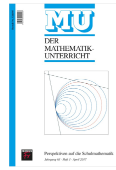

Vorversion des Artikels,
der erschienen ist in:
Der Mathematikunterricht 63,
36-45 (2017)

THOMAS BAUER

Schulmathematik und Hochschulmathematik – was leistet der höhere Standpunkt?

1 Die Frage nach der Relevanz – warum Hochschulmathematik für angehende Lehrer und Lehrerinnen?

Studierende im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt treffen in ihrem Studium von Beginn an auf Fachinhalte und Denkweisen, die sie so nicht aus ihrer Erfahrung mit Schulmathematik kennen. Dies gilt bereits für die Vorlesungen der ersten Studiensemester in Linearer Algebra und Analysis: Vektorräume und lineare Abbildungen werden in einer Allgemeinheit und Abstraktion studiert, die so nicht in der Schulmathematik auftritt; das Gebiet Analysis wird in einer axiomatisch fundierten Form behandelt, die aus der Schule unbekannt ist; zudem treten bald differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher auf, die in der Schule allenfalls am Rande betrachtet werden. Angesichts solcher Erfahrungen haben Lehramtsstudierende in Bezug auf ihre fachinhaltliche Ausbildung oft drängende Fragen: »Wozu sollen wir das lernen? Brauchen wir das in der Schule?« Solche Fragen sind aus der Perspektive der Studierenden sehr verständlich, zumal das Erarbeiten der betreffenden Inhalte und Denkweisen beträchtliche Zeit und Energie erfordert – manche scheitern gar daran.

Fragt man Hochschullehrende nach dem Nutzen, den das Lernen von Hochschulmathematik für Lehramtsstudierende hat, so kann man idealtypisch zwei Antwortrichtungen ausmachen:

(1) »Vertieftes Fachwissen ist wichtig, um auch besonders begabten Schülern genügend mathematisch herausfordernde Anregungen geben zu können«, »… um bei schwierigen Schülerfragen fachlich sicher zu sein«, »… um für Facharbeiten interessante und zum Lernstand passende Themen zu finden und diese adäquat betreuen zu können.«

(2) »Die Fachausbildung lehrt mathematisches Denken, das für Lehrkräfte wichtig ist, damit sie im Unterricht souverän mit Mathematik umgehen können.«

Dass diese Antworten Zutreffendes beinhalten, wird man kaum bestreiten. Dennoch greifen sie noch etwas zu kurz: So kann (1) den Eindruck erwecken, vertieftes Fachwissen sei hauptsächlich für unterrichtliche Ausnahmesituationen gedacht. Ist gemeint, dass im unterrichtlichen »Normalzustand« solides Schulwissen, ergänzt durch fachdidaktisches und pädagogisches Wissen, eigentlich vollauf ausreicht? Und auch (2) lässt noch Fragen offen, sowohl für den fragenden Lehramtsstudierenden als auch in prinzipieller Hinsicht: Was genau ist mit »mathematischem Denken« gemeint? Wodurch zeichnet es sich aus? Wie lernt man es? Und wo brauchen es Lehrkräfte im Unterricht?

In den letzten Jahren sprechen sich an den Universitäten immer mehr Stimmen dafür aus, den Bezug zwischen Schul- und Hochschulmathematik im Studium gezielter aufzugreifen. In verschiedenen Projekten wurden hierfür Ansätze entwickelt (Beutelspacher et al. 2011, Bauer und Partheil 2009, Ableitinger et al. 2013). Ihre Schwerpunkte haben diese Aktivitäten meist in der Studieneingangsphase, wo der Übergang von der Schule zur Universität Schwierigkeiten bereitet – es ist dies die erste der zwei *Diskontinuitäten*, auf die Felix Klein schon vor über 100 Jahren hingewiesen hat (Klein 1908). Der vorliegende Text möchte das Mathematikstudium insgesamt in den Blick nehmen (im Sinne Felix Kleins zielt dies auf die *zweite Diskontinuität* ab) Dabei wird er die obige Unterscheidung in inhaltsbezogene und auf »mathematisches Denken« bezogene Aspekte aufgreifen, will aber explizieren, worin der Beitrag der Hochschulmathematik konkret liegen kann. Zugespitzt gefragt: Warum benötigt eine sinnvolle Ausbildungskonzeption die fachlichen Anteile? Warum kann es für Lehramtsstudierende lohnend sein, sich auf die Fachausbildung einzulassen?

In den Abschnitten 2 und 3 werden diese Fragen zunächst hinsichtlich des Fachinhalts betrachtet, was im vorliegenden Text naturgemäß nur exemplarisch möglich ist. An Beispielen soll aufgezeigt werden, worin die Kraft fachinhaltlichen Wissens in Bezug auf Schule konkret liegen kann. In Abschnitt 4 geht es dann um das »geheimnisvolle Niveau« (Toeplitz), das die Hochschulausbildung erbringen soll – diese spezifische Art des Umgangs mit Mathematik, die aus einer Hochschulausbildung resultieren soll. Jüngere Studien zur *Mathematical Sophistication* (Seaman and Szydlik 2007) konkretisieren, worin diese bestehen kann und weisen darauf hin, dass hierin ein wesentlicher Sinn vertiefter Mathematikveranstaltungen liegen sollte.

2 Mathematisches Potential im Elementaren erkennen

2.1 Das Potential einer Schüleridee

Herr Wagner ist Referendar und unterrichtet gerade in der Sekundarstufe I. Im Geometrieunterricht stellt er die in Abb. 1 gezeigte Berührkreisaufgabe (Schoenfeld 1985, S. 15).

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden und ein Punkt P, der auf einer der beiden Geraden liegt wie in der nebenstehenden Zeichnung. Konstruiere einen Kreis, der durch P geht und beide Geraden als Tangenten hat.

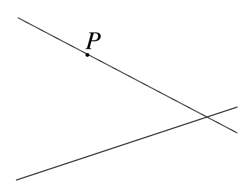

Abb. 1: Die Berührkreisaufgabe

Eine Lösung, die Herr Wagner vor Augen hat (vgl. Schoenfeld 1985, S. 18), nutzt eine für die Elementargeometrie typische Strategie: Sie geht von einem hypothetischen fertigen Bild aus (siehe Abb. 2, linkes Bild) und macht daran zwei Beobachtungen:

- Die Mittelpunkte aller Kreise, die die obere Gerade in P berühren, liegen auf dem Lot in P an diese Gerade.
- Die Mittelpunkte aller Kreise, die beide Geraden berühren, liegen auf der Winkelhalbierenden der zwei Geraden.

Mit diesen Informationen ist der gewünschte Kreis zu finden (und auch konstruierbar): Es ist derjenige Kreis durch P, dessen Mittelpunkt M der Schnittpunkt von Lot und Winkelhalbierende ist.

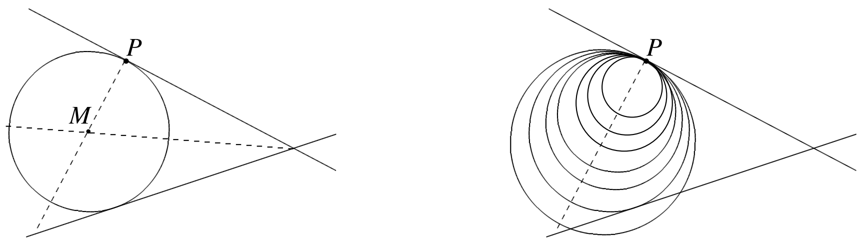

Abb. 2: Zwei verschiedene Lösungsideen zur Berührkreisaufgabe

Claudia und Max verfolgen eine andere Lösungsidee, die in der rechten Skizze in Abb. 2 angedeutet ist:

> *Claudia:* Ich denke mir das so: Ich nehme erstmal einen kleinen Kreis, der die obere Gerade in P berührt. Den mache ich größer und größer, aber immer so, dass er in P berührt. Irgendwann berührt er dann halt auch die untere Gerade.

> *Max:* Ich habe das auch so gemacht und mit Geogebra ausprobiert. Wenn ich den Radius groß genug mache, dann berührt der Kreis die untere Gerade. Wenn ich ihn dann noch größer mache, dann schneidet er die Gerade zweimal.

Herr Wagner deutet dieses Vorgehen so: Claudia und Max ist die bereichsspezifische Strategie des *Denkens vom fertigen Bild aus* noch nicht geläufig. Sie arbeiten eher dynamisch im Sinne des *Herstellens durch Veränderung*. Während Claudia den Prozess gedanklich vollzieht, nutzt Max hierzu dynamische Geometriesoftware, die er aus dem Unterricht kennt. In diesem Augenblick steht Herr Wagner vor einer Entscheidung, die ihn fachlich stark fordert: Während die Lösung mit Lot und Mittelsenkrechte zu einen Beweis im Theorierahmen der euklidischen Geometrie führt, der in der Literatur ausführlich diskutiert wird (vgl. Schoenfeld, a.a.O.), ist ihm nicht auf den ersten Blick klar, wie die Vorschläge von Claudia und Max einzuordnen sind:

- Möglichkeit 1: Es handelt sich um heuristische Vorstellungen, die zwar nicht beweiskräftig sind, aber von treffender geometrischer Intuition zeugen und ausreichend plausible Bewusstheit (vgl. Kaenders und Kvasz 2010) dafür schaffen, dass der fragliche Kreis existiert.
- Möglichkeit 2: Die Überlegungen enthalten die Kernidee zu einem Beweis der Existenz des gesuchten Kreises.

Liegt also hier eine heuristische Erklärung oder eine Beweisidee vor (oder beides)?

Kann Herrn Wagner seine fachinhaltliche Ausbildung hier weiterhelfen? Im ersten Moment hält er das für unwahrscheinlich: Elementargeometrie hat in seinem Studium nur eine Nebenrolle gespielt, und um mehr als dies scheint es hier fachlich ja nicht zu gehen. Hier soll nun erläutert werden, wie die Fachausbildung tatsächlich mehr Einblick in die mathematische Situation geben kann. Claudia und Max betrachten in ihren Überlegungen nicht nur einen einzigen Kreis (in Euklidischer Herangehensweise wäre dies der eindeutig bestimmte Kreis, den man im hypothetischen fertigen Bild sieht), sondern eine ganze Schar von Kreisen, nämlich alle, die die obere Gerade im Punkt P berühren. Ihr Argument ist, dass es in dieser Schar einen Kreis gibt, der auch die untere Gerade berührt. Aus fachlicher Perspektive gesehen ist dies ein *Stetigkeitsargument*: Solange die Kreise klein genug sind, haben sie mit der rechten Geraden *keinen* Schnittpunkt; wenn sie groß genug sind, haben sie *zwei* Schnittpunkte mir ihr – und unsere Intuition sagt uns, dass es beim Übergang zwischen diesen beiden Situationen eine Momentansituation mit *genau einem* Schnittpunkt geben »muss«. Lässt sich aus dieser Idee ein Beweis machen? Dies gelingt in der Tat durch Kombination von Elementen der Fachausbildung:

- *Elementargeometrie:* Die Schar von Kreisen, die die obere Gerade in P berühren, können wir durch quadratische Gleichungen der Form $(x-a(t))^2+(y-b(t))^2=r(t)^2$ beschreiben, in denen t der Scharparameter ist und die Funktionen a, b und r durch die Lage der beiden Geraden und durch P bestimmt sind.
- *Algebra:* Die Schnittpunkte der Kreise mit der unteren Gerade lassen sich dadurch finden, dass man mit der Geradengleichung eine der Variablen x oder y aus den Kreisgleichungen eliminiert und die dadurch entstehenden quadratischen Gleichungen (in einer Variablen) löst. Man muss diese Rechnung gar nicht explizit durchführen – entscheidend ist nur, dass über die Anzahl der Lösungen die *Diskriminante* $\Delta(t)$ der jeweiligen quadratischen Gleichung entscheidet. (Wenn man dennoch konkreter werden möchte, dann beschreibt man die untere Gerade (nach einer Koordinatentransformation) durch $y=0$ und erhält dann die Schnittpunkte durch Lösen der quadratischen Gleichung $(x-a(t))^2+b(t)^2=r(t)^2$. Deren Diskriminante ist $\Delta(t)=r(t)^2-b(t)^2$.)
- *Analysis:* Wir wissen, dass es sowohl Kreise gibt, die die untere Gerade nicht schneiden, als auch Kreise, die sie in zwei Punkten schneiden. Die Diskriminantenfunktion $t\mapsto\Delta(t)$ nimmt also sowohl negative als auch positive Werte an. Da sie stetig ist – in diesem Augenblick nutzen wir, dass die Schar durch stetige Vergrößerung der Radien entstanden ist – folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass sie eine Nullstelle hat. In der Schar muss also ein Kreis vorkommen, der auch die untere Gerade berührt.

Die Mathematikausbildung kann hier noch weiterführen: Das Konzept der *Diskriminante*, das sich oben im Fall quadratischer Gleichungen als so nützlich erwiesen hat, gibt es in allgemeinerer Form: Es gibt Auskunft darüber, ob ein Polynom (beliebigen Grads) mehrfache Nullstellen hat (siehe etwa Lang 2002). Dieses Wissen kann zum Einsatz kommen, wenn man kompliziertere Schnittsituationen betrachtet.

Zurück zur Situation in Herrn Wagners Unterricht: Vielleicht kommt die Aufgabe an einem Zeitpunkt zum Einsatz, an dem algebraisch-analytische Argumente, wie sie oben beschrieben wurden, noch gar nicht in stufengemäß angepasster Form diskutiert werden können. Und vielleicht möchte sich Herr Wagner ohnehin in der Arbeit mit seiner Klasse auf das Lot-Winkelhalbierende-Argument konzentrieren, etwa um die angesprochene Strategie des *Denkens vom fertigen Bild aus* herauszuarbeiten. Dennoch macht es einen signifikanten Unterschied, ob er die Äußerungen der Schüler als heuristische Vorstellung oder als Kern einer Beweisidee einschätzt. Denn seine fachliche Beurteilung gibt den Ausschlag darüber, wie Herr Wagner die Lösungsvorschläge seiner Schüler einordnen und kommentieren wird – und dies ist ein Moment, in dem er als Lehrperson soziomathematische Normen in der Klasse etabliert (vgl. Yackel und Cobb 1996), die ihrerseits sehr wohl langfristig von Bedeutung sind. Das Spektrum ist hier breit: Im günstigsten Fall erkennt Herr Wagner die fachliche Tragfähigkeit der Schüleridee und würdigt sie entsprechend. Sollte er die Situation dagegen fachlich völlig unzutreffend einschätzen, dann besteht im schlimmsten Falle die Gefahr, dass er das Vorgehen von Claudia und Max gar als »unmathematisch« wertet.

Wie kann die Hochschulausbildung auf solche Situationen vorbereiten? Wie kann sie sicherstellen, dass Herrn Wagner sein Fachwissen in der benötigten einsatzfähigen Form zur Verfügung steht? Erwartungsgemäß gibt es keine einfachen Antworten – einen umfassenden Katalog, der die fachlich relevanten Wissensbestände zusammen mit ihren möglichen Einsatzsituationen zeigt, wird man nicht erstellen können. Eher wird es darauf ankommen, dass Lehramtsstudierende einerseits über ein genügend reichhaltiges Repertoire an Fachwissen verfügen und andererseits an genügend vielen Beispielen die Erfahrung gemacht haben, dass ihnen fachliches Wissen erweiterte Handlungsspielräume im Umgang mit Elementarmathematik eröffnet. Die im nächsten Abschnitt beschriebenen *fachlichen Längsschnitte* können hierzu beitragen.

2.2 Fachliche Längsschnitte als Orientierung

Im vorigen Abschnitt ging es um den Einsatz von vernetztem Fachwissen beim nuancierten Eingehen auf Schüleräußerungen. Am folgenden Beispiel soll erläutert werden, wie es bei der Planung von Aufgaben oder ganzen Lernumgebungen Kraft entfalten kann.

Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren (n-Ecke, Kreise) sind klassische Themen des schulischen Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I. Andreas Stahel (2005) stellt eine Aufgabe für Schüler des 9. Schuljahres vor (siehe Kasten 1), die zu eigenständigem »Forschen« anregt (hierbei verstanden als ein entdeckendes Arbeiten, das Erfahrungen ermöglicht, die an das Erlebnis eigener Forschung grenzen). Er berichtet (a.a.O.), wie produktiv die Aufgabe im Unterricht eingesetzt werden kann. Entstanden ist sie aus einem auf späterer (nämlich hochschulmathematischer) Stufe liegenden Thema, dem *isoperimetrischen Problem*: Unter allen einfach geschlossenen Kurven in der Ebene, die eine gegebene Länge haben, wird eine Kurve gesucht, die den größten Flächeninhalt einschließt.

Aufgaben:

1. Wählt Euch mindestens 8 verschiedene Flächenformen aus, die man mit 100 m Stacheldraht umzäunen kann. Die Flächenstücke sollen sich wesentlich voneinander unterscheiden, d.h. zum Beispiel lauter Rechtecke sind nicht erlaubt. Berechnet jeweils den Flächeninhalt A, einerseits nummerisch auf ganze Quadratmeter gerundet, andererseits algebraisch als Formel (d.h. als Funktion des Umfangs U und evtl. weiterer Variablen).
2. Ordnet Eure Flächen in einer Tabelle, beginnend mit der grössten Fläche.
3. Zieht möglichst viele Folgerungen aus Euren Berechnungen. Schreibt diese in guter deutscher Prosa auf.

Kasten 1: Aufgabe aus Stahel (2005)

Um solche anregenden Aufgaben aus Wissen zu generieren, das auf fachlich höheren Stufen liegt, kann es helfen, *fachliche Längsschnitte* zu kennen, die zeigen, wie sich eine mathematische Fragestellung oder Idee in verschiedenen Lernstufen in unterschiedlicher Weise bearbeiten lässt. Beim oben beschriebenen Thema ist ein solcher Längsschnitt in Bauer (2013) von der Sekundarstufe I über die gymnasiale Oberstufe zur Analysisvorlesung und darüber hinaus beschrieben (siehe auch Aufgabe 3.1 in Bauer 2012). Man kann daran deutlich erkennen, wie auf höheren Stufen der Abstraktionsgrad und die Reichweite der verfügbaren mathematischen Werkzeuge steigen, während aber in den Arbeitsweisen über die Stufen hinweg viele Gemeinsamkeiten bestehen.

Der Grundgedanke bei der Betrachtung solcher Längsschnitte ist, dass Wissen auf höheren Stufen fruchtbare Rückwirkung auf frühere Stufen hat. Lisa Hefendehl-Hebeker (1995) zeigte dies an einem arithmetischen Problem, das sie über mehrere Stufen mit Strukturbegriffen der modernen Algebra verbindet. Den Nutzen für Lehrkräfte beschreibt sie so:

> Lehrerinnen und Lehrer, die über eine genetische Sichtweise eines mathematischen Themas verfügen, erhalten von späteren Stufen rückwirkend gehaltvolle Aufgaben zum Einsatz auf früheren Stufen und können diese dort mit Gewinn unterrichten, weil sie aus dem Wissen um den kreativen Überschuss *Spannung* erzeugen und Lernen im Sinne geistiger Aneignung zu organisieren vermögen.

3 Den reichen Kosmos an Bedeutung sehen – ein Beispiel aus der Analysis

Ein recht bekannter Scherz aus der Analysis sieht so aus:

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}=\rotatebox{90}{4}$$

Der Witz kommt dadurch zustande, dass nicht der in den Zeichen ausgedrückte Inhalt als Grundlage für die Implikation verwendet wurde, sondern einfach die Zeichen selbst. Und dies steht in amüsant-absurdem Gegensatz zu einer grundlegenden Einsicht: In der Mathematik steckt hinter den Zeichen ein weiter »Kosmos an Bedeutung« (Hefendehl-Hebeker 2016, S. 18).

Bleiben wir beim Grenzwertbegriff: Aktuelle Lehrpläne und Kerncurricula sehen für die gymnasiale Oberstufe in der Regel eine propädeutisch-intuitive Behandlung vor, sie fordern keine »formale Beschreibung von Grenzwerten mit Quantoren« (Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe 2016, S. 29). Dies darf man sicherlich nicht so interpretieren, dass das Grenzwertkonzept als solches im Unterricht fallenzulassen sei – Grenzwertprozesse liegen ja im Kern der Analysis. Tatsächlich fordern die einschlägigen Kerncurricula mit Recht den »Aufbau adäquater Vorstellungen« (a.a.O.). Bleibt man bei der Metapher des »Kosmos an Bedeutung«, so lässt sich dies so verstehen, dass die Lehrkraft über einen reichen Bedeutungskosmos zum Grenzwertbegriff verfügen muss und die Schüler in angemessenem Umfang einen Ausschnitt daraus aufbauen sollen. Welchen Bedeutungsreichtum das Mathematikstudium zu Begriffen wie *Grenzwert* und *Unendlich* in mehreren Etappen aufbauen kann, soll daher im Folgenden ausgeführt werden.

3.1 Eine erste Annäherung auf verschiedenen Reflexionsstufen

Angenommen, die Gleichung

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty$$

soll hinsichtlich ihrer Korrektheit beurteilt werden. Zunächst kann dies nach einer einfachen Überlegung im engen Rahmen des Grenzwertkalküls klingen. Die folgenden Aussagen von Lernenden zeigen aber, dass Beurteilungen auf recht verschiedenen Reflexionsstufen liegen können:

(1) »Die Gleichung stimmt, weil beim Einsetzen von 8 im Nenner 0 steht und der ganze Bruch dann Unendlich ist.«
(2) »Die Gleichung stimmt, denn der Nenner geht für $x \to 8$ gegen 0 und sein Kehrwert daher gegen Unendlich.«
(3) »Die Gleichung stimmt nicht, weil der linksseitige Grenzwert nicht mit dem rechtsseitigen übereinstimmt.«
(4) »Die Gleichung stimmt nicht, denn unter den Folgen (x_n), die gegen 8 gehen, gibt es zwar solche, für die $1/(x_n - 8)$ gegen Unendlich geht, aber es gibt auch solche, für die $1/(x_n - 8)$ gegen minus Unendlich geht oder gar keinen Grenzwert hat (auch keinen uneigentlichen wie ∞ oder $-\infty$).«

Eine Stufung liegt hier in folgendem Sinne vor: (1) und (2) kommen zu einer falschen Beurteilung. Dies lässt sich bei (1) darauf zurückführen, dass Grenzwertbildung auf Einsetzen reduziert wird, während (2) immerhin das Dynamische eines Grenzwertprozesses sieht, wenn es auch unvollständig ausgeführt ist. (3) kommt zu dem richtigen Ergebnis, dass die Gleichung nicht gilt. Dabei wird ein Kriterium über einseitige Grenzwerte herangezogen. Aber existieren diese immer, so dass sich solche Fragen immer durch das Prüfen der Gleichheit der beiden beantworten lassen? (4) zeigt tiefere Einsicht in die Situation: Hier kommt zum Ausdruck, dass eine Behauptung der Form $\lim_{x\to a} f(x) = b$ eine Aussage über *alle* Möglichkeiten macht, auf denen man sich a nähern kann. Dies liegt näher am Kern des Grenzwertbegriffs als (3).

3.2 Mehr Bedeutung vom höheren Standpunkt

Gibt es über das in vorigem Abschnitt Gesagte noch mehr zu verstehen? Welche Weitung des Bedeutungskosmos kann ein Mathematikstudium für den Umgang mit einem so elementaren Sachverhalt bringen?[1]

(a) *Eindimensionale reelle Analysis.* Von ihrem Standpunkt aus wird deutlich, warum (1) und (2) zu kurz greifen und auch, inwiefern (3) noch nicht zum Kern der Sache vordringt.

(b) *Mehrdimensionale reelle Analysis.* Hier erhält die Vorstellung »sich einem Punkt annähern« zusätzliche Bedeutung: Im Gegensatz zum Eindimensionalen, wo sich die Betrachtungen immer auf links- oder rechtsseitiges Annähern reduzieren lassen, spielt es jetzt eine Rolle (etwa beim Ableitungsbegriff), dass es bereits in $\mathbb{R}^2$ unendlich viele nicht-äquivalente Annäherungsweisen an einen Punkt gibt: auf verschiedenen Geraden, spiralförmig, …

(c) *Funktionentheorie.* Hier kommt es zu einer Standpunktverlagerung: Beim Studium von Singularitäten wird der Gesichtspunkt betont, dass bei der Funktion $z \mapsto 1/(z-8)$ ein *Pol* vorliegt. Angesichts des ebenfalls vorkommenden Falls einer *wesentlichen Singularität* wird ein Pol zum eher »harmlosen« Fall einer Singularität. Bezüglich des Unendlichen nimmt die Funktionentheorie für solche Überlegungen eine sehr grobe Sichtweise ein: Sie erweitert die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ um *einen* unendlich fernen Punkt ∞ zur *Riemannschen Zahlenkugel*, und in dieser Sichtweise gilt tatsächlich $\lim_{z\to 8} \frac{1}{z-8} = \infty$. Dies wirft rückblickend sogar auf die Beurteilung (2) ein neues Licht: Dort wurde wie in der Funktionentheorie nur das betragsmäßige Verhalten der Funktion berücksichtigt.

(d) *Projektiv-algebraische Geometrie.* Der Standpunkt, nur *einen* unendlich fernen Punkt zur Verfügung zu stellen, ist für die Zwecke der Funktionentheorie optimal passend. In der

[1] Eine Überblicksperspektive, wie sie im Folgenden aufgezeigt wird, lässt sich erst rückwirkend einnehmen. Im Studium fehlt leider oft ein kanonischer Ort, solche Aspekte explizit zu thematisieren.

Geometrie ist es dagegen weitaus zweckmäßiger, zur Ebene $\mathbb{R}^2$ *unendlich viele* unendlich ferne Punkte hinzuzufügen: Betrachtet man zum Beispiel eine Hyperbel, die durch die Gleichung $xy = 1$ gegeben ist (siehe Abb. 3, links), so fällt ins Auge, dass die Kurve in mehrfacher Weise gegen Unendlich geht (horizontal und vertikal). In der *projektiven Geometrie*, deren Ursprünge sich zu Untersuchungen von Malern der Renaissance wie Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer zurückverfolgen lassen, wurde eine Sichtweise eingeführt, die sich bis heute als außerordentlich fruchtbar erwiesen hat: Man nimmt zu $\mathbb{R}^2$ für jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht – und daher durch eine Gleichung der Form $ax + by = 0$ beschrieben wird – einen *unendlich fernen Punkt* $P_{ax+by=0}$ hinzu und erhält so die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$,

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{unendlich ferne Punkte}\}$$

Die beabsichtigte intuitive Vorstellung hierbei ist, dass der hinzugenommene Punkt $P_{ax+by=0}$ an beiden »Enden« der Gerade $ax + by = 0$ liegt. Beispielsweise nähert sich die in Abb. 3 gezeigte Hyperbel zweien dieser unendlich fernen Punkte an: Der Ast im rechten oberen Quadranten nähert sich nach oben dem unendlich fernen Punkt $P_{x=0}$. Man stellt sich vor, dass die Hyperbel dann im linken unteren Quadranten vom selben Punkt $P_{x=0}$ »zurückkommt« und sich dann nach links auf den Punkt $P_{y=0}$ zubewegt. Schließlich kommt sie im rechten oberen Quadranten von rechts von $P_{y=0}$ zurück – die Hyperbel ist somit in $\mathbb{P}^2$ eine geschlossene Kurve! Was hier intuitiv beschrieben wurde, lässt sich begrifflich präzise fassen, und mit unendlich fernen Punkten lässt sich algebraisch in einfacher Weise rechnen – dies ist eine typische Aktivität in einem ersten Kurs zur algebraischen Geometrie.

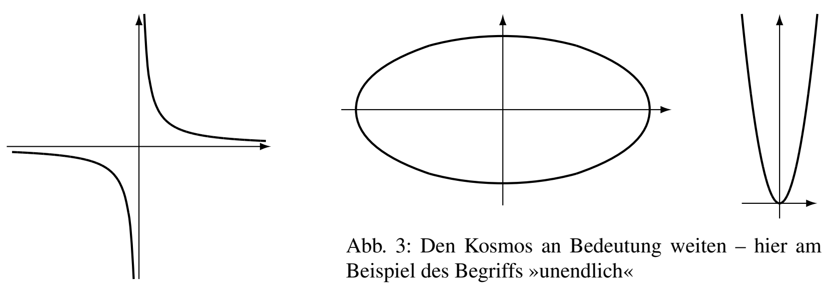

Abb. 3: Den Kosmos an Bedeutung weiten – hier am Beispiel des Begriffs »unendlich«

Überlegt man die Dinge zu Ende, so stellt man fest, dass eine Hyperbel ebenso eine geschlossene Kurve ist wie eine Ellipse – der Unterschied liegt lediglich darin, dass die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat, die Ellipse aber keine. Tatsächlich lassen sich die zwei Kurven in der projektiven Ebene durch eine Koordinatentransformation ineinander überführen – es ist also bis auf die Wahl der Koordinaten »dieselbe« Kurve (siehe etwa Fischer 1994).

Anregung: Was erwarten Sie intuitiv – hat die Parabel $y = x^2$ (Abb. 3, rechts) unendlich ferne Punkte? Ist sie in $\mathbb{P}^2$ ebenfalls eine geschlossene Kurve?

4 Mathematical Sophistication – oder: das »geheimnisvolle Niveau«

Dass ein Mathematikstudium neben bereichsspezifischen Inhalten (in Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik, ...) auch bereichsübergreifende mathematikspezifische Fähigkeiten ausbilden will, ist für Dozenten geradezu eine Selbstverständlichkeit. Es ist den Beteiligten durchaus klar, dass die Mehrheit der Studierenden, egal ob Lehramts- oder Vollfachstudierende, die fachlichen *Inhalte* fortgeschrittener Lehrveranstaltungen nur zum Teil in ihrem künftigen Berufsfeld direkt einsetzen wird, wenn dieses Berufsfeld nicht gerade die mathematische Forschung ist. Dass Mathematiker in vielen Berufssparten so begehrte Arbeitskräfte sind, muss auch mit einem Ausbildungserfolg zu tun haben, der über die Stoffinhalte hinausgeht. Otto Toeplitz hat sich mit diesem Zusammenspiel von – in seinen Worten – »Stoff« und »Methode« bereits im Jahr 1932 in einem bemerkenswerten Aufsatz zum Verhältnis von Schulmathematik und Hochschulmathematik befasst. Er betont darin (Toeplitz 1932, S. 2):

> Der mathematische Hochschulunterricht entbehrt seines eigentlichen Sinnes, wenn es jenseits der Materien, die er lehrt, nicht noch eine allgemeine *Einstellung*, ein *Niveau* gäbe, das er vermitteln will. Aber was ist dieses geheimnisvolle »Niveau«, das wir alle empfinden, ohne es je definiert zu haben?

An anderer Stelle (Toeplitz 1928) beschreibt er, welche Aspekte er selbst im Blick hat:

> Mit Niveau eines Kandidaten ist seine Fähigkeit gemeint, das Getriebe einer mathematischen Theorie zu durchschauen, die Definitionen ihrer Grundbegriffe nicht zu memorieren, sondern in ihren Freiheitsgraden, in ihrer Austauschbarkeit zu beherrschen, die Tatsachen von ihnen klar abzuheben und untereinander und nach ihrem Wert zu staffeln, Analogien zwischen getrennten Gebieten wahrzunehmen oder, wenn sie ihm vorgelegt werden, sie durchzuführen, Gelerntes auf andere Fälle anzuwenden und anderes mehr.

Aus soziokultureller Perspektive (Bauersfeld 1979, Resnick 1989, Schoenfeld 1992) lässt sich das Entstehen des »geheimnisvollen Niveaus« als Ergebnis eines Prozesses von Enkulturation auffassen, durch den der Lernende in die mathematische Fachgemeinschaft eindringt. Schoenfeld (1992, S. 3) beschreibt dies so:

> Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense-making.

Im Erwerb eines *mathematischen Standpunkts* sieht er einen wesentlichen Aspekt des mathematischen Denkens (Schoenfeld 1992, S. 19):

> [...] a fundamental component of thinking mathematically is having a mathematical point of view – seeing the world in ways like mathematicians do.

Die Bedeutung von Enkulturation für die Mathematikausbildung an der Universität wird zunehmend erkannt. In einer Studie von Seaman und Szydlik (2007) mit Lehramtsstudierenden zeigte sich, dass eine Mehrheit der Probanden die bereitgestellten Wissensquellen nicht erfolgreich beim Lösen von Aufgaben nutzen konnte. Die Autoren erklären diesen Befund damit, dass sich das *mathematische Verhalten* der Probanden signifikant von dem der mathematischen Fachgemeinschaft unterschied, und sie erfassen die beobachteten Unterschiede mit dem Konstrukt der *Mathematical Sophistication*. Dieses konzeptualisiert das Ergebnis erfolgreicher Enkulturation durch eine Liste von *Zügen* (a.a.O, S. 170f). Ins Deutsche übertragen und (vom Verfasser) in drei Kategorien gruppiert lassen sich diese so beschreiben:

- *Was Mathematiker zu erreichen suchen:* Sie versuchen, Regelmäßigkeiten und Beziehungen zwischen mathematischen Objekten zu verstehen und Analogien zwischen Sätzen, Beweisen, Theorien zu finden.

- *Wie sie mit mathematischen Objekten umgehen:* Sie schaffen mentale Modelle, symbolische Darstellungen, sowie Beispiele und Gegenbeispiele für sie. Sie stellen Vermutungen über sie auf und testen diese.
- *Wie sie sich Gewissheit verschaffen:* Sie schätzen präzise Sprache und die feinen Unterscheidungen, die sie ermöglicht. Sie nutzen präzise Definitionen, um Bedeutung zu schaffen, und verwenden logische Argumente und Gegenbeispiele, um zu überzeugen.

Ein Beispiel soll verdeutlichen, in welcher Weise so verstandene Mathematical Sophistication für das Unterrichten von Bedeutung ist: Betrachten wir die von Schülern gelegentlich praktizierte »falsche Bruchaddition«

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \tag{$*$}$$

Aus Sicht der Lehrkraft ist klar, dass $(*)$ im Widerspruch zur üblichen Addition von Bruchzahlen steht – es ist ein bekannter Fehler, der als Übergeneralisierung durch Übertragung eines Schemas von der Multiplikation auf die Addition erklärt werden kann (vgl. Prediger und Wittmann 2009). Aber könnte man denn die Addition prinzipiell so *definieren*? Hat man denn nicht Freiheiten beim Definieren? Oder wäre dies eine »falsche Definition«? Beim Beantworten dieser Fragen spielen eine ganze Reihe der oben genannten Züge von Mathematical Sophistication eine Rolle:

- Wofür wurde die *symbolische Darstellung* $\frac{a}{b}$ *geschaffen*? Was will sie ausdrücken? Um welche *mathematischen Objekte* geht es hier?
- Welche *Beziehung zwischen mathematischen Objekten* will die Addition beschreiben? Welche *Bedeutung* soll durch die Addition *geschaffen* werden?
- Würde durch die Gleichung $(*)$ eine Addition von Brüchen oder von Bruchzahlen definiert? (eine *feine sprachliche Unterscheidung*)

(Für Überlegungen zur konstruktiven Nutzung der »falschen Addition« vgl. auch Jahnke 2007).

Der Verfasser stimmt mit Seaman und Szydlik überein, dass ein Hauptziel fortgeschrittener Mathematikveranstaltungen im Lehramtsstudium gerade in der Entwicklung von so verstandener Mathematical Sophistication bestehen sollte. Deren Züge überschneiden sich mit der *epistemologischen Bewusstheit* (Prediger und Hefendehl-Hebeker 2016), die für Mathematiklehrkräfte bereits als zentral erkannt wurde. Ein erster Ansatz, um dieses Ziel deutlicher als bisher in den Blick zu nehmen, können Übungsaufgaben sein, in denen gezielt an einzelnen Zügen gearbeitet wird – zum Beispiel zum Definieren oder zum Aufstellen und Testen von Vermutungen (vgl. Bauer und Kuennen 2016). Anstatt darauf zu vertrauen, dass sich die dazu gehörenden Einstellungen und Fähigkeiten nebenbei entwickeln, plädieren wir dafür, diese expliziter als bisher in der Ausbildung aufzugreifen.

Danksagung. Ich danke meinen Kollegen Eva Müller-Hill und Roland Weber für wertvolle Diskussionen.

Literatur

Bauer, Th., Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Math. Semesterber. 56, 85-103.

Bauer, Th. (2012). Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen. Heidelberg: Springer Spektrum.

Bauer, Th. (2013). Schulmathematik und universitäre Mathematik – Vernetzung durch inhaltliche Längsschnitte. In: H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, G. Wickel (Hrsg.), Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung (pp. 235-252). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, Th., Kuennen, E. (2016). Building and measuring mathematical sophistication in pre-service mathematics teachers. khdm-Report (erscheint demnächst)

Bauersfeld, H. (1979). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. In: R. Lesh, W. Secada (Eds.), Some theoretical issues in mathematics education: papers from a research presession (pp. 13-32). Columbus, OH: ERIC.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Fischer, G. (1994). Ebene algebraische Kurven. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Hefendehl-Hebeker, L. (1995). Mathematik lernen für die Schule? Mathematische Semesterberichte 42, 33-52.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ch. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hrsg.), Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung (pp. 39-56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In: Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Hrsg.), Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase, Springer.

Jahnke, Th. (2007). Rationale und irrationale Untersuchungen und Entdeckungen. mathematik lehren 142, 58-59.

Kaenders, R.H., Kvasz, L. (2010). Mathematisches Bewusstsein. In: Lengnink, K., Nickel, G., Wille R. (Hrsg.), Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven (pp. 71–85). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe (2016). Hessisches Kultusministerium, www.kerncurriculum.hessen.de (abgerufen am 12.06.2016)

Klein, F. (1908). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I. Arithmetik, Algebra, Analysis. Berlin: Springer.

Lang, S. (2002). Algebra. Revised third edition. New York: Springer.

Prediger, S., Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. Journal für Mathematik-Didaktik 37, 239-262.

Prediger, S. Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? PM 27, 1-8.

Resnick, L. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In: R. Charles, E. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 32-60). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Seaman, C., Szydlik, J., (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 167-182

Stahel, A. (2005). Das Isoperimetrische Problem in der Ebene. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 (pp. 561–564). Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. In: Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (99. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg), 11, 10:6.

Toeplitz, O. (1932). Das Problem der »Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus«. In: Semesterberichte zurPflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren 1, 1–15.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal of Research in Mathematics Education 27, No. 4, 458-477.