Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 9 –

Abgabe Montag: 14-12

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (**2.3.4** #1). Sei e_{ij} die elementare Matrix die $e_{ij}(v_j) = v_i$ und $e_{ij}(v_k) = 0$ für $k \neq j$. Sei $x = e_{13},\ y = e_{31}$ und $h = e_{11} - e_{33}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{x, y, h\}$ ein TDS Triple in $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ist.

b) Sei $\mathfrak{g} = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y \oplus \mathbb{C}h \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und sei $U = M_3(\mathbb{C})$. Wir definieren eine Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(U)$ durch $\rho(A)X = [A, X]$. Zeigen Sie, dass $\rho(h)$ diagonalisierbar ist mit Eigenwerten ± 2 (Vielfachheit 1), ± 1 (Vielfachheit 2), und 0 (Vielfachheit 3). Finden Sie alle $u \in U$, sodass $\rho(h)u = \lambda u$ und $\rho(x)u = 0$, wobei $\lambda = 0, 1, 2$.

c) Sei $F^{(k)}$ die irreduzible $(k + 1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass

$$U \cong F^{(2)} \oplus F^{(1)} \oplus F^{(1)} \oplus F^{(0)} \oplus F^{(0)}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $F^{(2)}$ isomorph zu der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 3 ([**2.3.4** #3). Beschreiben Sie alle irreduzible Darstellungen von $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$.

Aufgabe 4 (**2.3.4** #2). Sei k eine nicht-negative Zahl und sei W_k der Raum aller Polynome in $\mathbb{C}[x]$ von Grad $\leq k$. Für $f \in W_k$ sei

$$\sigma_k(g)f(x) = (cx + a)^k f\left(\frac{dx + b}{cx + a}\right), \quad \text{für } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_k(g)W_k = W_k$ und dass (σ_k, W_k) eine Darstellung definiert die äquivalent zu der $(k + 1)$-dimensionalen irreduzible Darstellung ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ und eine endlich-dimensionale Darstellung V das Tensorprodukt $V \otimes V$ sich zerlegt in mindestens zwei Unterdarstellungen:

$$V \otimes V = V \odot V \oplus V \wedge V.$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 6 (**2.4.5** #4). Sei $1 \leq i, j \leq l$, $i \neq j$ und C_{ij} die Cartan-Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass der α_j Wurzelstring durch α_i gegeben ist durch $\alpha_i, \ldots, \alpha_i - C_{ij}\alpha_j$. (Benutzen Sie, dass $\alpha_i - \alpha_j$ kein Wurzel ist)

b) Zeigen Sie, dass $[e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_i}] = 0$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(e_{\alpha_j})^k(e_{\alpha_i}) &\neq 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, -C_{ij}, \\ \operatorname{ad}(e_{\alpha_j})^k(e_{\alpha_i}) &= 0 \quad \text{für } k = -C_{ji} + 1. \end{aligned}$$

(Hinweis: Benutzen Sie a) und Korollar 2.4.4.)

Aufgabe 7. Beschreiben Sie das Wurzelsystem von der Cartan-Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Malen Sie ein Bild von dem Wurzelsystem, Sie dürfen annehmen, dass der Winkel zwischen den einfachen positiven Wurzeln $\frac{5}{6}\pi$ betragt.

Aufgabe 8. Sei $(\rho, V = \mathbb{C}^2)$ die Standard-Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

a) Zerlegen Sie $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ in irreduzible Unterdarstellungen.

b) Zeigen Sie, dass $\bigodot_{\mathbb{C}}^k \mathbb{C}^2 \cong F^{(k+1)}$.