Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 11 –

Abgabe Montag: 25-01

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra und Φ die Wurzeln bezüglich $\mathfrak{h}$. Sei $\alpha \in \Phi$.

a) Geben Sie einen alternativer Beweis für $B(\alpha, \alpha) \neq 0$ an. (hinweis: Sei $s(\alpha) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ das $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Triple. Zeigen Sie, dass $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} g_{n\alpha}$ invariant ist unter $s(\alpha)$ und berechnen Sie $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(h_\alpha)|_V)$.)

b) Zeigen Sie, dass
$$\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$$
und $c\alpha$ ist eine Wurzel nur für $c = \pm 1$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{f_\alpha, h_\alpha\} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha}$ invariant ist unter $s(\alpha)$ und berechnen Sie $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(h_\alpha))$.)

Hausaufgaben:

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass keine $4, 5$ oder 7-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra existiert.

Aufgabe 3 (2.5.5 #3). Sei V eine irreduzible Darstellung mit zwei invarianten symmetrischen nicht ausgearteten Bilinearformen g_1 und g_2. Zeigen Sie, dass ein Skalar λ existiert sodass $g_1 = \lambda g_2$.

Aufgabe 4 (2.5.5 #4). Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Killing-Form gegeben ist durch $B(X,Y) = 2n\mathrm{tr}(XY)$. (Hinweis: Benutzen Sie die vorherige Aufgabe und berechnen Sie $B(H,H)$ für $H = \mathrm{diag}[1, -1, 0, \ldots, 0]$.)