

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 8 –

Abgabe Montag: 14-12

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1. Sei G eine Lie-Gruppe oder algebraische Gruppe.

- a) Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ und $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(W)$ zwei irreduzible komplexe Darstellungen und $f : V \rightarrow W$ eine äquivariante Abbildung. Zeigen Sie, dass f entweder ein Isomorphismus ist oder die Null-abbildung.
- b) Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine irreduzible komplexe Darstellung und $f : V \rightarrow V$ eine äquivariante Abbildung. Zeigen Sie, dass $f = c \cdot \text{Id}$.
- c) Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine reelle irreduzible Darstellung. Zeigen Sie, dass der Raum der äquivalenten Abbildungen: $\text{Hom}_G(V, V)$, eine Divisionsalgebra ist über $\mathbb{R}$ und daher isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist.

Bemerkung: Die vorherige Aufgabe teilt die reellen irreduziblen Darstellungen auf in drei Klassen. Wir nennen die Darstellung von reellem, komplexem oder quaternionischem Typ, wenn $\text{Hom}_G(V, V)$ gleich $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist.

Aufgabe 2. Sei $\pi : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ die Standard-Darstellung. Wir fassen π auf als eine reelle Darstellung $\pi : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\text{Hom}_{\mathbf{SU}(2)}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \cong \mathbb{H}$.

Aufgabe 3. Erinnern Sie sich an die Aufgabe 7 auf Blatt 3. Sei $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ die Darstellung aus dieser Aufgabe. Zeigen Sie, dass $\text{Hom}_{\mathbf{SU}(2)}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass wenn $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine irreduzible reelle Darstellung von komplexen Typ ist, dann existiert eine äquivariante Komplexe Struktur $I : V \rightarrow V$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass wenn $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine irreduzible reelle Darstellung von quaternionischem Typ ist, dann existieren drei äquivariante Komplexe Strukturen $I, J, K : V \rightarrow V$, sodass $IJ = K$ und $JK = I$.

Aufgabe 6. Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine reelle irreduzible Darstellung von komplexem Typ. Zeigen Sie, dass die Darstellungen $V \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus V$ isomorph sind.

Aufgabe 7. Sei $\pi : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine komplexe Darstellung. Eine reelle Struktur ist eine äquivariante anti-lineare Abbildung $r : V \rightarrow V$, sodass $r^2 = \text{Id}$. Sei $V' := \{v \in V : r(v) = v\}$. Der Unterraum V' ist ein reeller Vektorraum und ist G -invariant. Zeigen Sie, dass $V' \otimes \mathbb{C} \cong V$ isomorph sind.

Hausaufgaben:

Aufgabe 8 (2.2.4 #2). Sei $\rho : \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}(\mathbb{C}^3, B)$ gegeben durch $\rho(g)X = gXg^{-1}$, mit $X \in \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(X) = 0\} \cong \mathbb{C}^3$ zusammen mit dem inneren Produkt $\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY)$. Sei $H \subset \mathbf{SO}(\mathbb{C}^3, B)$ und $\tilde{H} \subset \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ die diagonale Untergruppe und $\rho^* : \mathcal{X}(H) \rightarrow \mathcal{X}(\tilde{H})$ der Homomorphismus gegeben durch $\rho^*(\chi) = \chi \circ \rho$. Berechnen Sie das Bild von ρ .

Aufgabe 9 (2.2.4 #3). Sei $\pi : \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{SO}(\mathbb{C}^4, B)$ gegeben durch $\pi(a, b)X = aXb^{-1}$, mit $X \in M_2(\mathbb{C})$ zusammen mit dem inneren Produkt $B(X, Y) = \det(X + Y) - \det(X) - \det(Y)$. Berechnen Sie, wie in der vorherigen Aufgabe, das Bild von π^* in $\mathcal{X}(\tilde{H})$.