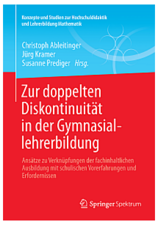


Erschienen in: Ch. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hrsg.),
Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung,
Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013.

Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben

Thomas Bauer

Zusammenfassung

Es besteht in der aktuellen Diskussion zur doppelten Diskontinuität weitgehend Einigkeit darüber, dass sich bei vielen Studierenden die Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik nicht von ganz alleine einstellen, sondern dass hierfür gezielte *Schnittstellenaktivitäten* erforderlich sind. Der Autor verfolgt solche Aktivitäten seit einigen Jahren im Rahmen von speziellen Übungsaufgaben, die innerhalb eines als Schnittstellenmodul konzipierten Analysis-Moduls für Studierende des gymnasialen Lehramts eingesetzt werden. Absicht des vorliegenden Texts ist es, aufzuzeigen, welche Ziele mit solchen Schnittstellenaufgaben verfolgt werden können und dies anhand von zwei Beispielaufgaben zu konkretisieren.

1 Einleitung

Fehlende Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik liegen im Zentrum des Problems der doppelten Diskontinuität: Wenn es nicht gelingt, in der Studieneingangsphase ausreichend stabile Verknüpfungen zwischen den Vorkenntnissen und Vorerfahrungen aus der Schulmathematik und den neu erarbeiteten Inhalten und Denkweisen der Hochschulmathematik aufzubauen, dann besteht die Gefahr, dass Lehramtsstudierende die Letztere als eine zwar zum Absolvieren der Ausbildung erforderliche, aber für die spätere Berufsausübung nicht eigentlich relevante Betätigung wahrnehmen (vgl. Hefendehl-Hebeker 2004, Hefendehl-Hebeker 2012).

Der „richtige" Weg, um solche wichtigen Bezüge zuverlässig herzustellen, liegt zwar keineswegs auf der Hand, es gibt inzwischen jedoch eine Reihe von Ansätzen, um dieses Problem von verschiedenen Seiten her und innerhalb verschiedener institutioneller Gegebenheiten – zum Beispiel hinsichtlich der hierfür verfügbaren Ressourcen – anzugehen (z.B. Leufer und Prediger 2007, Bauer und Partheil 2009, Beutelspacher et al. 2011).

Die bisherigen Erfahrungen weisen darauf hin, dass sich die gewünschten Bezüge bei der Mehrzahl der Studierenden nicht automatisch einstellen – und dass auch gelegentliche diesbezügliche Bemerkungen der Lehrenden meist nicht ausreichen. Vielmehr scheint der Versuch notwendig, sie durch gezielte *Schnittstellenaktivitäten* herzustellen. Mit diesem Ziel bietet der Autor die Analysis-Grundausbildung für Lehramtsstudierende seit einigen Jahren in Form eines *Schnittstellenmoduls* an: Gleichzeitig zum Aufbau der Hochschulanalysis werden dabei

Thomas Bauer, Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße, 35032 Marburg, tbauer@mathematik.uni-marburg.de

Bezüge zwischen Schul- und universitärer Mathematik im Rahmen von Übungsaufgaben gezielt erarbeitet. Dieses Konzept und erste Erfahrungen wurden in Bauer und Partheil (2009) vorgestellt. Die Absicht des vorliegenden Texts ist es, zwei Beispiele solcher *Schnittstellenaufgaben* im Detail zu beleuchten. Es geht uns hier um die Prinzipien und Überlegungen bei der Konzeption und um die Ziele, Einsatzmöglichkeiten und Grenzen solcher Aufgaben. Wir ergänzen dies in Abschnitt 2 durch eine Klassifizierung der in unserem Projekt bislang erarbeiteten Schnittstellenaufgaben in vier Kategorien. Zahlreiche Aufgaben mit kommentierten Lösungsvorschlägen werden in einem Arbeitsbuch zur Verfügung gestellt (Bauer 2012).

2 Schnittstellenaufgaben mit verschiedenen Zielen

Das Konzept, Studierende im Rahmen von Übungsaufgaben zu Schnittstellenaktivitäten anzuregen, wurde in Bauer und Partheil (2009) vorgestellt und durch Beispiele illustriert. Dort sind auch die organisatorischen und institutionellen Rahmenbedingungen angesprochen: Während Übungsaufgaben ganz sicher nicht der einzige Weg zu Schnittstellenaktivitäten sind, bieten sie doch eine Möglichkeit, diese mit den ‚Bordmitteln' eines üblichen Mathematikfachbereichs zu realisieren.[1]

Mit den Aufgaben streben wir sowohl die Wirkrichtung

$$\text{Schulmathematik} \longrightarrow \text{universitäre Mathematik}$$

als auch die umgekehrte Wirkrichtung

$$\text{universitäre Mathematik} \longrightarrow \text{Schulmathematik}$$

an: Schulmathematik und universitäre Mathematik sollen als *füreinander nützlich* und *aufeinander bezogen* erlebt werden. Im Laufe der Arbeit an diesem Projekt haben sich inzwischen vier Kategorien von Schnittstellenaufgaben herausgebildet; sie entsprechen innerhalb des Globalziels, Bezüge zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik herzustellen, verschiedenen Teilzielen:

A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen
B. Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren
C. Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen
D. Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

Nachfolgend erläutern wir diese Kategorien und nennen Beispiele für zugehörige Schnittstellenaufgaben.[2]

[1] Die konkreten Rahmenbedingungen sind in unserem Konzept wie folgt (siehe Bauer und Partheil 2009 für weitergehende Erläuterungen): Die Vorlesung zur Analysis wird für mehrere Studiengänge gemeinsam angeboten (Lehramt und drei Bachelorstudiengänge); die Lehramtsstudierenden erhalten separate Übungen mit speziell dafür ausgewählten Tutoren; auf den wöchentlichen Aufgabenblättern machen Schnittstellenaufgaben einen Anteil von 50 Prozent aus; die Zweiteilung des Übungsbetriebs spiegelt sich in separaten Klausuren wider.

[2] Wie bei vielen derartigen Kategorisierungen ist auch hier die Bemerkung wichtig und richtig, dass die vier hier beschriebenen Kategorien keine einander ausschließenden Aspekte betreffen: Bei zahlreichen Aufgaben lässt sich ohne weiteres mehr als ein einziges Ziel identifizieren. In unserer Praxis haben sich diese Kategorien dennoch als nützlich erwiesen, da bei fast allen von uns konzipierten Aufgaben eines der vier Ziele deutlich dominiert.

A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen

Die Studierenden haben zu vielen Gegenständen der Analysis in der Schulmathematik bereits Grundvorstellungen aufbauen können. Diese in der Studieneingangsphase aufzugreifen, lohnt sich nicht nur unter lernpsychologischen Gesichtspunkten, sondern insbesondere für das Verstehen von Hochschulmathematik:

- Die Studierenden können durch gezielte Anknüpfungen an ihre Vorerfahrungen aus der Schulmathematik bessere Vorstellungen zu Gegenständen der Hochschulmathematik aufbauen – Schulanalysis erweist sich als *nützlich* für Hochschulanalysis.

- Bewusste Anknüpfungen verdeutlichen den Studierenden, dass ihre Vorstellungen ernst genommen, aufgegriffen und weiterentwickelt werden sollen – Schulmathematik erweist sich als *relevant* für Hochschulanalysis.

Es versteht sich, dass es auch notwendig ist, in der Schulmathematik erworbene oder angebahnte Vorstellungen zu erweitern, zu korrigieren oder zu präzisieren – und zwar aus mehreren Gründen: Zum einen kommt es natürlich vor, dass bei Lernenden individuell falsche Vorstellungen vorliegen. Zum anderen sind aber auch gewisse Vorstellungen, die sich innerhalb des schulmathematischens Rahmens als ausreichend erwiesen haben, noch weiterzuentwickeln – nämlich dann,

- wenn sie nicht den gesamten Begriffsumfang erfassen: Dieser Fall liegt beispielsweise beim Integralbegriff vor, wo sich die Behandlung in der Schulanalysis üblicherweise auf stetige oder monotone Funktionen bezieht und in der Regel einen präexistenten Flächeninhaltsbegriff unterstellt;

- wenn die schulmathematische Vorstellung einen Begriff nur vage umschreibt – sei es aus curricularen Gründen oder weil sich der volle Begriffsinhalt prinzipiell der Vorstellung entzieht (wie etwa im Falle des Stetigkeitsbegriffs).

Diese Aspekte notwendiger Weiterentwicklung von Vorstellungen zeigen, dass das Unterrichten von Hochschulanalysis ein ausgesprochen komplexes Unterfangen ist, das viele Facetten des Lernens betrifft. Insbesondere ist die lerntheoretische Grunderkenntnis zu berücksichtigen, dass Lernen stets ein *kumulativer* und *irreversibler* Prozess ist: Selbst eingeschränkte oder falsche Vorstellungen müssen bewusst erweitert bzw. überwunden werden – es gibt beim Lernen keine „Reboot“-Möglichkeit, die Vorheriges ungeschehen machen würde.

Ein Beispiel für eine Aufgabe in dieser Kategorie stellt die „Edersee-Aufgabe“ aus Bauer und Partheil (2009, §3) dar, in der es um das Zusammenwirken verschiedener Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff geht. Weitere Beispiele (aus Bauer 2012) betreffen den Integralbegriff (etwa zur Mittelwertvorstellung) oder Aufgaben zu Reihen, in denen vorhandene Vorstellungen zur Summation weiterentwickelt werden.

B. Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren

Es gibt viele Fälle, in denen in Schulmathematik und Hochschulmathematik derselbe Begriff oder Sachverhalt behandelt wird, allerdings mit wesentlich verschiedenen Zugängen. Hierbei meinen wir mit dem Begriff *Zugang* nicht die unterrichtlich-methodischen Aspekte (in denen es selbstverständlich ebenfalls signifikante Unterschiede gibt), sondern die sachlogische Vorgehensweise, die auch die Anforderungen an den Weg, der dem fraglichen Begriff oder Sachverhalt vorausgeht, und die Konsequenzen für deren weitere Verwendung einschließt. Ein konkretes Beispiel soll dies verdeutlichen:

- Sinus- und Kosinusfunktion werden im gymnasialen Unterricht üblicherweise durch Bezugnahme auf Streckenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert.

- Im Rahmen einer Analysisvorlesung werden diese Funktionen meist durch Bezugnahme auf die komplexe Exponentialfunktion oder direkt über ihre Reihendarstellung definiert.

Die beiden Zugänge sind offenbar verschieden und stehen zunächst unverbunden nebeneinander. Die Gefahr der Diskontinuität liegt auf der Hand: Die hochschulmathematische Behandlung kann von Lehramtsstudierenden als „für die Schule irrelevant“ gesehen werden, da weder die komplexe Exponentialfunktion noch Potenzreihen im Zentrum der schulmathematischen Behandlung stehen. Vom Standpunkt der Analysisvorlesung ist der Blick auf den Einheitskreis und damit der Hinweis auf Streckenverhältnisse zwar durchaus naheliegend – aber reicht dieser Hinweis aus, um die Diskontinuität aufzulösen?

Ziel von Schnittstellenaufgaben kann es sein, die Unterschiede in Zugängen genauer zu verstehen und auch die Gründe zu beleuchten, die zur Wahl des einen oder anderen Zugangs führen. Im betrachteten Beispiel der Sinusfunktion kann eine solche Analyse bewusst machen, dass der schulmathematische Zugang einen präexistenten Winkelmaßbegriff voraussetzt, der im hochschulmathematischen Aufbau an dieser Stelle noch nicht verfügbar ist, während umgekehrt der hochschulmathematische Zugang offenbar Werkzeuge nutzt, die in der Schulmathematik üblicherweise nicht zugreifbar sind.

Wenn wir in Schnittstellenaufgaben zu solchen Analysen anregen, dann sind damit Einsichten folgender Art intendiert:

- Es gibt nicht den einen „richtigen“ Zugang zu einem mathematischen Begriff oder Satz.

- Verschiedene Zugänge sind andererseits in einer konkreten Lern- oder Unterrichtssituation auch nicht beliebig gegeneinander austauschbar (oder eine reine Geschmacksfrage). Vielmehr hängt es von verschiedenen, nicht nur lokalen Faktoren ab, ob ein bestimmter Zugang günstig, praktikabel oder überhaupt durchführbar ist. Globale Faktoren, die den Aufbau des Gedanken- bzw. Theoriegebäudes insgesamt und die beabsichtigte Organisation des Lernprozesses betreffen, können entscheidenden Einfluss haben.[3]

- Die so verstandenen Kriterien können durchaus konkurrierend auftreten und daher ein didaktisch begründetes Abwägen und Entscheiden erforderlich machen. Dies ist ein anspruchsvoller Aspekt des Unterrichtens.

Neben dem angesprochenen Beispiel der trigonometrischen Funktionen (siehe auch Abschnitt 3) bieten auch Potenzen mit irrationalen Exponenten (siehe Bauer und Partheil 2009, §3) ein tragfähiges Beispiel für die Analyse von Zugängen: Werden diese als Grenzwerte von Potenzen mit rationalen Exponenten eingeführt oder mittels der Exponentialfunktion? Weitere Beispiele dieser Kategorie (aus Bauer 2012) sind Aufgaben, die sich mit verschiedenen Möglichkeiten zur Einführung der Wurzelfunktion und mit Zugängen zu Logarithmus- und Exponentialfunktion befassen.

In solchen Aufgaben wird ein Spektrum hinsichtlich der Tragweite deutlich, die Entscheidungen zwischen verschiedenen möglichen Zugängen haben können:

- Manche Entscheidungen haben in sachlogischer Hinsicht nur lokal begrenzte Auswirkungen: Was im einen Zugang eine Definition ist, tritt im anderen Zugang kurzzeitig später als Satz auf, und umgekehrt. In lernpsychologischer Hinsicht können aber auch solche Entscheidungen weitreichend sein: Der erste kennengelernte Zugang ist häufig prägend.

[3]Um diese zentrale Einsicht zu fördern, wird in Aufgabe 2c (siehe Abschnitt 3) das Darstellungsmittel der *Argumentationsgraphen* eingesetzt.

- Andere Entscheidungen haben auch sachlogisch weitreichende Konsequenzen. Ein extremes Beispiel dieser Art stellt der Kleinsche Zugang zu Exponential- und Logarithmusfunktion dar, der geradezu ‚am anderen Ende' beginnt und damit die übliche Vorgehensweise auf den Kopf stellt.

Neben solche Fragen, die den lokalen und globalen Aufbau betreffen, treten weitere wesentliche Vergleichskriterien, wie zum Beispiel:

- Welcher Zugang liegt den zu einem Begriff gehörigen Grundvorstellungen nahe? Welcher erleichtert oder erschwert den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen?

- Welcher Zugang beinhaltet eine Berechnungsmöglichkeit für das definierte Objekt? (Man vergleiche beispielsweise die Beschreibung reeller Zahlen über Dedekindsche Schnitte mit der Beschreibung über Intervallschachtelungen.)

C. Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen

Während die Nützlichkeit und Relevanz von hochschulmathematischen Fähigkeiten in Bezug auf den Umgang mit Schulmathematik in den Kategorien A, B und D vorrangig in *prozessbezogenen* Fähigkeiten zum Tragen kommt, kann man auch nach einer unmittelbaren *inhaltsbezogenen* Nützlichkeit von Hochschulmathematik für schulmathematische Problemstellungen fragen. Etwa: Gibt es Fragestellungen, die für Schüler verständlich sind, deren Bearbeitung sich aber erst durch die Verfügbarkeit mathematischer Mittel eröffnet, die die Hochschulmathematik anbietet?

Geeignete Schnittstellenaufgaben können eine so verstandene inhaltsbezogene Nützlichkeit aufzeigen. Dabei gibt es sowohl Fälle, in denen im Rahmen der Schulmathematik immerhin Plausibilitätsüberlegungen möglich sind (oder Appelle an die Anschauung), als auch Fälle, in denen die hochschulmathematischen Möglichkeiten überhaupt erst einen adäquaten Zugriff ermöglichen. In der in Abschnitt 3 behandelten Aufgabe zum qualitativen Verständnis von Funktionen kommen beide Fälle vor: Zum einen liefert dort ein in der Schulmathematik nicht verfügbares analytisches Argumentationsmittel (der Mittelwertsatz) eine stichhaltige Begründung für eine anschaulich vermutete Aussage; zum anderen ermöglichen hochschulmathematische Kenntnisse die Beantwortung der schulmathematisch formulierbaren Frage, ob Polynomfunktionen ein gewisses gefordertes Verhalten haben können.

Wir nennen einige weitere Beispiele für Schnittstellenaufgaben aus dieser Kategorie (siehe Bauer 2012):

- Aufgaben, die das vertiefte Verständnis elementarmathematischer Begriffe wie Winkel und Bogenlänge zum Ziel haben;

- Aufgaben, die aufzeigen, an welchen Stellen Analysis in der Elementargeometrie von Bedeutung ist: Dort erlauben Überlegungen zu Grenzwerten und die Verwendung von Begriffen wie Monotonie, Supremum und Infimum gewisse Betrachtungen ‚zum Unendlichen', die in geometrischen Situationen auftreten, dort aber in der Schulmathematik nicht so thematisiert werden (können);

- eine Aufgabe zu Potenztürmen, in der eine für Schüler naheliegende Problemstellung mittels Iterationsfolgen und Sätzen über Grenzwerte gelöst werden kann;

- eine Aufgabe zur Fibonacci-Folge, in der Werkzeuge der Analysis eingesetzt werden, um grundlegende Eigenschaften dieser populären und in vielen Zusammenhängen auftretenden Folge zu verstehen;

- eine Aufgabe, in der es gelingt, mit den Mitteln der Analysis Paradoxa zu erklären, die bei der Approximation von Kurven auftreten.

D. Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

In dieser Kategorie sind eine Reihe von Komponenten mathematischen Arbeitens angesprochen:

- *Definieren lernen.* Dies beinhaltet u.a. die Fähigkeit, selbst Definitionen auszusprechen sowie vorhandene Definitionen auf ihre Konsequenzen hin zu analysieren. (Letzteres spielt auch bei der Analyse von Zugängen in Kategorie B eine wichtige Rolle.)
- *Beweisen lernen.* Neben dem in der Hochschulmathematik selbstverständlich geforderten eigenständigen Durchführen von Beweisen und dem Überprüfen von gegebenen Argumentationen auf Stichhaltigkeit gibt es hier weitere Fähigkeiten, die besonders für Lehramtsstudierende wesentlich sind: Argumentieren in unterschiedlichen Begründungsebenen und auf Grundlage unterschiedlicher Begründungsbasen (s. unten).
- *Vermutungen finden* auf Grundlage von in Beispielen studierten Phänomenen,
- *Beispiele und Gegenbeispiele finden/konstruieren* zu Begriffen und Sätzen.

Bewusstes und angeleitetes Reflektieren mathematischer Arbeitsweisen ist nach Ansicht des Autors eine wichtige Komponente der Schnittstellenbemühungen. Das Gelingen oder Misslingen solcher Reflexion spiegelt sich zum Beispiel darin wider, welche der beiden folgenden Aussagen ein Student zum Thema ‚Beweisen' formulieren würde:

- „Das könnte man dann noch so formal beweisen. So machen die Mathematiker das eben."
- „Wir verfügen in der Mathematik über leistungsfähige Argumentationsmittel, die uns sowohl von den Beschränkungen der geometrischen Anschauung als auch von Meinungen unabhängig machen."

Der Unterschied drückt sich nicht nur im „die" und „wir" aus, in dem der Grad der empfundenen Zugehörigkeit sichtbar wird, sondern deutet auch auf ein unterschiedliches Verständnis dessen hin, was Beweisen bedeutet und welchen Zwecken es dienen kann.

Ein typisches Beispiel einer Aufgabe aus Kategorie D ist die „Backblechaufgabe" aus Bauer und Partheil (2009, §3). Dort geht es um *Backblechbeweise* für Summenformeln, die im Rahmen einer Analysisvorlesung traditionell per Induktion gezeigt werden. Sie intendiert neben dem Kennenlernen von geometrischen und operativen Beweistechniken auch die Beschäftigung mit der Frage „Was leistet ein Induktionsbeweis?", die etwa zu der Einsicht führt, dass für die Zwecke eines Induktionsbeweises die zu beweisende Summenformel bereits vorab als Vermutung bekannt sein muss, während ein Backblechbeweis das Auffinden der Formel erlaubt. In unserer Erfahrung mit dieser Aufgabe hat sich gezeigt, dass die Diskussion mit Studierenden bis hin zu der Frage „Wann ist ein Beweis ein Beweis?" führt, die ein Weiterarbeiten mit dem gleichnamigen Aufsatz von Wittmann und Müller (1988) nahelegt.

Für Lehramtsstudierende liegt im Blick auf ihre spätere eigene Lehrtätigkeit eine wichtige Erkenntnis darin, dass Argumentieren und Beweisen im Rahmen der Schulmathematik nicht bedeutet, in mehreren Stufen „immer ungenauer" zu werden. Vielmehr geht es darum, die *Begründungsbasis* der Lernstufe angepasst zu wählen – in einer so geschaffenen Begründungsumgebung ist es dann durchaus möglich, stichhaltiges Argumentieren zu üben. Diesen Anspruch im Unterricht einzulösen erfordert einen kompetenten und reflektierten Umgang mit Argumentationsebenen. Der in einer Hochschulvorlesung erarbeitete rigorose Aufbau kann hier die wichtige Aufgabe übernehmen, zum Verständnis der ‚inneren Mechanik' eines solchen deduktiven Aufbaus zu führen.[4]

Weitere mögliche Aufgaben (siehe Bauer 2012) dieser Kategorie befassen sich mit

- dem Vergleich von äquivalenten Definitionen des Differenzierbarkeitsbegriffs unter verschiedenen Gesichtspunkten,
- einem Auftrag, ausgehend von geometrischen Vorstellungen selbständig einen Konvergenzbegriff für Geraden in der Ebene zu entwickeln,
- dem Auftrag, einen alternativen Definitionsvorschlag für den Integralbegriff im Sinne eines hypothetischen ‚Forschungsprojekts' zu untersuchen.

3 Zwei Schnittstellenaufgaben in einer Detailbetrachtung

Wir wenden uns nun zwei konkreten Beispielen für Schnittstellenaufgaben zu, die den Kategorien C bzw. B zugeordnet werden können. Die Aufgabentexte stehen im Anhang als Kopiervorlagen bereit. Darüber hinaus sind in Bauer (2012) kommentierte Lösungsvorschläge für Studierende ausgearbeitet. Im vorliegenden Text geht es uns darum, aus Perspektive der Lehrenden die Überlegungen bei der Konzeption und die Ziele, Einsatzmöglichkeiten und Grenzen solcher Aufgaben zu beleuchten.

Eine Bemerkung zur Auswahl der hier behandelten Aufgaben: Schnittstellenaufgaben können sowohl im Spektrum

$$\text{Schulmathematik} \longleftrightarrow \text{Hochschulmathematik}$$

als auch auf einer Skala, die zwischen den Arbeitsbereichen

$$\text{Fachdidaktik} \longleftrightarrow \text{Fachinhalt}$$

vermittelt, an vielen möglichen Zwischenpositionen ansetzen. Die beiden hier behandelten Aufgaben sollen zeigen, dass Schnittstellenaktivitäten nicht prinzipiell ‚schulmathematisch-elementar' sein müssen oder zwingend einen fachdidaktischen Schwerpunkt erfordern. Vielmehr ist es auch möglich, von in Analysisvorlesungen durchaus nicht unüblichen Fragestellungen auszugehen und dabei mittels gezielter Standpunktverlagerungen und geeigneter Ergänzungen die in Abschnitt 2 beschriebenen Intentionen zu verfolgen.

Zu Aufgabe 1 (Aufgabentext siehe Anhang): *Funktionen qualitativ verstehen*

Einordnung und Kontext: Die Aufgabe beginnt in Teil (a) mit der Festigung von Grundvorstellungen (Kategorie A) und setzt dann in (b) und (c) einen Schwerpunkt in Kategorie C.

Der Vorlesungskontext der Aufgabe ist die Untersuchung von Monotonie, Extrema und Krümmungsverhalten einer Funktion mit den Mitteln der Analysis. Auf Grundlage des Mittelwertsatzes wurden die einschlägigen Sätze über den Zusammenhang dieser Funktionseigenschaften mit dem Vorzeichen- und Nullstellenverhalten der Ableitung bewiesen.

[4] Wenn hier von *deduktivem Aufbau* die Rede ist, dann meinen wir die Art und Weise, wie der behandelte Wissensbestand in rigoroser Weise in einen globalen Zusammenhang gebracht wird. Vielfach wird mit dem Begriff *Deduktion* dagegen ein bestimmter Darstellungsmodus assoziiert, bei dem Mathematik motivationslos als fertig konstruiertes Gedankengebäude präsentiert wird, ohne das Entstehen dieses Gebäudes und die dazu angestellten Überlegungen und Entscheidungen sichtbar zu machen. Das meinen wir hier nicht.

Aufgabenteil a) *Funktionsverlauf gesucht.* Die Aufgabe beginnt mit dem Auftrag, einen möglichen Verlauf des Graphen einer Funktion f anzugeben, bei der ein gewisses Vorzeichenverhalten von f' und f'' gegeben ist. Dieser qualitative Arbeitsauftrag ist mit der Absicht gegeben, eine vorschnelle Kalkülorientierung zu vermeiden bzw. eine eventuell vorhandene abzubauen: Es sind nicht rechnerische Fähigkeiten, die zur Lösung führen, sondern sicherer Umgang mit inhaltlichen Vorstellungen (insbesondere mit Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff).[5] Benötigt werden konkret die folgenden Aussagen:

- Gilt für eine differenzierbare Funktion f auf einem Intervall die Ungleichung $f' > 0$ bzw. $f' < 0$, so ist f dort streng monoton steigend bzw. fallend.
- Gilt für eine zweimal differenzierbare Funktion f auf einem Intervall die Ungleichung $f'' > 0$ bzw. $f'' < 0$, so ist der Graph von f dort streng linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt.

Aufgabenteil b) *Geht es immer?* Hier geht es darum, ob beliebige Nullstellenvorgaben (und damit insbesondere Vorzeichenvorgaben) wie in Teil (a) durch Funktionen tatsächlich realisiert werden können. Die durch einen „Tipp" ausdrücklich angeregten zeichnerischen Versuche lassen rasch die Vermutung entstehen, dass dies für die gegebene Nullstellenverteilung nicht möglich ist, da beim Zeichnen zwischen den beiden Nullstellen von f' eine Nullstelle von f'' „untergebracht" werden muss. Diese suggestive Vorstellung lässt sich durch ein Argument mit dem Mittelwertsatz, angewandt auf f', absichern und erklären: Sind a und b Nullstellen von f', so gibt es eine Stelle c zwischen a und b mit der Eigenschaft

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c)$$

Da nach Voraussetzung $f'(a) = f'(b) = 0$ gilt, folgt $f''(c) = 0$ und somit ist c eine Nullstelle, wie sie intuitiv erwartet wurde. Man kann natürlich auch direkt mit dem Satz von Rolle argumentieren, der ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist.

Bemerkungen: Es ist für diese Aufgabe wichtig, dass das Spannungsverhältnis zwischen Anschauung und analytischer Argumentation bereits vorab ausgelotet wurde. Die Aufgabe ist nicht dafür konzipiert, die Notwendigkeit von stichhaltigen, von der geometrischen Anschauung unabhängigen Argumenten zu klären oder ein Bedürfnis nach solchen zu wecken. Zu diesem Zweck könnten geeignete der Anschauung zuwiderlaufende Beispiele (wie etwa stetige, nirgends differenzierbare Funktionen) als Anstoß dienen. Wir möchten aber den Eindruck vermeiden, dass anschauungsunabhängige Argumente ausschließlich dazu benötigt werden, um mit „Monstern" umgehen zu können. Es handelt sich hierbei um einen komplexen Lernprozess, der das Verstehen der Begründungsbasis und der verwendeten Begründungsmittel einerseits und die Einsicht in Vorteile und Notwendigkeit eines rigorosen Theorieaufbaus andererseits umfasst. Nach Meinung des Autors kommt hier der Vorlesung eine wichtige Funktion zu. In der vorliegenden Aufgabe geht es eher darum, ein Maß an Beweglichkeit zu erlangen, das es erlaubt, sowohl geometrische Intuition als auch eine durch Mittel der Hochschulmathematik ermöglichte stichhaltige Argumentation adäquat einzusetzen.

Aufgabenteil c) *Realisierbarkeit in bestimmten Funktionsklassen.* Erst in diesem letzten Teil der Aufgabe treten konkrete Funktionen auf den Plan. Neben den dabei möglichen Aktivitäten

[5] Die Aufgabe hat eine Verwandschaft zu den im gymnasialen Unterricht bekannten *Steckbriefaufgaben*, bei denen aus gegebenen Informationen ein Funktionsterm ermittelt werden soll. Im Unterschied dazu ist allerdings in der vorliegenden Aufgabe das Auffinden eines Funktionsterms nicht das primäre Ziel (selbst wenn in Teil c) nach möglichen Realisierungen gefragt wird); ohnehin ist die Funktion durch die angegebenen Eigenschaften nicht eindeutig bestimmt.

trägt dies auch dem natürlichen Bedürfnis der Lernenden nach Konkretisierung Rechnung und führt unter anderem zu einer tatsächlichen Realisierung des in (a) beschriebenen Funktionsverhaltens.

Während quadratische und kubische Funktionen rasch ausscheiden, da deren zweite Ableitung keine bzw. nur eine Nullstelle hat, zeigt eine naheliegende Rechnung, dass eine Funktion des Typs $x \mapsto (x^2 + c)e^x$ das beschriebene Verhalten (und die angegebenen Nullstellen) hat. Herausfordernder ist die letzte, auf Polynomfunktionen bezogene Frage.

Weitere Kommentare zur Aufgabe. Dem fortgeschrittenen Bearbeiter der Aufgabe fällt auf, dass die an f' und f'' gestellte Frage zu einer Frage über f und f' äquivalent ist. Man könnte die Aufgabe von vorneherein so formulieren oder aber den Lernenden durch einen entsprechenden Hinweis zu dieser Bearbeitungsweise führen. Stattdessen stellen wir die Aufgabe bewusst in der vorliegenden Form – die Erkenntnis, dass die *Reduktion* auf eine einfachere Situation Vorteile bringt, belassen wir als Möglichkeit der Entdeckung durch den Lernenden selbst oder als nachträgliches Aha-Erlebnis bei der Diskussion der Aufgabe im Tutorium.

Zu Aufgabe 2 (Aufgabentext siehe Anhang): *Differenzierbarkeit der Sinusfunktion*

Einordnung und Kontext: Es handelt sich um eine Aufgabe aus Kategorie B, in der es um verschiedene Zugänge zur Differenzierbarkeit der Sinusfunktion geht. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs differenzierbare Funktionen darstellen, deren Ableitung durch gliedweises Differenzieren ermittelt werden kann. Die Sinusfunktion war unter Bezugnahme auf die komplexe Exponentialfunktion definiert worden, so dass für sie eine Potenzreihendarstellung unmittelbar verfügbar war. Dieser Zugang war gewählt worden, um die Stärke von Potenzreihenargumenten sichtbar zu machen.[6]

Im Rahmen der vorliegenden Aufgabe wird ein alternativer Zugang, der auch in gymnasialen Unterrichtswerken Verwendung findet, erarbeitet und dem Vorlesungszugang gegenübergestellt. Ein Argumentationsgraph zeigt auf, welchen Unterschieden in den Argumentationswegen und Begriffsbasen die beiden Zugänge entsprechen.

Aufgabenteil a) *Eine alternative Argumentation.* Die Aufgabe beginnt mit einem sehr eng geführten Teil, der auf einen Beweis hin orientiert ist, der die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion auf Grundlage folgender Aussagen zeigt:

(i) Additionstheorem der Sinusfunktion

(ii) $1 - \cos h = 2(\sin \frac{h}{2})^2$ für alle $h \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Aufgabenteil b) *Benötigte Vorkenntnisse.* Dieser Aufgabenteil ist offener gehalten, denn zu den drei in der Argumentation benutzten Aussagen kann man auf verschiedene Weisen gelangen. Diesbezügliche Recherchen der Studierenden können beispielsweise beim Additionstheorem der Sinusfunktion mehrere Zugänge aufzeigen:

- über Flächeninhalte von Dreiecken wie in Abb. 3
- aus dem Sinussatz wie in Feuerlein und Distel (2008)
- aus Überlegungen am Einheitskreis wie in Lambacher Schweizer (1997)

[6] Neben ihrer innermathematischen Bedeutung stellen Potenzreihen auch für viele Anwender, etwa die ebenfalls an der Vorlesung teilnehmenden Physikstudierenden, zentrale Werkzeuge dar.

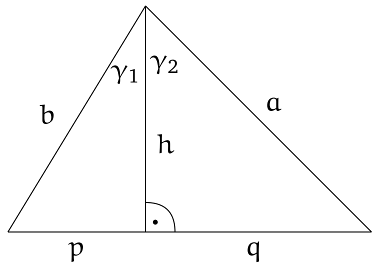


Abb. 1: Ein Beweis des Additionstheorems der Sinusfunktion durch Bezugnahme auf Dreiecksflächen: Den Flächeninhalt erhält man einerseits bei Betrachtung der zwei Dreiecke mit den Grundlinien p bzw. q und andererseits bei Betrachtung des Gesamtdreiecks (unter Verwendung von a oder b als Grundlinie)

Aussage (ii) lässt sich als Folgerung aus dem Additionstheorem der Kosinusfunktion erhalten (welches wiederum aus dem der Sinusfunktion gefolgert werden kann). Für Aussage (iii) findet sich in gymnasialen Unterrichtswerken ein elementargeometrischer Zugang über Flächeninhalte, bei dem der Flächeninhalt eines Kreissektors mit Dreiecksflächeninhalten verglichen wird (siehe z.B. Lambacher Schweizer 2005).

Aufgabenteil c) *Argumentationsgraph.* Dieser abschließende Aufgabenteil schafft Übersicht über das erarbeitete Argumentationsgefüge und insbesondere über die dabei möglichen Alternativen. In den Präsenzübungen können die gefundenen alternativen Wege zusammen- und gegenübergestellt werden. Anhand des Argumentationsgraphen wird deutlich, dass in diesem Beispiel die Wahl eines Zugangs weitreichende Konsequenzen für den Theorieaufbau hat. Es lassen sich sodann die in Abschnitt 2 betonten Aspekte erörtern, dass es nicht den einen „richtigen" Zugang gibt und dass verschiedene Zugänge in gegebener Lern- und Unterrichtssituation nicht beliebig gegeneinander austauschbar sind. An dieser Stelle kann auch die Rolle des Winkelbegriffs thematisiert werden, der in den beiden hier behandelten Zugängen wesentlich verschieden auftritt. Wir geben in Abbildung 2 ein Beispiel für einen möglichen Argumentationsgraphen an. Es versteht sich, dass ein solcher Graph nie eindeutig oder gar „vollständig" ist: Insbesondere kann man ihn nach oben fortsetzen, indem man immer weiter zurückfragt, worauf die jeweiligen Sätze oder Begriffe basieren. Oder man erweitert ihn um weitere Alternativen – als Beispiel enthält der Vorschlag in Abb. 2 die in Abschn. 4 angesprochene Alternative nach Jänich (2003, Kap. 1) als Teilast ganz links. Abbildung 2 stellt somit sicherlich keine „Musterlösung" dar – es ist eine mögliche Darstellung, die bei der Bearbeitung der Aufgabe gefunden werden kann und die sich als Ausgangspunkt für eine weitere fruchtbare Diskussion nutzen lässt.

Eine Bemerkung zur Notation: Im Argumentationsgraphen symbolisieren die von einem Knoten (Begriff oder Satz) nach oben ausgehenden Kanten mehrere alternative Wege, die zu diesem Begriff oder Satz führen. Es gibt Anlässe (zum Beispiel beim lokalen Ordnen), bei denen man mit einer graphischen Darstellung nicht die so verstandene *Oder*-Verknüpfung, sondern eine *Und*-Verknüpfung ausdrücken möchte – in dem Sinne, dass mehrere Begriffe oder Sätze gleichzeitig benötigt werden, um zu dem betreffenden Knoten zu gelangen. Möchte man Argumentationsgraphen häufiger einsetzen, so kann es von Nutzen sein, eine Symbolik zu vereinbaren, die diesen Unterschied direkt in der graphischen Darstellung zum Ausdruck bringt. Bei gelegentlicher Nutzung wird es dagegen ausreichen, jeweils vorab auszuweisen, wie der Graph zu verstehen ist.

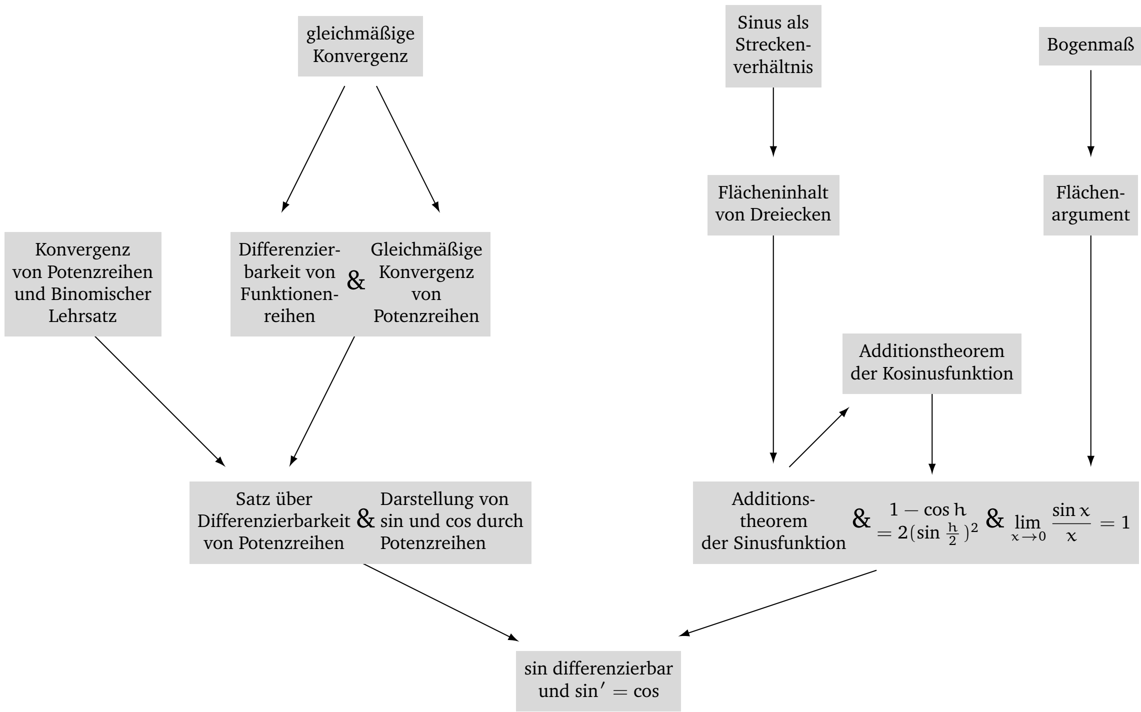


Abb. 2: Ein möglicher Argumentationsgraph zu Aufgabe 2c

4 Anknüpfungspunkte zum Weiterarbeiten

Bei der Frage, in welchen Ausmaß eine gestellte Aufgabe Anknüpfungspunkte zum (evtl. selbständigen) Weiterarbeiten beinhalten oder explizit ausweisen sollte, wird ein Spannungsverhältnis offenbar:

- Einerseits können Gelegenheiten zum Weiterdenken und Weiterarbeiten wesentliche Bereicherungen einer Aufgabe darstellen. Sie unterstützen den Lernprozess dadurch, dass der Lernende über die aktuelle Aufgabe ‚hinausdenkt' oder durch sie an neue Probleme und Phänomene herangeführt wird. Im Idealfall erscheint die Aufgabe nicht mehr als isoliertes Problem, sondern wird eingebettet in den Aufbau des gesamten Gedankengebäudes und den damit verbundenen längerfristigen Lernprozess. Vielleicht kann im kleinen Rahmen sogar der forschungsoffene Charakter der Wissenschaft Mathematik angedeutet werden.

- Andererseits gilt es, das natürliche Bedürfnis der Lernenden nicht außer Acht zu lassen, dass Arbeitsaufträge ein ‚definiertes Ende' besitzen sollten. Das Gefühl, eine Aufgabe vollständig bearbeitet und gelöst zu haben, ist für die Selbstbestätigung und für die durch das Mathematiktreiben erreichte Zufriedenheit wichtig. Dies kann in Gefahr geraten, wenn Aufgaben das Gefühl auslösen, es seien ‚mehr Fragen aufgeworfen als beantwortet' worden (selbst wenn dies im Grunde eine adäquate Beschreibung forschenden Mathematiktreibens darstellt).

Unsere pragmatische Vorgehensweise beim Umgang mit diesem Spannungsverhältnis ist wie folgt: Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie nach Möglichkeit vielfältige Gelegenheiten zum Weiterdenken und Weiterarbeiten beinhalten. Einige, aber nicht alle dieser Anknüpfungspunkte sind explizit so ausgewiesen und damit als nicht verpflichtende, weitergehende interessante

Aufträge verstanden. Diejenigen Anknüpfungspunkte, die nicht explizit formuliert sind, werden bewusst dem eigenen Entdecken oder der gemeinsamen Diskussion im Tutorium überlassen (beispielsweise der unten angesprochene Bezug zu Pythagoräischen Tripeln bei Aufgabe 1). Selbstverständlich gibt es hier viel Spielraum, die vorliegenden Aufgaben zu variieren.

Anknüpfungspunkte bei Aufgabe 1

Die Aufgabe bietet vielfältige Möglichkeiten zum Weiterarbeiten und hat sogar Anknüpfungspunkte zur Zahlentheorie.

Weiterarbeiten in analytischer Richtung:
Die Aufgabe hat gezeigt, dass Polynomfunktionen kein Verhalten haben können, das dem in (a) Beschriebenen entspricht. Als Realisierungsmöglichkeit wurde eine Funktion vom Typ $x \mapsto (x^2 + c)e^x$ gefunden. Naheliegend ist die Frage, ob es zu beliebig gegebenen Punkten $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gibt, so dass

- f' auf $]x_2, x_4[$ negativ und sonst positiv ist, und
- f'' auf $]x_1, x_3[$ negativ und sonst positiv ist.

Lässt sich dies durch Funktionen des obigen ‚Polynom-mal-Exponentialfunktion'-Typs oder durch stückweise Zusammensetzungen von solchen erreichen?

Weiterarbeiten in zahlentheoretischer Richtung:
Mehrere Kollegen, die die Aufgabe gesehen haben, sagten spontan „Kannst Du die Aufgabe nicht mit schöneren Zahlen stellen?" Sie beziehen sich dabei auf die Wurzelausdrücke, die in Aufgabenteil (a) als Nullstellen von f'' auftreten. Woher rühren diese? Wenn eine Realisierung durch eine ‚einfache' Funktion der Form $x \mapsto (x^2 - c)e^x$ möglich sein soll, dann führt der einzig mögliche Wert von c auf die angegebenen irrationalen Nullstellen.

Wünschenswert wären dagegen *rationale* Nullstellen. Wie könnte man zu Funktionen gelangen, die dies realisieren? Eine Idee: Wir erweitern den Suchkreis ein wenig und betrachten Funktionen der Form $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Die Forderung, dass die Nullstellen von f' und f'' (oder die von f und f') rational sind, führt auf die Bedingung, dass zwei dabei auftretende Diskriminanten Quadratzahlen sind. Diese Bedingung wiederum lässt sich als ein System aus zwei diophantischen Gleichungen formulieren. In dieser Situation sind zwei Möglichkeiten für das weitere Vorgehen denkbar.

- *experimentell:* Durch systematisches Probieren lassen sich hier ganzzahlige Lösungen des Gleichungssystems finden.
- *konzeptuell:* Die Formulierung als diophantisches Problem kann zu einer vertiefenden Beschäftigung mit elementarer Zahlentheorie anregen; eine der beiden Gleichungen wird durch Pythagoräische Tripel gelöst.

Durch diese Überlegungen lassen sich in der Tat Koeffizienten a, b, c finden, so dass die vier fraglichen Nullstellen alle rational sind. Warum ist die Funktion nicht von Anfang an so vorgegeben?

- Eine auf diese Weise modifizierte Aufgabe hat zwar die „schöneren" Zahlenwerte, verbirgt aber durch ihr glattgebügeltes Äußeres eine spannende Frage und verstellt die Option, den Studierenden eine motivierende Anregung zum Weiterarbeiten zu belassen.

- Dazu ein ganz pragmatischer Grund: Die für das Zeichnen notwendige Abschätzung der Größe von Wurzelausdrücken ist ein durchaus sinnvolles Lernziel.

Anknüpfungspunkte bei Aufgabe 2

Auch hier bieten sich mehrere Gelegenheiten zum Weiterarbeiten an. Zum einen gibt es eine Reihe von alternativen Argumentationsmöglichkeiten, die sich mit Gewinn in die Überlegungen einbeziehen lassen:

- Neben der in Aufgabenteil (a) betrachteten Beweisversion sind mehrere andere Varianten möglich, wie etwa die in Forster (2011, §15) durchgeführte und auch im Unterrichtswerk Lambacher Schweizer (2005) verwendete Version. In dieser wird zusätzlich die Stetigkeit der Kosinusfunktion benötigt. (Dies führt in Abb. 2 zu einer Verzweigung im rechten Teil des Argumentationsgraphen.)
- Auch im eingangs der Aufgabe genannten Vorlesungszugang sind Varianten möglich, die weiteren Verzweigungen im linken Teil des Argumentationsgraphen (Abb. 2) entsprechen. Man kann zum Differenzierbarkeitssatz für Potenzreihen auf verschiedenen Wegen gelangen:
  - als Spezialfall des Differenzierbarkeitssatzes für Funktionenfolgen,
  - mit einem direkten Potenzreihen-Beweis, der nicht auf allgemeine Aussagen über Funktionenreihen zugreift, wobei auch hier wiederum Varianten bekannt sind: eine Variante unter Benutzung des Stetigkeitssatzes wie in Ebeling (2001, Kap. 2) und eine Variante, die wie in Jänich (2003, Kap. 1) ohne einen solchen Stetigkeitssatz auskommt und dafür im Gegenzug vom Binomischen Lehrsatz ausgehend etwas aufwendigere Potenzreihenüberlegungen anstellt.

Neben der Anreicherung um solche alternativen Argumentationswege legt die Aufgabe als weitere Betrachtungsrichtung eine Fokussierung auf den Winkelbegriff nahe: Wie lässt sich der verschiedene Umgang mit ihm in Elementargeometrie und Analysis charakterisieren? Wodurch wird die Kompatibilität gesichert?

Danksagung. Ich danke meinen Kollegen W. Gromes, J. Hinz und U. Partheil für wertvolle Anmerkungen und Anregungen.

Literatur

Bauer, Th. (2012). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Springer Spektrum, Wiesbaden.

Bauer, Th., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Math. Semesterber. 56*, 85-103.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R. ,Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Ebeling, W. (2001). *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten.* Vieweg.

Feuerlein, R., Distel, B. (2008). *Mathematik 10. Unterrichtswerk für das G8.* Bayerischer Schulbuch Verlag.

Forster, O. (2011). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Vieweg+Teubner.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: *Konsequenzen aus PISA. Perspektiven der Fachdidaktiken.* Innsbruck: Studienverlag, 141-189.

Hefendehl-Hebeker, L. (2012). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In diesem Band.

Jänich, K. (2003). *Funktionentheorie.* Springer.

Lambacher Schweizer 10 (1997). *Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium*, Ausgabe Hessen, Klett.

Lambacher Schweizer (2005). *Analysis Leistungskurs. Gesamtband Ausgabe A.* Klett.

Leufer, N., Prediger, S. (2007). „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule", Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann, S. Prediger (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis*, Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag, Franzbecker, Hildesheim.

Wittmann, E.C., Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter.* Cornelsen, Berlin.

Anhang: Kopiervorlagen

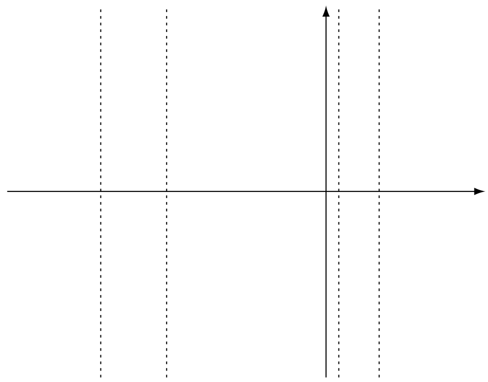
Aufgabe 1: Funktionen qualitativ verstehen

a) **Funktionsverlauf gesucht.** Von einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Folgendes bekannt:

(i) Die Ableitung f' ist negativ im Intervall $]-3, 1[$ und sie ist positiv außerhalb von $[-3, 1]$.

(ii) Die zweite Ableitung f'' ist negativ im Intervall $]-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}[$ und sie ist positiv außerhalb von $[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}]$.

Fertigen Sie eine Skizze an, die einen möglichen Verlauf des Graphen G_f im Intervall $[-6, 3]$ wiedergibt. Markieren Sie dabei die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.



b) **Geht es immer?** Die Vorgaben im vorigen Aufgabenteil legen insbesondere zwei Nullstellen von f' und zwei Nullstellen von f'' fest. Es liegt die Frage nahe, ob überhaupt zu beliebigen solchen Nullstellen-Vorgaben immer eine „passende“ Funktion existiert. Als Beispiel: Klären Sie, ob es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben kann, bei der

- f' genau in den Punkten -3 und $-2-\sqrt{5}$ Nullstellen hat und
- f'' genau in den Punkten 1 und $2+\sqrt{5}$ Nullstellen hat.

> *Tipp:* Stellen Sie zunächst ein paar Versuche an, eine solche Funktion zu skizzieren, um ein Gefühl für die Antwort zu entwickeln. Welcher zentrale Satz der Analysis lässt sich einsetzen, um die auf diese Weise gewonnene geometrische Vorstellung mit einem stichhaltigen Argument zu untermauern?

c) **Realisierbarkeit in bestimmten Funktionsklassen.** Wir kommen zurück zu der in (a) beschriebenen Situation. Nehmen wir also an, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und habe die in (i) und (ii) beschriebenen Eigenschaften.

- Kann f eine quadratische Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (für geeignete $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$) oder eine kubische Funktion $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ (für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$) sein?
- Kann f eine Funktion der Form $x \mapsto (x^2 + c)e^x$ sein (für geeignetes $c \in \mathbb{R}$)?
- *Zum Weiterarbeiten:* Kann f eine Polynomfunktion sein? (Beginnen Sie damit, die Situation bei Polynomen vom Grad 4 zu untersuchen.)

Aufgabe 2: Differenzierbarkeit der Sinusfunktion

In dieser Aufgabe geht es um den folgenden Satz:

> *Die Sinusfunktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die Kosinusfunktion* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sie kennen aus der Vorlesung zur Analysis einen Beweis dieses Satzes, der die Darstellung der Sinus- und der Kosinusfunktion durch Potenzreihen verwendet und mit gliedweiser Differentiation argumentiert.

a) **Eine alternative Argumentation.** Wir betrachten nun eine alternative Argumentation, die in mehreren Varianten auch in Unterrichtswerken der 11. Jahrgangsstufe genutzt wird. Gehen Sie für gegebene $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ vom Differenzenquotienten der Sinusfunktion zu den Stellen x und $x + h$ aus. Nutzen Sie das Additionstheorem der Sinusfunktion und die Gleichung $1 - \cos h = 2(\sin \frac{h}{2})^2$ für algebraische Umformungen. Verwenden Sie dann die Konvergenzaussage $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, um zu zeigen, dass der betrachtete Differenzenquotient für $h \to 0$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) **Benötigte Vorkenntnisse.** Die in (a) erarbeitete Argumentation greift auf gewisse Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion zu. Stellen Sie diese Eigenschaften zusammen und überlegen (oder recherchieren) Sie, mit welchen (z.B. geometrischen) Argumentationen man zu diesen gelangen könnte, ohne die Potenzreihendarstellungen von Sinus- und Kosinusfunktion zu nutzen.

c) **Argumentationsgraph.** Erstellen Sie nun einen Begriffs-/Argumentationsgraphen, der sowohl den obigen Zugang als auch den eingangs erwähnten Zugang über Potenzreihen beinhaltet. Das „untere Ende“ des Graphen könnte folgendermaßen aussehen: