Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. Ilka Agricola
Reinier Storm & Marius Kuhrt

Wintersemester 2015

Übungen zur Lie-Gruppen und Lie-Algebren
– Blatt 13 –
Abgabe Montag: 08-02

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 1 (**3.1.5** #5). Sei Φ ein Wurzelsystem einer halbeinfache Lie-Algebra. Seien Δ_1 und Δ_2 zwei Systeme einfacher Wurzeln. Zeigen Sie, dass ein Element w der Weyl-Gruppe existiert, sodass $w\Delta_1 = \Delta_2$.

Aufgabe 2. Sei (π, V) eine Darstellung einer halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit der Wurzelzerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{X}(V)} V_\lambda.$$

Sei (π^*, V^*) die duale Darstellung. Zeigen Sie, dass die Gewichte von π^* genau die negativen Gewichte von π sind.

Aufgabe 3. Notation wie in Aufgabe 5 Blatt 12.

a) Berechnen Sie die Killing-Form auf $\mathfrak{h}$ und auf $\mathfrak{h}^*$ in der Basis α, β. Benutzen Sie die Killing-Form um die Cartan-Matrix auf zu rechnen.

b) Berechnen Sie die Spiegelungen s_α, s_β und $s_{\alpha+\beta}$ in der Basis α, β.

c) Zeigen Sie, dass $s_{\alpha+\beta}$ das Element der Weyl-Gruppe ist mit $s_{\alpha+\beta}\Phi^+ = \Phi^-$.

Aufgabe 4. Sei (π, V) eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ mit höchste Gewicht (n_1, n_2). Zeigen Sie, dass (π^*, V^*) höchste Gewicht (n_2, n_1) hat. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 und 3 um zu zeigen, dass $s_{\alpha+\beta}(-n_1, -n_2)$ ein höchste Gewicht ist. (Sie dürfen annehmen, dass für ein Gewicht λ von π und ein Element der Weyl-Gruppe w gilt, dass $w \cdot \lambda$ auch ein Gewicht von π ist).

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. Sei (π, V) eine endlich-dimensionale Darstellung einer klassischen Lie-Gruppe G. Sei π_* die korrespondierende Darstellung von $\mathrm{Lie}(G) \equiv \mathfrak{g}$. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein Gewicht von π_* und w ein Element der Weyl-Gruppe. Zeigen Sie, dass $w \cdot \lambda$ auch ein Gewicht von π_* ist und dass $\dim(V_\lambda) = \dim(V_{w\cdot\lambda})$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass für es eine einfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ höchstens zwei verschiedene Längen von Wurzeln geben kann. Daher können wir von langen und kurzen Wurzeln reden. Zeigen Sie, dass der Raum, aufgespannt durch die Wurzelräume von langen Wurzeln und langen Kowurzeln, eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie die Tabelle auf Blatt 12.)

Aufgabe 7. Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal und $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Algebrenhomomorphismus

$$U(\rho) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$$

gibt, mit $\ker(U(\rho)) = \mathfrak{a} \cdot U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{a}$, also $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \cong U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{a}$.

Aufgabe 8. Sei $\mathfrak{h}_{2n+1}$ die $(2n+1)$-dimensionale Heisenberg-Algebra:

$$\mathfrak{h}_{2n+1} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z\}, \quad [x_i, y_i] = z \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Die n-te Weyl-Algebra ist gegeben durch

$$A_n := \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z\rangle /I,$$

wobei $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und I das Ideal in der Freien Algebra $\mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z\rangle$ ist, erzeugt durch $x_i x_j - x_j x_i,\ y_i y_j - y_j y_i,\ xy - yx - 1$ für $i, j = 1, \dots, n$ und $x_i y_j - y_j x_i$ für $i \neq j$.

a) Zeigen Sie, dass
$$U(\mathfrak{h}_{2n+1})/(z-1) \cong A_n.$$

b) Wir definieren $p_i, q_i \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[t_1, \dots, t_n])$ durch $p_i(f) = \frac{\partial}{\partial t_i} f$ und $q_i(f) = t_i f$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass die Darstellung (Standard Darstellung von A_n) $\rho : A_n \to \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[t_1, \dots, t_n])$ definiert durch $\rho(x_i) = q_i$ und $\rho(y_i) = p_i$ einen injektiven Algebrenhomomorphismus definiert.