Analyse und Reflexion von Problemlöseprozessen – Ein Beitrag zur Professionalisierung von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik

Bauer, Thomas[1]; Müller-Hill, Eva[2]; Weber, Roland[1]

[1]Philipps-Universität Marburg; [2]Universität Rostock

Zusammenfassung: In diesem Beitrag stellen wir eine Lehrveranstaltungskonzeption für Studierende des gymnasialen Lehramtes zum mathematischen Problemlösen als mögliches Best-Practice-Modell vor. Wir erläutern die fachlichen und fachdidaktischen Leitmotive und Ziele der Veranstaltung, geben einen Überblick zu deren konkreter Umsetzung und zeigen exemplarische Arbeitsmaterialien und Studierendenprodukte aus dem Pilotierungsdurchgang der Lehrveranstaltung.

Einleitung

Problemlösen liegt im Kern mathematischen Handelns. Folgt man Alan Schoenfeld (1985, S. 74), so meint *Problemlösen* das Lösen mathematischer Aufgaben, die für das Individuum schwierig sind, da ihm noch kein Lösungsschema zur Verfügung steht. In dieser Auffassung tritt Problemlösen insbesondere als zentrale Tätigkeit beim mathematischen Beweisen auf, während umgekehrt Argumentation als Teil einer Problemlösung erwartet wird.

Angesichts seiner so verstandenen Bedeutung im Mathematiktreiben liegt die Forderung nach einer entsprechenden Rolle des Problemlösens im schulischen Mathematikunterricht nahe. So erhebt Heinrich Winter den Erwerb von Problemlösefähigkeiten zu einer *Grunderfahrung*, die der Mathematikunterricht ermöglichen sollte (Winter 1995). Auch in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss (KMK 2003) findet sich die Forderung, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem Erwerb des Mittleren Schulabschlusses über die allgemeine mathematische Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* verfügen. Hieraus leitet sich die Aufgabe ab, das Problemlösen in der Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften angemessen zur Geltung zu bringen, damit diese in die Lage versetzt werden, Schülerinnen und Schüler erfolgreich zum Problemlösen anzuleiten.

Für verschiedene Bereiche wurden dazu eine Reihe von Ansätzen entwickelt: im Bereich von Aufgaben-, Material- und Unterrichtskonzepten zum schulischen Problemlösen etwa Heinze (2007) oder Gawlick (2014), im Bereich der Lehrerfortbildung zum Problemlösen etwa Dreher et al. (2018), Komorek et al. (2006) und Collet (2009), und im Bereich der universitären Lehramtsausbildung insbesondere im Rahmen einiger mathematischer „Lehr-Lern-Labore“, an der Universität Rostock etwa die *For-*

schungswerkstatt:Mathematik, an der Universität Halle-Wittenberg die *Experimente-Werkstatt Mathematik*, oder das *Mathematik-Labor* an der Universität Würzburg.

Der Ansatz, den wir im vorliegenden Beitrag vorstellen, bezieht sich auf die universitäre Ausbildung von Gymnasiallehrkräften und wird im Rahmen der „Marburger Praxismodule“ realisiert. Er hat zwei Spezifika:

Zum einen beginnen die Problemlöseaktivitäten der Studierenden in unserer Kurskonzeption nicht bei der Betrachtung schulischer Problemlöseaufgaben – die in der Regel für die Studierenden selbst keine echten Problemlöseaufgaben darstellen – sondern auf dem authentischen Problemlöseniveau der Studierenden: Sie arbeiten zunächst an Problemlöseaufgaben auf Hochschulniveau und analysieren ihre eigenen Problemlöseprozesse. Im zweiten Schritt werden diese Erfahrungen auf die Situation des schulischen Problemlösens übertragen, die Gemeinsamkeiten und Unterschiede analysiert und für das Anleiten von Schülerinnen und Schülern zum Problemlösen nutzbar gemacht. Dieser Zugang entspricht dem Grundgedanken der Fachlichkeit in der speziellen Ausprägung des dem Projekt zugrundeliegenden *doppelten Praxisverständnisses* (vgl. Laging et al. 2015).

Das zweite Spezifikum unseres Ansatzes liegt darin, dass Reflexionsaufträge systematisch in die Seminarkonzeption einbezogen werden. Hierdurch soll erreicht werden, dass die Studierenden das implizite Wissen über Problemlösestrategien und Lösungsprozesse, über das sie bereits verfügen, an die Oberfläche heben. Dieser Übergang von der Objekt- zur Metaebene des mathematischen Problemlösens soll dazu beitragen, dass die Studierenden ihr Wissen in ihrer späteren Rolle als Lehrkraft gezielter einsetzen können. Gleichzeitig erwarten wir hiervon einen Beitrag zur Ausbildung der Reflexionsfähigkeit, deren Bedeutung für die Professionalisierung von Lehrkräften zunehmend betont wird (siehe etwa Schön (1983) und Scales (2012) zur Auffassung des *Reflective Teacher*).

Der vorliegende Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Wir erläutern zunächst im Überblick das Seminarkonzept und die Zielsetzungen einer Blockveranstaltung zum mathematischen Problemlösen im Rahmen der sogenannten „Marburger Praxismodule“. Anschließend gehen wir im Einzelnen auf die in den verschiedenen Seminarphasen verwendeten und mit den Studierenden reflektierten Steuerungs-, Dokumentations- und Analysehilfen und -instrumente zum Problemlösen ein und illustrieren diese Arbeit anhand von Studierendenprodukten. Zum Abschluss berichten wir exemplarisch aus der Seminarevaluation und diskutieren ausgewählte Studierendenreflexionen mit Blick auf die anfänglich genannten Seminarziele.

Grundzüge und Ziele der Seminarkonzeption

Einbettung der Seminarkonzeption in das Rahmenprojekt ProPraxis

An der Philipps-Universität Marburg wurde im Rahmen des Projekts ProPraxis ein Modellkonzept zur Reformierung der Praxisphasen in der universitären Lehrerbildung entwickelt. Ziel des Projekts, an dem neben den Erziehungswissenschaften zehn weitere Fächer beteiligt sind, ist eine bessere Verzahnung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik, Schulpädagogik und Schulpraxis. Grundlage der angestrebten Professionalisierung der Lehramtsstudierenden ist die Idee eines doppelten, wechselseitig aufeinander bezogenen Praxisverständnisses (vgl. Laging et al. 2015). Das erste Verständnis von Praxis zielt dabei auf die eigene Auseinandersetzung mit der studierten Fachwissenschaft und ihrer spezifischen Leitideen, Fragestellungen und Methoden ab. Diese bewusste und reflektierte Auseinandersetzung mit den Fachgegenständen bildet die Grundlage für das zweite Praxisverständnis, das die unterrichtliche Umsetzung beinhaltet (vgl. Abb. 1). Umgesetzt wird diese Idee seit 2015 in den Marburger Praxismodulen, die aufeinander abgestimmte Studienmodule der Fächer, der Schulpädagogik und ein semesterbegleitendes Schulpraktikum beinhalten (für das Fach Mathematik siehe ausführlicher Bauer et al. 2017).

Die übergreifende Zielstellung von fachspezifischen Lehrveranstaltungen in den Marburger Praxismodulen ist es also, die Grundlage dafür zu schaffen, dass Studierende charakteristische Gegenstände und Ideen der jeweiligen Fachwissenschaft in authentischer Art und Weise als mögliche Gegenstände, Ideen und Leitmotive für den späteren, eigenen Unterricht begreifen und als solche aufbereiten und inszenieren können. Der Fokus entsprechender Lehrveranstaltungen liegt damit auf der Weiterentwicklung fachlicher Kompetenzen im Sinne der Reflexion von Fachgegenständen, jedoch in möglichst direkter Verzahnung mit fachdidaktischen und lerntheoretischen Fragen zur Anwendung und Umsetzung im Schulunterricht.

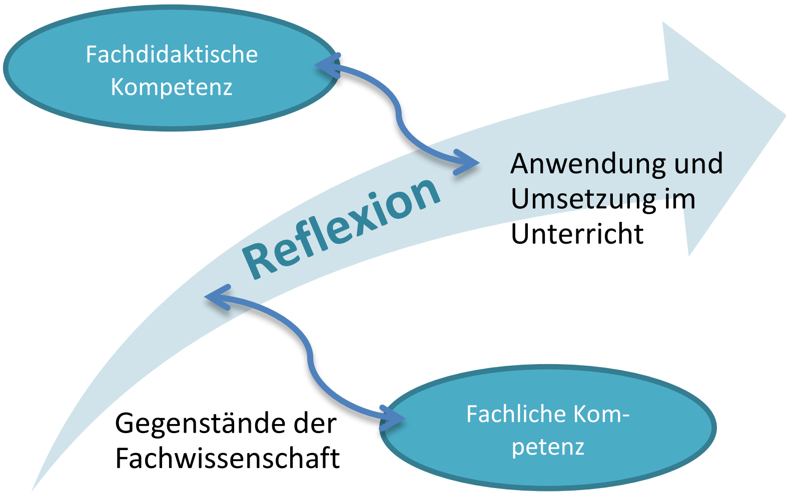
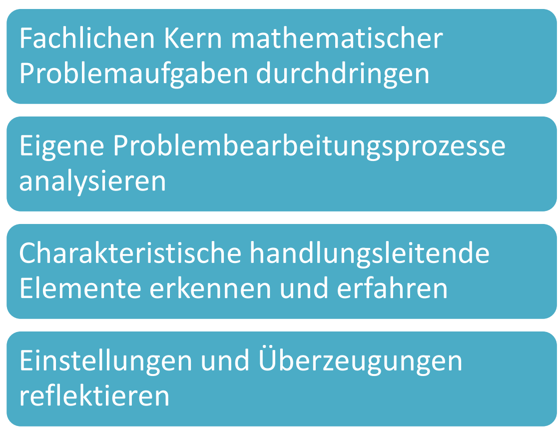


Abbildung 1:Zielsetzungen im Sinne des doppelten Praxisverständnisses von ProPraxis

Spezifische Zielsetzungen

In der hier vorgestellten Veranstaltungskonzeption geht es im Sinne des vorhergehenden Abschnitts um das Leitmotiv: „Problemlösen als zentrale mathematische Aktivität“. Im Sinne der obigen übergreifenden Zielstellung sollen mit Blick auf dieses Leitmotiv entsprechende Verbindungen zwischen fachlichem und fachdidaktischen Wissen auf- und ausgebaut und so das fachliche Wissen der Studierenden professionsbezogen besser nutzbar gemacht werden. Als spezifische Ziele der Veranstaltung lassen sich die folgenden benennen (vgl. Abb. 2):



Die Studierenden sollen Herangehensweisen, die beim mathematischen Problemlösen auf Schulniveau auftreten, auf dem eigenen (d.h. universitären) fachlichen Niveau verstehen, so die Verbindungen zwischen fachlichem Wissen und fachdidaktischem Wissen festigen und ihr fachliches Wissen professionsbezogen besser nutzen lernen.

Abbildung 2:Spezifische Ziele der Lehrveranstaltung

Eigene Problembearbeitungen auf Schul- und Hochschulniveau sollen von den Studierenden durchgeführt und dokumentiert werden. Die Bearbeitungsprozesse sollen systematisch reflektiert und analysiert werden, bspw. als Grundlage für die didaktische Reduktion und Gestaltung entsprechender Schüleraktivitäten und zur Analyse und Bewertung von Schülerbearbeitungsprozessen. Die Studierenden sollen dabei charakteristische handlungsleitende Elemente beim mathematischen Tun auf Schul- und Hochschulniveau erfahren, erkennen und reflektieren, bspw. Strategien des heuristischen Arbeitens und Gütekriterien für mathematische Sätze und Beweise.

Durch geeignete Analyse- und Reflexionselemente sollen schließlich die eigenen bereichsspezifischen Einstellungen und Überzeugungen der Studierenden bewusst gemacht und kritisch hinterfragt werden.

Phasierung

Kern der Umsetzung mit Blick auf die genannten Ziele ist die direkte Verzahnung von fachlicher und fachdidaktischer Arbeit mit den Studierenden. Dies wird durch eine geeignete Phasierung der Blockveranstaltung realisiert (vgl. Abb. 3), die sich im Rahmen der üblichen Verteilung des Arbeitsaufwandes bei einer Lehrveranstaltung mit 90 Stunden Gesamtarbeitsaufwand (3 Leistungspunkte) bewegt. Nach einer Auftaktveranstaltung, die einen ersten fachdidaktischen Input zum heuristischen Arbeiten liefert (Phase 1, 2 Präsenzstunden), erhalten die Studierenden einen vertiefenden Lektüre- und einen konkreten Problemlöseauftrag und setzen sich in Kleingruppen von zwei bis drei Personen im Rahmen einer Vorbereitungszeit von ca. sechs Wochen zunächst auf authentischem, d.h. universitärem Niveau eigentätig mit mathematischen Problemstellungen mit Hilfe von Heurismen auseinander (Phase 2, ca. 30 Stunden Selbststudium). Sie durchleben, reflektieren und analysieren dabei die Phasen des Erfassens einer problemhaltigen mathematischen Situation, der Hypothesengenerierung und des Findens eines Lösungsansatzes insbesondere vermittels systematischer Betrachtung und Variation von Beispielen.

In zwei aufeinanderfolgenden Präsenzveranstaltungen (insgesamt 7+5 Präsenzstunden) erhalten die Studierenden weiteren fachdidaktischen Input zu unterschiedlichen Steuerungsinstrumenten und Hilfen für das Problemlösen im Mathematikunterricht (Phase 3, 1 Präsenzstunde). Im Anschluss daran wird, in derselben Kleingruppe, vergleichend ein passend gewähltes Problem auf Schulniveau bearbeitet. Ausgehend von den eigenen Erfahrungen auf unterschiedlichen Problemniveaus können dann Möglichkeiten der Gestaltung differenzierter Hilfestellungen für das bearbeitete Problem auf Schulniveau erarbeitet werden (Phase 4). Zwischen den beiden Präsenzveranstaltungen liegt eine Woche Zeit, in der ca. 10 Stunden Selbststudiumszeit verortet sind.

In der abschließenden Phase 5 (7 Präsenzstunden, ca. 20 Stunden Selbststudium) präsentieren die Kleingruppen ihre unterschiedlichen Arbeitsergebnisse. Alle Studierenden fertigen zudem eine individuelle Ausarbeitung an, die weitere Reflexionselemente enthält.

In den unterschiedlichen Phasen wird also sowohl auf Metaebene als auch auf Objektebene des Lehrens und Lernens von mathematischem Problemlösen gearbeitet: Auf der Objektebene geschieht die eigene Bearbeitung von konkreten mathematischen Problemen auf unterschiedlichen Niveaus, die konkrete didaktische Arbeit bei der Entwicklung einer Hilfestellung für den Unterricht, und die Aufbereitung der gefundenen Lösungen für die Präsentation. Damit verzahnt erfolgt auf der Metaebene der fachdidaktische Input zum mathematischen Problemlösen, sowie die Dokumentation, Reflexion und Analyse der Arbeitsstände und -ergebnisse durch die Studierenden. In den folgenden Abschnitten gehen wir genauer auf die Phasen 2 und 4 ein, erläutern deren Ausgestaltung und diskutieren exemplarisch Studierendenprodukte aus diesen beiden Phasen.

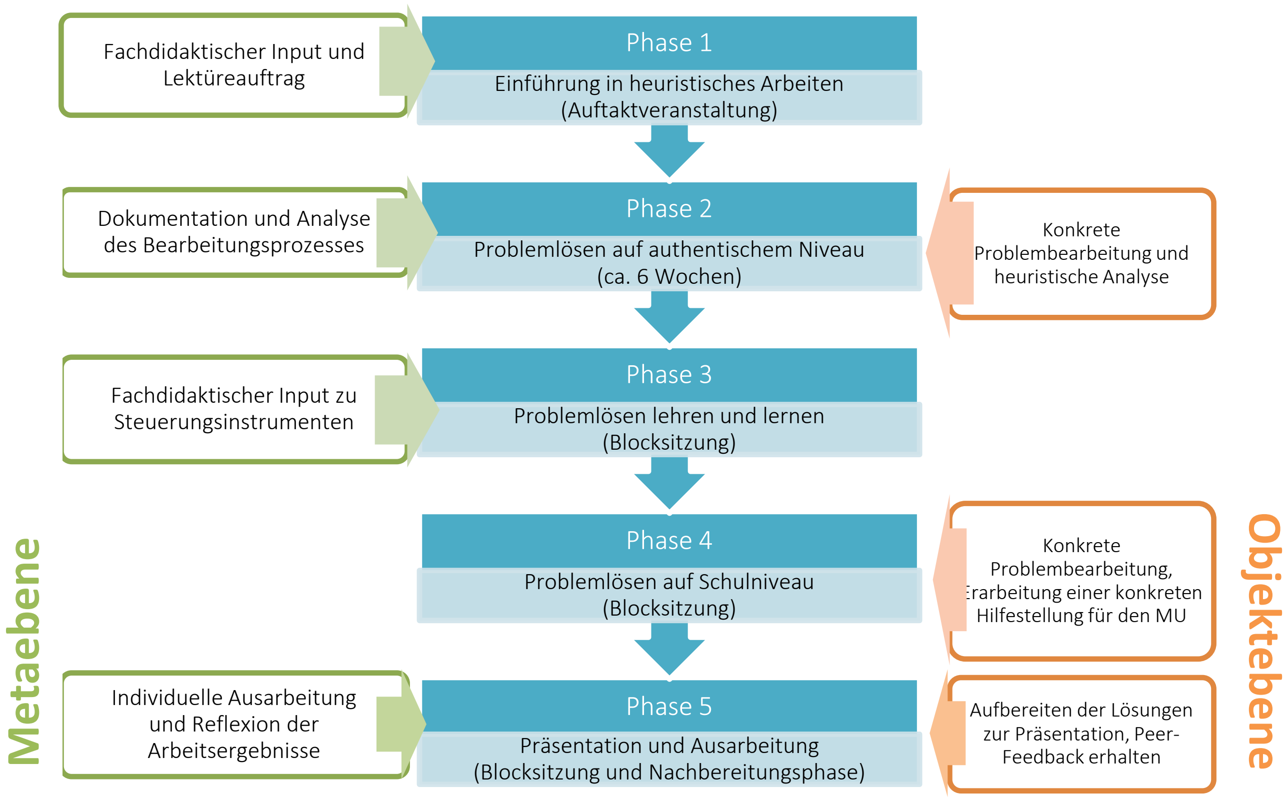


Abbildung 3: Phasierung der Lehrveranstaltung

Mathematische Problemlöseprozesse durchleben und reflektieren

Vorbereitender Lektüreauftrag

Nach der Auftaktsitzung zur Einführung in das heuristische Arbeiten erhielten die Studierenden einen vertiefenden Lektüreauftrag zu Heurismen und Phasen des Problemlösens. Die verwendete Lektüre wurde vor dem Hintergrund ausgewählt, mathematisches Problemlösen als nicht-linearen, aber strukturier- und steuerbaren Prozess zu verstehen und solche Prozesse entsprechend analysieren zu können.

Als Basis-Lektüre wurde ein leicht adaptierter Auszug aus Mason et al. (2010) sowie Auszüge aus (der deutschsprachigen Ausgabe von) Polyas *How to Solve it* (1971) gewählt. Die Arbeit von Mason et al. (a.a.O.) ist dabei ausgewiesenermaßen an Polyas Ideen angelehnt. Dennoch wurden den Studierenden bewusst beide Ansätze als Steuerungs-, Dokumentations- und Analysehilfen vorgestellt und zur eigenen Verwendung angeboten, da sie unterschiedliche Schwerpunkte setzen, deren Gegenüberstellung im Sinne der angestrebten Ziele als fruchtbar erschien: Während Polyas Modell dem unbefangenen Leser zunächst recht linear erscheinen muss, beinhaltet und behandelt der Ansatz von Mason et al. (a.a.O.) explizit die Rolle der Iteration der einzelnen Prozessphasen (vgl. Abb. 4).

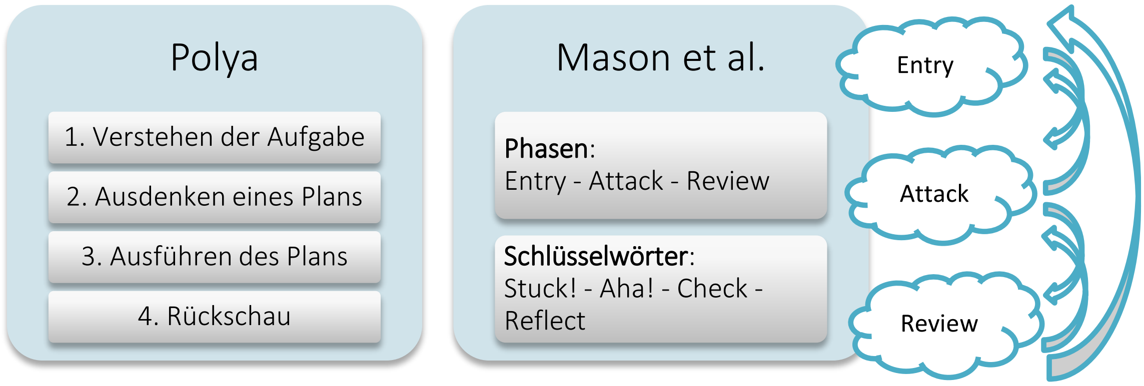


Abbildung 4: Gegenüberstellung der Ansätze von Polya und Mason et al.

Während Polyas Fragenkatalog zu den einzelnen Problemlösephasen unterschiedliche Heurismen abbildet, die aber nicht alle auf jedes Problem passen, fokussieren Mason et al. (a.a.O.) das zunehmend systematischere Arbeiten mit und Variieren von Beispielen, als eine Art „universeller erster Ansatz“ (vgl. Abb. 5).

Obwohl bereits Polya die Rückschauphase als solche sehr betont, liegt ein spezifischer Schwerpunkt bei Mason et al. (a.a.O.) neben und zum Zwecke der Rückschau auf der begleitenden Dokumentation des Problemlöseprozesses.

Polya

- **Verstehen der Aufgabe:**
- Was ist gegeben? Was ist gesucht? Ist die Voraussetzung erfüllbar? Mache eine Skizze, führe passende Bezeichnungen ein.
- **Ausdenken eines Plans:**
- Betrachte die Unbekannte! Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- Kannst du dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere / speziellere / analoge Aufgabe?
- Behalte nur einen Teil der Bedingungen bei; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kannst du sie

Mason et al.

- Mache ein paar Versuche und ziehe daraus Schlüsse!
- Betrachte Spezialfälle!
- Spiele so lange Beispiele durch, bis du dir sich sicher bist!
- Versuche, von den konkreten Details der Beispiele und Spezialfälle zu abstrahieren und ihren wesentlichen Gehalt heraus zu präparieren!
- Gibt es in der konkreten Problemsituation einen „kleinsten Fall"? Betrachte diesen. Betrachte dann, falls vorhanden, den „zweitkleinsten" – was ändert sich?
- Wie sieht ein typischer, generischer Fall aus?
- Kann man bestimmte Spezialfälle in andere überführen? Wie, was passiert dabei?

Abbildung 5: Fragenkataloge von Polya und Mason et al.

Zur systematischen Vertiefung des Arbeitens mit Heurismen erhielten die Studierenden zudem Auszüge aus Schreiber (2011), in denen die Heurismenfamilien der Induktion, Reduktion, Interpretation und Variation erläutert werden. Induktionsheurismen wie Vorwärtsarbeiten und systematisches Probieren dienen dazu, von den besonderen Eigenschaften des Gegebenen zu allgemeineren Einsichten zu kommen. Reduktionsheurismen wie Fallunterscheidung und Rückwärtsarbeiten haben analytischen Charakter und reduzieren Komplexität des Problems „von hinten". Interpretationsheurismen wie Analogie- und Modellbildung nutzen die Übertragung von einem System (z.B. einer Sprache oder einem Gegenstandsbereich) in ein anderes. Variationsheurismen, wie die Variation des Gegebenen, der Exaktheitsstufe oder des Allgemeinheitsgrades, werden von Schreiber auch als der „Motor des heuristischen Aufgabenlösens" bezeichnet (Schreiber 2011, S. 97).

Studierendenprodukt: Prozessanalyse

In der zweiten Seminarphase haben die Studierenden in Kleingruppen von zwei bis drei Personen eigentätig eine mathematische Problemstellung auf universitärem Niveau bearbeitet, den Bearbeitungsprozess dokumentiert, reflektiert und analysiert. Die folgende Sequenz aus einer solchen Prozessdokumentation und -analyse verdeutlicht, dass die Gruppe dabei die zur Auswahl gestellten Analysemittel recht souverän und auch in sinnvoller Kombination einsetzt und aufeinander bezieht. Diese Gruppe hat sich mit folgender Problemstellung (vgl. Loase et al. 2005) auseinandergesetzt:

Partitionen

Die klassische *Partitionsfunktion* $n \mapsto p(n)$ ordnet einer natürlichen Zahl n die Anzahl $p(n)$ der Möglichkeiten zu, die Zahl n als Summe von positiven natürlichen Zahlen zu schreiben.

Wir betrachten hier eine Variante $n \mapsto b(n)$, bei der $b(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, n als Summe von Zweien und Dreien zu schreiben. Zum Beispiel ist $b(6) = 2$, denn $6 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3$.

> Finden Sie eine explizite Formel für $b(n)$. Wie verhält sich $b(n)$ für $n \to \infty$?
> Wie wächst $b(n)$?

Wir zeigen hier (Abb. 6) die erste Seite der in Phase 2 erstellten Dokumentation und Analyse des Bearbeitungsprozesses sowie den darin erwähnten Anhang „Tabelle 1“ (hier: Abb. 7).

Die Gruppe verwendet in ihrer Analyse Schlüsselwörter wie in Mason et al. (mittlere Spalte: Idee, Vermutung, Beobachtung, Prognose), benennt heuristische Strategien (rechte Spalte) und ordnet sie ihren Heurismenfamilien nach Schreiber zu (rechte Spalte, dunkle Kästen). Wie aus den späteren individuellen Reflexionen der Gruppenmitglieder deutlich wurde, hat diese Gruppe eine erste Fassung der schrittweisen Prozessdokumentation *prozessbegleitend* erstellt.

Beim Vergleich der Prozessdokumentationen unterschiedlicher Gruppen zeigt sich, dass es noch weitere Gruppen wie die gewählte Beispiel-Gruppe gab, die ihre Dokumentation und Analyse zumindest in Teilen prozessbegleitend entwickelt haben. Bei diesen Dokumentationen fällt insbesondere die verstärkte Verwendung von Schlüsselwörtern wie in Mason et al. auf. Hier werden die bereitgestellten Hintergründe und Hilfsmittel zur Prozessanalyse also auch zur Prozesssteuerung eingesetzt. Andere Gruppen haben die strukturierte Dokumentation und Analyse erst als abschließendes Rückschau-Element vorgenommen, bei ihren Analysen stehen vermehrt die Phasen des Problemlösens nach Polya im Vordergrund. Diese Beobachtung ist konsistent mit der bereits beschriebenen unterschiedlichen Schwerpunktsetzung und Zielrichtung der beiden kompatiblen Ansätze von Polya und Mason et al.

<table>
<tr><th>Schritt</th><th>Gedanken</th><th>Analyse</th></tr>
<tr><td>Spezialfälle</td><td>*Die hier aufgeführten Überlegungen sind bei der Erstellung der Tabelle 1 entstanden. Dort ist jeweils vermerkt, an welcher Stelle die Gedanken aufgetreten sind.*

Vermutung 0:
Unterschiede bei geraden und ungeraden Zahlen
- gerade Zahlen brauchen gerade Anzahl an 3en
- ungerade Zahlen brauchen gerade Anzahl an 2en[1]

Idee:
Rekursive Zuordnungsvorschrift?

Beobachtung:
b(11) hat eine 2 weniger als 10, dafür eine 3 mehr.
Fehler in Vermutung 0 fällt auf! Verbesserung:
ungerade Zahlen brauchen gerade Anzahl an 3en

Vermutung 1:
2+2+2=3+3
→ alle Zahlen, die durch 6 teilbar sind, haben eine Partition mehr als die Zahlen zuvor?

Prognose 1:
b(13)= 2
b(14)= 3

Vermutung 2:
$b(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{6}, \text{ für n kongruent 1 modulo 6} \\ (\frac{n}{6})_{\text{abgerundet auf ganze Zahl}} + 1, \text{ sonst} \end{cases}$</td><td><u>systematisches Probieren</u>
- größere Fallmengen systematisch untersuchen
Induktion

Idee, die notiert und im weiteren Verlauf vergessen wurde.

empirische Beobachtungen

aus konstanten Vorgaben variable Parameter machen

<u>vorwärts Arbeiten</u>
Induktion</td></tr>
<tr><td>Erläuterungen zur Vermutung 2:</td><td><table><tr><th>Zahl m</th><th>Zahl n = m*6</th><th>Anzahl der Partitionen</th><th>Gedankengang</th></tr><tr><td>1</td><td>1*6</td><td>2</td><td>$(\frac{1*6}{6})$+1=2</td></tr><tr><td>2</td><td>2*6 = 12</td><td>3</td><td>$(\frac{2*6}{6})$+1=3</td></tr><tr><td>m</td><td>m*6</td><td>k</td><td>$(\frac{m*6}{6})$+1=k</td></tr></table>Zusammenhang zwischen m und k ist offensichtlich:</td><td>*Diese Erläuterung wurde im Gruppengespräch erstellt, um den Gedankengang der Problemlöserin für andere zugänglich zu machen.*</td></tr>
</table>

1

[1] falsch: 11= 2+3+3+3

Abbildung 6: Studierendenprodukt Prozessanalyse

n	Partitionen	b(n)
1		0
2	2	1
3	3	1
4	2 + 2	1
5	2 + 3	1
6	2 + 2 + 2 = 3 + 3	2
	Vermutung 0: Unterschiede bei geraden und ungeraden Zahlen - gerade Zahlen brauchen gerade Anzahl an 3en - ungerade Zahlen brauchen gerade Anzahl an 2en	
7	2 + 2 + 3	1
8	2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3	2
9	2 + 2 + 2 + 3 = 3 + 3 + 3	2
10	2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 3 + 3	2
11	2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 3 + 3 + 3	2
	Vermutung 1: 2 + 2 + 2 = 3 + 3 ➔ alle Zahlen, die durch 6 teilbar sind, haben eine Partition mehr als die Zahlen zuvor	
12	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 + 3	3
	Prognose 1: b(13) = 2 b(14) = 3	
13	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 3 + 3 + 3	2
14	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3	3
15	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3	3
	Vermutung 2: $b(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{6}, \text{ für n kongruent 1 modulo 6} \\ (\frac{n}{6})_{\text{abgerundet auf ganze Zahl}} + 1, \text{ sonst} \end{cases}$	
16	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3	3
17	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	3
18	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	4
19	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	3
20	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	4

Abbildung 7: Tabelle 1, auf die die Prozessanalyse der Studierenden verweist

Mathematisches Problemlösen als Lernziel realisieren

Die Studierenden sollen im Rahmen der ersten beiden Seminarphasen einerseits authentische eigene Erfahrungen im Problemlösen machen, und sich andererseits einen theoretischen Hintergrund zu Heurismen und Problemlösephasen erarbeiten. Davon ausgehend werden sie in Phase 4 mit der Aufgabe konfrontiert, Schülerinnen und Schüler beim Problemlösen anzuleiten. Die Hilfestellungen zum Problemlösen, die hierbei zum Einsatz kommen können, liegen in einem Spannungsfeld von Offenheit und Führung. In der dritten Seminarphase wird dieses Spannungsfeld wie in Abbildung 8 dargestellt ist, ausgelotet:

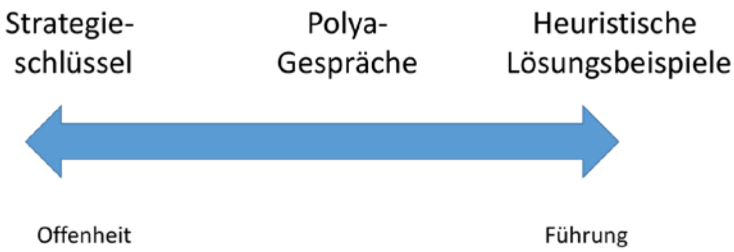


Abbildung 8: Hilfestellungen zum Problemlösen im Spektrum von Offenheit und Führung

Wir zeigen in den folgenden Abschnitten, wie Strategieschlüssel und Heuristische Lösungsbeispiele im Seminar eingesetzt bzw. erarbeitet wurden.

Die Idee der Strategieschlüssel

Strategieschlüssel sind ein bekanntes Mittel zur Steuerung von Problemlöseprozessen (Philipp & Herold-Blasius 2016; Herold-Blasius et al. 2017). Wir verwenden die Variante aus dem Projekt *Mathe sicher können* (O.D.), in der zwischen grünen und roten Strategieschlüsseln unterschieden wird (vgl. Abb. 9):

- *Grüne Strategieschlüssel* enthalten Verweise auf allgemeine Strategien, die in der jeweiligen Aufgabe sinnvoll verwendbar sind, aber aufgabenunabhängig formuliert werden. Ein Beispiel stellt der Schlüssel „Betrachte systematisch Spezialfälle! Findest Du Gesetzmäßigkeiten, die sich verallgemeinern lassen“ dar, der auf einen Variationsheurismus verweist.
- *Rote Strategieschlüssel* konkretisieren allgemeine Strategien der grünen Schlüssel für das vorliegende Problem. Als Konkretisierung des obigen Schlüssels könnte bei der Aufgabe „Welche Zahlen lassen sich als Summe mehrerer direkt aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben?“ (siehe auch (Mason et al. 2010, S. 62); vgl. Beispiel 1 weiter unten) der folgende rote Schlüssel dienen: „Betrachte Spezialfälle! Betrachte Summen mit ungerader Summandenzahl – was fällt Dir auf?“

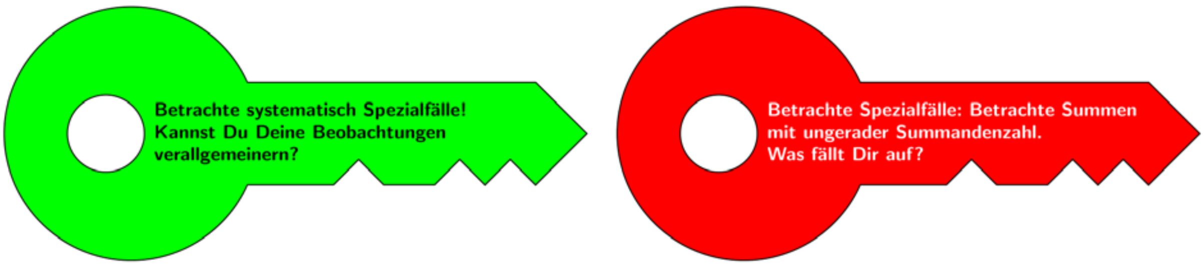


Abbildung 9: Grüne und rote Strategieschlüssel

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Seminar lernten die Idee der Strategieschlüssel in ihrer Rolle als Problemlöser kennen: Sie erhielten eine zum jeweiligen Problem passende Auswahl an grünen und roten Schlüsseln (auf Anforderung) beim

Lösen der Probleme auf Schulniveau. Pro Problemstellung wurden jeweils 3-5 grüne und rote Schlüssel vorbereitet.

Der Einsatz der Schlüssel ist dabei in gestufter Form gedacht: Es werden zunächst grüne Schlüssel eingesetzt und erst, wenn diese den Lösungsprozess nicht voranbringen, werden rote Schlüssel ausgegeben. Die roten Schlüssel können ihrerseits gestuft konzipiert werden (in fortschreitendem Konkretisierungsgrad).

Auf Seiten der Lehrperson erfordert der Einsatz von Strategieschlüsseln zunächst, die zentralen Schritte des Problemlöseprozesses zu identifizieren, um auf dieser Grundlage grüne Schlüssel passend wählen zu können und rote Schlüssel aufgabenbezogen zu generieren. Die Lehrperson macht sich hierbei den eigenen Löseprozess zunutze.

Heuristische Lösungsbeispiele

Das Format „Heuristisches Lösungsbeispiel“ (HLB) wurde den Seminarteilnehmerinnen und -teilnehmern in der zweiten Blocksitzung durch einen Dozenteninput vorgestellt. Dieser mündete im Auftrag an die Gruppen, ein HLB zu ihrem Problem auf Schulniveau zu erstellen. Die Studierenden erprobten die Idee somit aus der Perspektive von Lehrpersonen.

Lösungsbeispiele, die eine Aufgabenstellung, die Lösungsschritte und die Lösung enthalten, werden traditionell für das Lernen von Verfahren eingesetzt. Lernende können sie als Modell für das Lösen bestimmter Aufgabentypen nutzen. Es gilt als gut belegt, dass der Einsatz von Lösungsbeispielen *in frühen Lernphasen* wirksamer ist als eigenes Aufgabenlösen („Worked-out example effect“, siehe die Übersicht in Atkinson et al. 2000). Reiss und Renkl (2002) haben die Idee der Lösungsbeispiele auf das Problemlösen-Lernen und Beweisen-Lernen ausgedehnt und *Heuristische Lösungsbeispiele* für Problemlöseaufgaben vom Typ „Vermuten und Beweisen“ vorgeschlagen. Deren Ziel ist es nicht, einen Lösungsalgorithmus zu bestimmten Beweisaufgaben zu üben, sondern anhand konkreter Beispiele zu heuristischen Arbeitsweisen generell anzuleiten. Ausgangspunkt ist das Beweisphasenmodell von Boero (1999), das die Arbeitsphasen vom Explorieren einer Situation bis hin zur Ausarbeitung eines fertigen Beweises modelliert (Abb. 10).

1	2	3	4	5	6
Situation explorieren, Vermutung aufstellen	Behauptung formulieren	Vermutung explorieren, Argumente finden	Argumente auswählen und verknüpfen	Argumente zu einen Beweis organisieren	Annäherung an einen formalisier-ten Beweis

Abbildung 10: Phasen im Modell von Boero

Alle der im Seminar bearbeiteten Problemstellungen ließen sich im Sinne des Typs „Vermuten und Beweisen“ auffassen. Daher eignete sich der folgende, durch die Boero-Phasen motivierte Gliederungsvorschlag für ein HLB (vgl. Reiss et al. 2008), den wir den Seminarteilnehmerinnen und -teilnehmern vorgegeben haben:

1. Problem erkennen

2. Problem untersuchen
3. Behauptung aufstellen
4. Ressourcen anzapfen (Definitionen und Sätze, die eventuell von Belang sind)
5. Beweisidee entwickeln
6. Beweis durchführen

Wesentlich für den Erfolg von Lösungsbeispielen sind Selbsterklärungsaufforderungen an die Bearbeiter. Nach Zöttl und Reiss (2010) unterscheiden wir:

- *Antizipatorische Selbsterklärungsaufforderungen*, die dazu auffordern, den nächsten Lösungsschritt im Voraus zu überlegen und anschließend mit dem Lösungsbeispiel zu vergleichen
- *Prinzipienbasierte Selbsterklärungsaufforderungen*, die dazu auffordern, die Prinzipien zu benennen, die dem Lösungsprozess zugrunde liegen und damit eine Reflexion des Lösungsprozesses anstoßen

Heuristische Lösungsbeispiele sind eine Hilfestellung mit sehr starker Führung. In den längerfristigen Lernprozess kann man sie sinnvoll einbetten, indem mit der Bearbeitung eines ausführlichen Lösungsbeispiels begonnen wird, während in weiteren Lösungsbeispielen immer mehr Lösungsschritte weggelassen werden, die durch die Lernenden ergänzt werden müssen („Fading“, siehe Atkinson et al. 2003).

Studierendenprodukt: Heuristisches Lösungsbeispiel

Beispiel 1: Eine Studierendengruppe hat die Aufgabe „Welche Zahlen lassen sich als Summe mehrerer direkt aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen schreiben?“ bearbeitet und ein HLB dazu konzipiert. Ein möglicher Lösungsansatz besteht im systematischen Probieren und Variieren von Beispielen, welches die Abduktion möglicher zugrundeliegender Muster aufgrund von Beobachtungen und deren induktive Prüfung beinhaltet (eine Kombination aus Induktions- und Variationsheurismen, vgl. Schreiber). Ist auf diesem Wege hinreichende Sicherheit erlangt, ein passendes Muster gefunden zu haben, geht es an dessen allgemeine Formulierung. Der erste Teil des folgenden Ausschnitts beschließt entsprechend den Abschnitt „Das Problem untersuchen“, der zweite Teil leitet den Abschnitt „Die Behauptung aufstellen“ des betrachteten HLB ein (vgl. den obigen Gliederungsvorschlag):

> ➢ Notiere Dir alle Zahlen, für die Du keine Summe gefunden hast. Welche Gemeinsamkeit siehst Du?

Dorie betrachtet ihre Liste:	1	2	4	8	16	32	64	128	...

Dorie: *Jetzt fällt mir wieder ein, welche Gemeinsamkeit die Zahlen haben:*
Sie sind 2er-Potenzen!

Marlin: *Welche Zahlen lassen sich denn nun als Summe direkt aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen?*

➢ Stelle eine Behauptung auf, die Marlins Frage beantwortet, und notiere sie hier:

Die Autoren des HLB verwenden dialogische Elemente und setzen diese erfolgreich ein, um eine antizipatorische Selbsterklärungsaufforderung zur allgemeinen Formulierung der Beobachtungen einzuleiten. Im folgenden Abschnitt des HLB („Ressourcen anzapfen“) wird dann eine prinzipienbasierte Selbsterklärungsaufforderung eingesetzt, um die für den weiteren Verlauf benötigten Grundlagen bereitzustellen. Dabei wird der Blick auf die prinzipielle Möglichkeit gelenkt, Klassen von Zahlen anhand der Eigenschaften ihrer Primfaktorzerlegung zu bilden (hier ist die Unterscheidung von Zweierpotenzen und Zahlen mit mindestens einem ungeraden Primfaktor relevant), und dann mit diesen Eigenschaften weiterzuarbeiten (der im HLB ausgearbeitete Lösungsweg nutzt später das Vorhandensein eines ungeraden Primfaktors, um die gesuchte Summendarstellung zu konstruieren).

➢ Erinnere Dich, welche Eigenschaften Primzahlen haben und fülle die Lücken: Primzahlen sind die Zahlen, die nur ______ ______ und 1 als Teiler haben (z.B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...).

➢ Schreibe die Zahlen 7, 8, 9, 12, 22, 32, 40 als Produkt von Primzahlen.
Vergleiche deine Primfaktorzerlegungen. Welche Besonderheiten fallen Dir auf?

Beispiel 2: Eine Studierendengruppe hat die Aufgabe „Mit wie vielen Nullen endet die Zahl 50.000!“ bearbeitet. Ein möglicher Lösungsweg übersetzt die Frage nach der Anzahl der Nullen (die sich auf die Zahldarstellung bezieht) zunächst in die Frage, wie oft die Zahl 10 Teiler der Zahl 50.000! ist (ein Interpretationsheurismus, der den Gegenstandsbereich des Problems in einen anderen Gegenstandsbereich abbildet, vgl. Schreiber 1994-2013).

Der folgende Ausschnitt aus dem erstellten HLB ist dem Abschnitt „Das Problem untersuchen“ entnommen:

Welche zwei Zahlen und ihre Vielfachen sorgen als **Produkt** dafür, dass sich die Anzahl der Nullen erhöht ? Welche Zahl und ihr Vielfaches sorgt dafür, dass **egal mit welcher Zahl** man sie multipliziert, sich die Anzahl der Nullen erhöht?
Antwort: ____

Welche Zahlen und ihr Vielfaches erfüllen diese Bedingung **nicht** ?
Antwort: ____

In diesem Beispiel zeigt sich, dass die Studierenden die Möglichkeiten eines HLB noch nicht voll ausschöpfen. Die Fragen sind zwar als Selbsterklärungsaufforderungen gedacht, tragen aber wenig zum Explizieren der heuristischen Strategie bei, sondern lenken den Bearbeiter des HLB stattdessen in inhaltlicher Hinsicht stark auf eine bestimmte Lösungsidee hin – die Frage bezieht sich sogleich auf den veränderten Gegenstandsbereich, aber nicht auf den strategischen Wechsel dorthin.

Evaluation und Reflexionen

Zum Abschluss des Seminars wurde eine Evaluation durchgeführt, in der die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bezogen auf die oben erläuterten Lernziele Einschätzungen zu ihrem Lernerfolg und zu der Wirksamkeit der Seminaraktivitäten geben sollten (angelehnt an die Idee der „Bielefelder Lernzielorientierten Evaluation“, siehe z. B. Frank & Kaduk 2017).

In Bezug auf die Ziele, eigene Problembearbeitungsprozesse analysieren zu lernen und charakteristische handlungsleitende Elemente zu erkennen und zu erfahren, fühlen sich fast alle Seminarteilnehmerinnen und -teilnehmer den Anforderungen in diesen Bereichen nach dem Seminar gewachsener (s. Abb. 11). Von den verschiedenen Aktivitäten im Seminar wurden z.B. das Kennenlernen von Modellen zum Problemlösen, das eigentätige Bearbeiten von Problemen und das Erstellen einer zugehörigen Präsentation überwiegend als eher hilfreich oder sehr hilfreich eingeschätzt, um das Ziel, eigene Problembearbeitungsprozesse analysieren zu lernen, zu erreichen (s. Abb. 12). Hierdurch kann man das Seminarkonzept bestätigt sehen, das vorsieht, dass die Studierenden gerade durch das eigene Arbeiten an Problemen die Problemlöseprozesse kennenlernen und – vor allem – erfahren sollen.

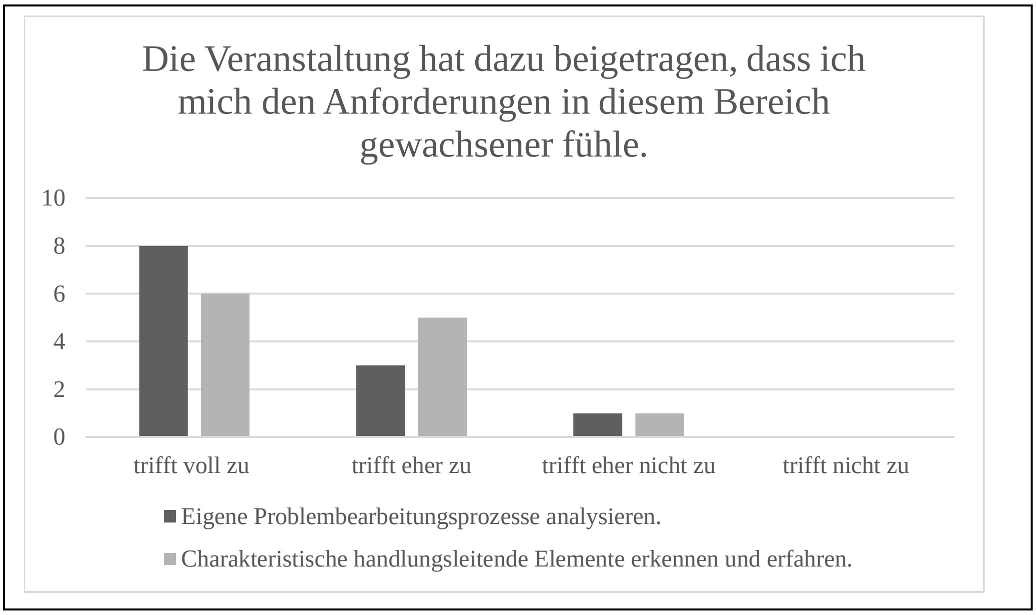


Abbildung 11: Auszug aus der Evaluation (Anzahl der Teilnehmer: 12)

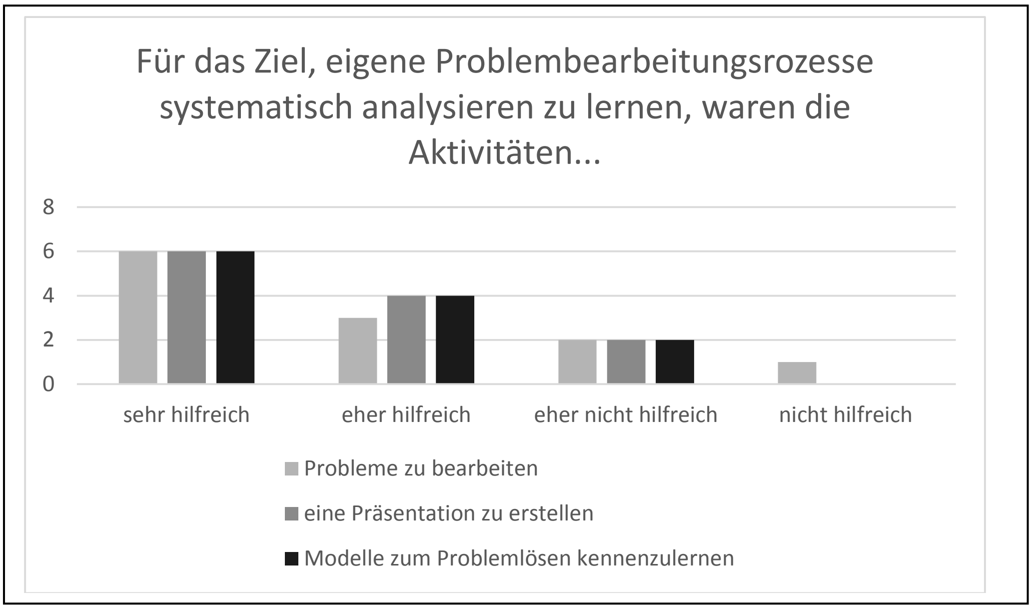


Abbildung 12: Auszug aus der Evaluation (Anzahl der Teilnehmer: 12)

Andererseits wurden die Aktivitäten, Feedback von den anderen Seminarteilnehmerinnen und -teilnehmern zu den Präsentationen zu erhalten und Vorträge von anderen Gruppen zu erleben, als weniger hilfreich für die Erreichung der Lernziele beurteilt. Hier ist für zukünftige Durchläufe der Veranstaltung zu überlegen, wie man die Präsentationsphasen, deren Vorbereitung ja als produktiv aufgefasst wird, so gestalten kann, dass sie auch für die Zuhörerinnen und Zuhörer gewinnbringender werden.

Bezogen auf das Ziel, die eigenen Einstellungen und Überzeugungen zu reflektieren, schätzten die meisten Studierenden die angebotenen Aktivitäten im Seminar, wie zum Beispiel offene Reflexionsaufträge zum eigenen Problemlöseprozess, als wenig bis gar nicht hilfreich ein. In weiteren Durchläufen des Seminars werden nun zusätzlich auch gelenktere Reflexionsaufträge eingesetzt.

In der schriftlichen Hausarbeit, die die Studierenden im Anschluss an das Seminar anfertigen mussten, sollten sie neben einer Ausarbeitung und einem Vergleich ihrer Lösungsprozesse des Hochschul- und Schulproblems eine Reflexion schreiben, zu welchen allgemeineren Erkenntnissen über mathematisches Problemlösen und das Lehren und Lernen desselben die Arbeit an der vergleichenden Analyse der beiden Problemlöseprozesse und die Ausarbeitung des heuristischen Lösungsbeispiels geführt haben (siehe Kasten 1).

Die schriftliche Hausarbeit soll folgende Elemente umfassen:

- Lösungen von Hochschul- und Schulproblem
- Analyse der Lösungsprozesse
- Vergleich der Lösungsprozesse
- Heuristisches Lösungsbeispiel
- Reflexion

Reflexionsauftrag im Rahmen der schriftlichen Ausarbeitung:

Reflektieren Sie die Arbeit in der Gruppe in den letzten beiden Blocksitzungen: Zu welchen allgemeineren Erkenntnisse über mathematisches Problemlösen und das Lehren und Lernen desselben verhalfen Ihnen insbesondere

- die Arbeit an der vergleichenden Analyse Ihrer beiden Problemlöseprozesse?
- die Ausarbeitung des heuristischen Lösungsbeispiels?

Kasten 1: Arbeitsauftrag für die schriftliche Ausarbeitung

Hier wurde unter anderem genannt, dass es sinnvoll sei, Probleme zunächst selbst zu lösen und den eigenen Problemlöseprozess zu analysieren, um dann geeignete Unterrichtsumsetzungen und Hilfestellungen für Schülerinnen und Schüler planen zu können, siehe z. B. die Rückmeldungen von Lisa und Angela (Kasten 2). Außerdem wurde, wie z. B. von Angela (ebd.) formuliert, dass erstmalig im Studium die Struktur des Arbeitens an mathematischen Problemen explizit thematisiert und aufbereitet wurde. Die Heurismen und die Arbeitsweisen zum Problemlösen selbst waren den Studierenden nach ihren Angaben zwar nicht neu, sie haben sie in den vorangegangen fachwissenschaftlichen Veranstaltungen schon gesehen und in den Hausübungen selbst angewandt. Jedoch handelte es sich hier mehr um implizites Wissen, dessen sie sich nicht bewusst waren. Im Seminar wurden die Arbeitsphasen des Problemlöseprozesses herausgearbeitet und die bekannten Heurismen benannt und gruppiert, was die Studierenden als hilfreich ansahen, um in der Schule Problemlösen zu lehren.

Lisa: Damit ich als Lehrerin später geeignete Strategieschlüssel entwerfen kann, muss ich das Problem zunächst einmal selbst gelöst und anhand der verwendeten Heurismen und Prozessphasen analysiert haben.

Angela: Durch die Analyse unseres Lösungsprozesses auf Schulniveau wurden beispielsweise Schwierigkeiten sehr schnell sichtbar, was es erlaubt, diese bei einer Verwendung des Problems im Unterricht abzufangen. […] Für das eigene Lösen von hochschulmathematischen Problemen sind die Erkenntnisse des Seminares insofern hilfreich, als dass diese Struktur mathematischen Arbeitens erstmalig so intensiv bewusst geworden ist.

Kasten 2: Zitate aus dem Reflexionsteil der Hausarbeiten

In den Rückmeldungen in Kasten 3 zeigt sich, dass die Studierenden besonders durch den Vergleich der Lösungsprozesse ihres Hochschul- und Schulproblems zu allgemeinen Erkenntnissen über das Problemlösen gekommen sind, die sie für wertvoll für ihre Arbeit im Unterricht einschätzen.

Angela: Im Zuge des Vergleichsprozesses wurden verschiedene Erkenntnisse gewonnen, die zukünftig zum einen hilfreich für das eigene Problemlösen, zum anderen aber auch für die Aufbereitung derartiger Prozesse im Unterricht sind. Als beinahe hinderlich erweist sich daher die Tatsache, dass der Problemlöseprozess des Hochschulproblems in unserem Fall sehr linear verlief und wir daher kaum Erfahrungen mit Schwierigkeiten gemacht haben, die so auch in den Lösungsprozessen von SuS vorkommen können. In den Grundzügen ist aber dennoch deutlich geworden, welche Phasen ein Lösungsprozess durchläuft und welche möglichen Hilfen gegeben werden können.

Lisa: Die vergleichende Analyse meiner beiden Problemlöseprozesse hat mir die Ähnlichkeiten zwischen dem Lösungsprozess auf Hochschul- und Schulniveau gezeigt. Bei beiden Prozessen haben wir dieselben Phasen durchlaufen und ähnliche heuristischen Strategien verwendet. Daran wird mir deutlich, dass das Problemlösen nicht an einen mathematischen Wissenstand oder mathematische Fähigkeiten gebunden ist. […] Der Vergleich der beiden Prozessphasen hat mir auch gezeigt, dass man die einzelnen Phasen kennen muss, um die Erkenntnisse des Problemlösens wirklich nutzen zu können. Die Rückschau als eine der wertvollsten Phasen des gesamten Prozesses, war mir vor Beginn des Seminars nicht bekannt.

Laura: Alles in Allem habe ich gemerkt, dass man in der Vorbereitung von Unterrichtsmaterial immer wieder Gedankengänge auf Hochschulniveau in Schulniveau übertragen muss und umgekehrt.

Kasten 3: Zitate aus dem Reflexionsteil der Hausarbeiten

Laura: Mich persönlich jedoch hat, wie bereits erwähnt, die Tatsache gestört, den Beweis durch tabellarische Erläuterungen anstelle von mathematischen Argumenten zu führen.

Kasten 4: Zitat aus dem Reflexionsteil der Hausarbeiten

Diskussion und Fazit

Die Erfahrungen im Seminar zeigen, dass alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Problemlöseprozesse erfolgreich durchliefen. Es hat sich tatsächlich als fruchtbar erwiesen, dass die Studierenden diese Problemlöseprozesse zunächst auf ihrem eigenen universitären Niveau durchlaufen haben. Das authentische Erleben der einzelnen Phasen und ihres nichtlinearen Wechselspiels, sowie der anschließende Vergleich der Lösungsprozesse der Hochschul- und Schulprobleme, haben zu fruchtbaren Erkenntnissen im Sinne der oben genannten Lernziele geführt. Dies betrifft insbesondere das Lernziel, dass die Studierenden Herangehensweisen, die beim mathematischen Problemlösen auf Schulniveau auftreten, auf dem eigenen (d.h. universitären) fachlichen Niveau verstehen, die Verbindungen zwischen fachlichem Wissen und fachdidaktischem Wissen festigen und ihr fachliches Wissen professionsbezogen besser nutzen lernen. Ebenso betrifft es die Zielsetzung, dass die Studierenden charakteristische handlungsleitende Elemente beim mathematischen Tun auf Schul- und Hochschulniveau erfahren, erkennen und reflektieren lernen.

Die Studierenden sehen auch selbst den Bezug zwischen der Arbeit auf Hochschul- und Schulniveau und seinen möglichen Mehrwert, wie z.B. die Rückmeldungen in Kasten 3 anzeigen. Die Reflexion von Angela (ebd.) deutet zudem an, dass sich manche Studierende sogar ein anspruchsvolleres Beispiel auf Hochschulniveau gewünscht hätten, um die Bezüge noch deutlicher zu sehen und nötige Erfahrungen im Problemlöseprozess selbst zu machen.

Der systematische Einsatz von Reflexionsaufträgen und der damit verbundene Wechsel von der Objekt- zur Metaebene hat, wie erhofft, dazu geführt, dass die Studierenden Problemlöseprozesse intensiv durchdacht und unter für sie neuen Aspekten betrachtet haben, und so ihr – bisher zum Teil nur implizites – Wissen über das Problemlösen als Lehrkraft gezielter einsetzen können (siehe z. B. die Reflexionen in Kasten 2 und 3).

Die Ergebnisse deuten zudem darauf hin, dass der Lektüreauftrag und die relativ kurzen Inputs ausreichend waren, um die Studierenden in die Lage zu versetzen, die Analysewerkzeuge effektiv zu nutzen, um ihre Problemlöseprozesse zu reflektieren und die Phasen des Problemlöseprozesses und die verwendeten Heurismen herauszuarbeiten (vgl. auch die Zitate von Angela in Kasten 2 und 3).

Bei der Konzeption der HLB haben aber noch nicht alle Studierende deren Potential voll ausgeschöpft und die Strukturelemente für ihr eigenes Beispiel gut nutzen können. Dies legt nahe, dass die Einführung in das Format der HLBs deutlich mehr Zeit erfordert, als im ersten Durchgang vorgesehen war. In weiteren Durchläufen werden die Beispiel-HLBs ausführlicher besprochen, ggf. von den Studierenden zunächst selbst durchlaufen, und es werden mehr HLB-Varianten gezeigt.

Es hat sich herausgestellt, dass das Lernziel, die eigenen Einstellungen und Überzeugungen bewusst zu machen, kritisch zu hinterfragen und eventuell zu ändern, schwieriger zu erreichen ist. Wie oben berichtet, schätzen die Studierenden die verwendeten Aktivitäten und Instrumente hier nicht als besonders hilfreich ein. Ein möglicher Grund für diese Einschätzung ist, dass es für die Studierenden während des Seminars nicht ganz klargeworden ist, was mit „Einstellungen und Überzeugungen" gemeint war; einzelne Reflexionen deuten dies, wenn auch nicht explizit, an. In nachfolgenden Durchläufen sollte dies also expliziter thematisiert werden, etwa durch Einbeziehen von Studien zu epistemologischen Überzeugungen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen von Studierenden und Schülerinnen und Schülern im Bereich des mathematischen Problemlösens. Zudem fand die Bearbeitung des zentralen, abschließenden Reflexionsauftrags (siehe Kasten 1) erst im Rahmen der schriftlichen Hausarbeit statt, die im Anschluss an das Blockseminar angefertigt wurde, während die Evaluation noch in der letzten Seminarsitzung durchgeführt wurde und somit gar nicht die Erkenntnisse der Bearbeitung dieses Reflexionsauftrags erfassen konnte.

In einigen Reflexionen im Rahmen der schriftlichen Ausarbeitungen wird dennoch deutlich, dass durch die Arbeit und die Diskussionen im Seminar Einstellungen und Haltungen zum mathematischen Problemlösen zumindest bewusst wurden, auch wenn zu diesem Zeitpunkt noch keine Änderung zu verzeichnen ist. Dies zeigt sich z. B. am Auszug aus der Reflexion von Laura (Kasten 4), die operativ geführte Begründungen nicht in Einklang mit ihren Einstellungen zur Formulierung von mathematischen Beweisen bringen konnte. Hier ist auch zu bedenken, dass das als Blockveranstaltung konzipierte Seminar nur eine relativ kurze angeleitete „Interventionsdauer" umfasst und die Evaluationsabfrage im unmittelbaren Anschluss stattfand. Studien wie zum Beispiel Kienhues et al. (2010) und Heikkinen et al. (2015) zum Einfluss von Interventionen auf stabile, langlebige Konstrukte wie Einstellungen und Überzeugungen deuten darauf hin, dass es von einer Reihe von noch nicht vollständig verstandenen externen und internen Einflussfaktoren abhängt, ob, inwiefern, und wie nachhaltig sich diese durch geeignete, intensive Interventionen auch von kurzer Dauer beeinflussen lassen. Vor diesem Hintergrund lassen die Reflexionen vermuten, dass die Veranstaltung auch wichtige Anstöße gegeben hat, die zum Überdenken von Einstellungen und Haltungen zum mathematischen Problemlösen führen können.

Förderhinweis

Das diesem Artikel zugrundeliegende Vorhaben wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01JA1504 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Literaturverzeichnis

Anzis, B., Tohaneanu, S.O. (2016). On the geometry of real or complex supersolvable line arrangements. *Journal of Combinatorial Theory,* 140, 76-96.

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of educational research*, 70(2), 181-214.

Atkinson, R. K., Renkl, A., Merrill, M. M. (2003). Transitioning from studying examples to solving problems: Effects of self-explanation prompts and fading worked-out steps. *Journal of Educational Psychology*, 95(4), 774.

Bauer, Th., Müller-Hill, E., Weber, R. (2017). Fostering subject-driven professional competence of pre-service mathematics teachers – a course conception and first results. Preprint.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. 7/8.

Bruder, R. (2002). Heuristik – Problemlösen lernen. *Mathematik lehren* 115.

Collet, C. (2009): Wirkungsanalysen von Lehrerortbildungen zu Problemlösen in Verbindung mit Selbstregulation. In: Heinze, A., Krummheuer, G. (Hrsg.): *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, 2, Münster: Waxmann.

Dreher, U., Holzäpfel, L., Leuders, T., Stahnke, R. (2018). Problemlösen lehren lernen – Effekte einer Lehrerfortbildung auf die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(2), 227-256.

Frank, A., Kaduk, S. (2017). Lehrveranstaltungsevaluation als Ausgangspunkt für Reflexion und Veränderung. Teaching Analysis Poll (TAP) und Bielefelder Lernzielorientierte Evaluation (BiLOE). In: Arbeitskreis Evaluation und Qualitätssicherung der Berliner und Brandenburger Hochschulen und Freie Universität Berlin (Hrsg.), *QM-Systeme in Entwicklung: Change (or) Management? Tagungsband der 15. Jahrestagung des Arbeitskreises Evaluation und Qualitätssicherung der Berliner und Brandenburger Hochschulen am 2./3. März 2015* (S. 39-51), Freie Universität Berlin.

Gawlick, Th. (2014) (Hrsg.). Heuristisches Arbeiten im Mathematikunterricht. Themenheft. *Der Mathematikunterricht*, Heft 5/14.

Heikkinen, H., Hästö, P., Kangas, V., Leinonen, M. (2015). Promoting exploratory teaching in mathematics: A design experiment on a CPD course for teaches. *LUMAT (2013-2015 Issues)*, 3(6), 905-924.

Heinze, A. (2007): Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive. *Journal für Mathematikdidaktik*, 28(1), 3-30.

Herold-Blasius, R., Rott, B., Leuders, T. (2017). Problemlösen lernen mit Strategieschlüsseln. Zum Einfluss von flexiblen heuristischen Prompts bei Problemlöseprozessen von Dritt- und Viertklässlern. *mathematica didactica*, 40.

Kienhues, D., Bromme, R., Stahl, E. (2010). Changing epistemological beliefs: The unexpected impact of a short-term intervention. *British Journal of Educational Psychology*, 78, 4, 545-565.

KMK (2003). Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf, abgerufen am 27. Februar 2019.

Komorek, E., Bruder, R., Collet, C., Schmitz, B. (2006): Inhalte und Ergebnisse einer Intervention im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mit einem Unterrichtskonzept zur Förderung mathematischen Problemlösens und von Selbstregualtionskompetenzen. In: Prenzel, M., Allolio-Näcke, L. (Hrsg.): *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 240-267), Münster: Waxmann.

Laging, R., Hericks, U., Saß, M. (2015). Fach:Didaktik – Fachlichkeit zwischen didaktischer Reflexion und schulpraktischer Orientierung. Ein Modellkonzept zur Professionalisierung in der Lehrerbildung. In: S. Lin-Klitzing, D. Di Fuccia, R. Stengel-Jörns (Hrsg.): *Auf die Lehrperson kommt es an? Beiträge zur Lehrerbildung nach John Hatties 'Visible-Learning'* (S. 91-116). Bad Heilbrunn.

Loase, J. F., Lansing, D., Hryczaniuk, C., Cahoon, J. (2005). A Variant of the Partition Function. *The College Mathematics Journal*, 36(4), 320.

Mathe sicher können (O.D.) Steckbrief der Methode Strategieschlüssel.

https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/356, abgerufen am 17.11.2017.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Second edition. Addison-Wesley.

Philipp, K., Herold-Blasius, R. (2016). Schlüssel zum Erfolg – Mit Strategieschlüsseln Problemlösestrategien fördern. *PM,* 68, 9-14.

Polya, G. (1971). *How to Solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reiss, K., Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), 29-35.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM,* 40(3), 455-467.

Scales, P. (2012). *Teaching in the lifelong learning sector*. McGraw-Hill Education (UK)

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action* (Vol. 5126). Basic books.

Schreiber, A. (1994-2013). Heuristik: Kunst des Problemlösens. www.alfred-schreiber.de/g-mathematik/materialien/didmath-5.pdf, abgerufen am 25.09.2018

Schreiber, A. (2011). *Begriffsbestimmungen*. Berlin: Logos.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37-46.

Zöttl, L., Reiss, K. (2010). Heuristische Lösungsbeispiele. Eine Lerngelegenheit für den anfänglichen Erwerb von Modellierungskompetenz. *Der Mathematikunterricht*, 4, 20-27.