SO}(2)$ als Lie Gruppe.

Aufgabe 8 (1.7.3 #4). Sei $G = \mathbf{Sp}(\mathbb{C}^{2n}, \Omega)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g \mapsto (g^*)^{-1}$ ein involutiven Automorphismus von G definiert. Zeigen Sie, dass $g \mapsto \tau(g) = K_{p,q}(g^*)^{-1}K_{p,q}$ eine komplexe Konjugation definiert, wobei $K_{p,q} = \text{diag}[I_p, -I_q, I_p, -I_q]$.