Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren

– Blatt 12 –

Abgabe Montag: 01-02

Präsenzaufgaben:

Erinnern Sie sich an die Formel: $\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\theta) = (\alpha, \beta)$, wobei θ der Winkel zwischen α und β ist und $\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha)$. Für Wurzeln α und β und die Cartan-Zahlen

$$n_{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)},$$

gilt also

$$n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = 4\cos^2(\theta_{\alpha\beta}) \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

weil $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha}$ ganzzahlig ist und $0 \leq 4\cos^2(\theta_{\alpha\beta}) \leq 4$. Die Möglichkeiten sind zusammengefasst in der folgenden Tabelle ($\|\beta\| \geq \|\alpha\|$):

$n_{\alpha\beta}$	$n_{\beta\alpha}$	$0 \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi$	$\cos(\theta_{\alpha\beta})$	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	0	?
1	1	$\pi/3$	$1/2$	1
-1	-1	$2\pi/3$	$-1/2$	1
2	1	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	2
-2	-1	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	2
3	1	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	3
-3	-1	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	3

Aufgabe 1. Kontrollieren Sie die obenstehende Tabelle.

Definition. Ein Wurzelsystem Φ heißt reduzibel falls $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ und $\Phi_1 \perp \Phi_2$. Wenn Φ nicht reduzibel ist dann heißt es irreduzibel.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{g}$ einfach ist, dann ist das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ irreduzibel.

Aufgabe 3. Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$. Zeigen Sie, dass die Weyl Gruppe irreduzibel auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ wirkt und dass der Orbit einer beliebigen Wurzel den Vektorraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ aufspannt.

Aufgabe 4. Seien α und β zwei Wurzeln gleicher Länge. Zeigen Sie, dass ein Element w der Weyl Gruppe existiert, sodass $w \cdot \alpha = \beta$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. Wir wählen die folgende Basis von $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$:

$$H_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{h} := \mathrm{span}\{H_1, H_2\}$ eine Cartan-Algebra ist.

Sei (π, V) eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Sie dürfen annehmen, dass (π, V) völlig Reduzible ist. Weil $\pi(H_1)$ und $\pi(H_2)$ diagonalisierbar sind und kommutieren können wir sie gleichzeitig diagonalisieren. Sei

$$V_\lambda := \{v \in V : \pi(H)v = \lambda(H)v\},$$

mit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ die Simultane Eigenräumen von $\pi(H_1)$ und $\pi(H_2)$. Wir nennen λ ein *Gewicht* von π wenn $V_\lambda \neq 0$. Wir identifizieren ein Gewicht λ mit dem Paar $(\lambda(H_1), \lambda(H_2)) \in \mathbb{C}^2$. Ein Vektor $v_\lambda \in V_\lambda \backslash \{0\}$ nennen wir einen *Gewichtsvektor zum Gewicht* λ. Bemerken Sie, dass Wurzeln die Gewichten der Adjungierte Darstellung sind. Ein Gewichtsvektor v heißt ein *höchste Gewichtsvektor* falls $\pi(X_i)v = 0$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Zeigen Sie, dass für die Cartan-Algebra $\mathfrak{h}$ die Wurzeln gegeben sind durch:

$$(2,-1),\ (-1,2),\ (1,1),\ (-2,1),\ (1,-2),\ (-1,-1).$$

und geben Sie die Wurzelräumen.

c) Finden Sie ein reguläres Element $H \in \mathfrak{h}$ sodass $\alpha := (2,-1)$ und $\beta = (-1,2)$ einfache positive Wurzeln sind. Zeigen Sie, dass die Kowurzeln von α und β gegeben sind durch $h_\alpha = H_1$ und $h_\beta = H_2$ und geben sie die Cartan-Matrix.

d) Zeigen Sie, dass jedes Element von der Bauart $\pi(Z_1)\pi(Z_2)\ldots\pi(Z_k)$, mit $Z_i \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, geschrieben worden kann als linear Kombination von Elementen der Bauart $\pi(Y_3)^{l_8}\pi(Y_2)^{l_7}\pi(Y_1)^{l_6}\pi(X_3)^{l_5}\pi(X_2)^{l_4}\pi(X_1)^{l_3}\pi(H_2)^{l_2}\pi(H_1)^{l_1}$. (Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach k)

e) Betrachten Sie die Standarddarstellung von $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^3$. Geben Sie einen höchsten Gewichtsvektor e_1 an. Was ist das Gewicht von e_1?

f) Sei $(\mathbb{C}^3)^*$ die Duale Darstellung von der Standarddarstellung. Geben Sie einen höchsten Gewichtsvektor f_1 an. Was ist das Gewicht von f_1?

g) Zerlegen Sie $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ und $\mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)^*$ in irreduzible Unterdarstellungen und geben Sie ihre Gewichten an. (Hinweis: Benutzen Sie d)-f))