Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 7 –

Abgabe Montag: 7-12

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (2.1.3 #1). Zeigen Sie, dass die Lie-Algebren der orthogonalen und der symplektischen Gruppe gegeben sind durch:

$$\mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2l}, B) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -s_l a^t s_l \end{bmatrix} : a, b, c \in M_l(\mathbb{C}), b^t = -s_l b s_l, c^t = -s_l c s_l \right\}$$

$$\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2l}, \Omega) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -s_l a^t s_l \end{bmatrix} : a, b, c \in M_l(\mathbb{C}), b^t = s_l b s_l, c^t = s_l c s_l \right\}$$

$$\mathfrak{so}(\mathbb{C}^{2l+1}, \Omega) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & w & b \\ u^t & 0 & -w^t s_l \\ c & -s_l u & -s_l a^t s_l \end{bmatrix} : a, b, c \in M_l(\mathbb{C}), b^t = -s_l b s_l, c^t = -s_l c s_l, u, w \in \mathbb{C}^l \right\}$$

Definition. Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra. Die *Komplexifizierung von* $\mathfrak{g}$ ist die komplexe Lie-Algebra

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}; \quad [x + iy, w + zi] = [x, y] - [y, z] + i([y, w] + [x, z]), \quad x, y, z, w \in \mathfrak{g}.$$

Sei $\mathfrak{k}$ eine komplexe Lie-Algebra. Wir können $\mathfrak{k}$ auffassen als reelle Lie-Algebra $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ indem wir die komplexe Struktur vergessen.

Bemerkung: Wir können eine komplexe Lie-Algebra auffassen als ein Paar $(\mathfrak{g}, I)$, wobei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra ist und $I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine komplexen Struktur: $[Ix, y] = [x, Iy] = I[x, y]$. Die komplex-konjugierte Lie-Algebra von $(\mathfrak{g}, I)$ definieren wir durch $\overline{\mathfrak{g}} := (\mathfrak{g}, -I)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für eine komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt, dass $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \oplus \overline{\mathfrak{g}}$.

Definition. Wenn $\mathfrak{k}$ eine reelle Lie-Algebra ist und $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}$ dann ist $\mathfrak{k}$ eine *Reelle Form* von $\mathfrak{g}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Lie-Algebren der reellen Formen aus Abschnitt 1.7.2 auch reellen Formen sind.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ eine reelle Form hat, genau dann wenn, ein anti-linearer Automorphismus $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ existiert.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5 (2.1.3 #3). Sei H ein Torus von Rank n. Sei $\mathscr{X}_*(H)$ der Raum aller Homomorphismen von $\mathbb{C}^\times$ nach H. Wir definieren eine Gruppenstruktur auf $\mathscr{X}_*(H)$ durch punktweise Multiplikation: $(\pi_1\pi_2)(z) = \pi_1(z)\pi_2(z)$ für $\pi_1, \pi_2 \in \mathscr{X}_*(H)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{X}_*(H)$ isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist als Gruppe.

b) Zeigen Sie, dass wenn $\pi \in \mathscr{X}_*(H)$ und $\chi \in \mathscr{X}(H)$, dann existiert ein Zahl $\langle \pi, \chi \rangle \in \mathbb{Z}$, sodass
$$\chi(\pi(z)) = z^{\langle \pi, \chi \rangle}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^\times.$$

c) Zeigen Sie, dass die Paarung $\pi, \chi \mapsto \langle \pi, \chi \rangle$ additiv ist in beide Einträgen und nicht ausgeartet ist.

Aufgabe 6 (**2.1.3** #4). Sei $G \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ eine klassische Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Wir definieren $\theta(g) = (g^t)^{-1}$ für $g \in G$.

a) Zeigen Sie, dass θ ein regulärer Automorphismus von G ist und dass $\mathrm{d}\theta(X) = -X^t$ für $X \in \mathfrak{g}$.

b) Wir definieren $K = \{g \in G : \theta(g) = g\}$ und sei $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebra von K. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{d}\theta(X) = X\}$.

c) Wir definieren $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{d}\theta(X) = -X\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ und $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. (Hinweis: $\mathrm{d}\theta$ ist eine Derivation von $\mathfrak{g}$ mit Eigenwerten ± 1.)

d) Beschreiben Sie Explizit die Matrixform von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ wenn $G = \mathbf{Sp}(\mathbb{C}^{2l}, \Omega)$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{k}$ isomorph zu $\mathfrak{gl}(l, \mathbb{C})$ ist.