§8. Projektive Räume

Sei V endl.-dim K-Vektorraum

<u>Def</u>: Der zu V gehörige <u>projektive Raum</u> ist

$$\mathbb{P}(V) := \{ \text{Geraden in } V \text{ durch } 0 \}$$

$$= V - \{0\} \big/ \sim$$

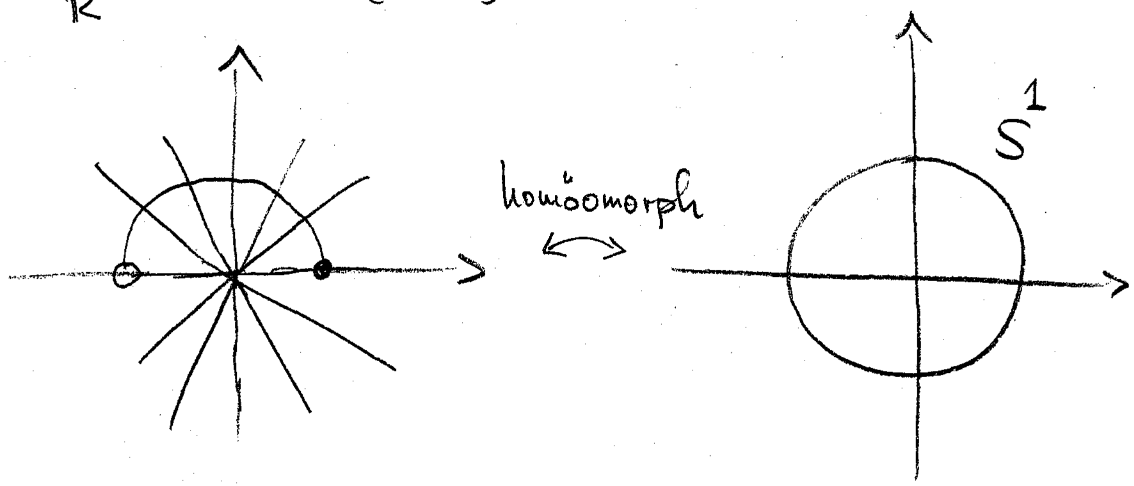
wobei $u \sim w \;:\Longleftrightarrow\; u = \lambda v$ für ein $\lambda \in K - \{0\}$.
$\Longleftrightarrow\; Ku = Kv$

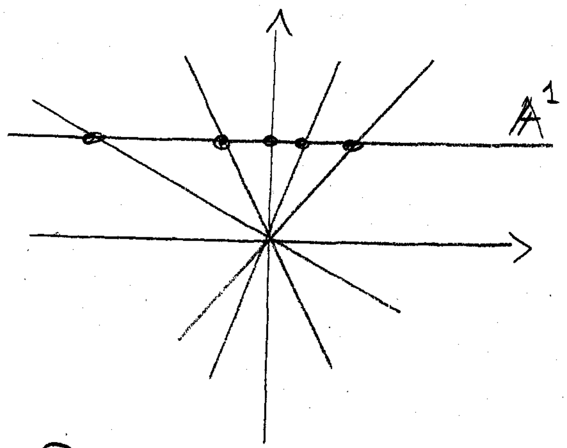
Insbesondere

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_K := \mathbb{P}(K^{n+1})$$

<u>Beispiele</u>:

(1) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$

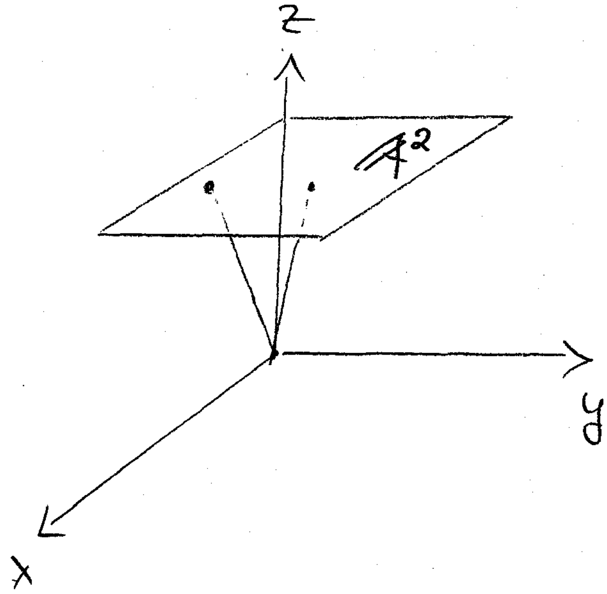




$$\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$$

"unendl. ferne Punkt"

(2) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$



$$\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{A}^2$ = {Geraden durch 0 nicht in xy-Ebene}

$\mathbb{P}^1$ = {Geraden durch 0 in xy-Ebene} = $\underbrace{\{\text{Geraden durch } (0,0) \text{ in } \mathbb{A}^2\}}_{\text{"unendlich ferne Gerade"}}$

Vorstellung:

$\mathbb{P}^2$ entsteht aus $\mathbb{A}^2$, indem man eine „unendlich ferne" Gerade $\mathbb{P}^1$ hinzunimmt.

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \{\text{Geraden durch } 0 \text{ in } \mathbb{A}^2\}$$

Bezeichnung:

Sei $\pi: V - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$

die Restklassenabb.

Für $V = K^{n+1}$:

$$(x_0, .., x_n) \mapsto (x_0 : .. : x_n) = K \cdot (x_0, .., x_n)$$

$$= \text{die Gerade durch } (x_0, .., x_n)$$

$x_0, .., x_n$ heißen homogene Koordinaten.

Beachte: Nur die Quotienten zweier x_i sind eind. bestimmt.

$$(x_0 : .. : x_n) = (y_0 : .. : y_n) \iff \exists \lambda \in K^* : x_i = \lambda y_i \ \forall i$$

In $\mathbb{P}^n$ sei

$$U_n := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_n \neq 0\}$$

$$H_n := \quad '' \quad x_n = 0$$

Dann hat man Bijektionen

$$H_n \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

und

$$\begin{aligned} U_n &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \\ (y_1 : \ldots : y_n : 1) &\longleftarrow (y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Also:

$$\mathbb{P}^n = U_n \,\dot\cup\, H_n \cong \underset{\text{affiner Teil}}{\mathbb{A}^n} \,\dot\cup\, \underset{\text{unendlich ferne Hyperebene}}{\mathbb{P}^{n-1}}$$

Sei $U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$
$\cong \mathbb{A}^n$

$\rightsquigarrow$ Haben Überdeckung

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n$$

durch affine Räume.

Ist $W \subset V$ Untervektorraum, so ist $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ ein *projektiver Unterraum*.

$\dim \mathbb{P}(W) := \dim W - 1$ ist die (projektive) *Dimension* von $\mathbb{P}(W)$.

$\dim \mathbb{P}(W) = 1$: projektive Gerade
$\phantom{\dim \mathbb{P}(W) =}\ 2$: Ebene

$\dim \mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(V) - 1$: Hyperebene

<u>Prop.</u> Seien $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2) \subset \mathbb{P}(V)$.

$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V)$

$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$

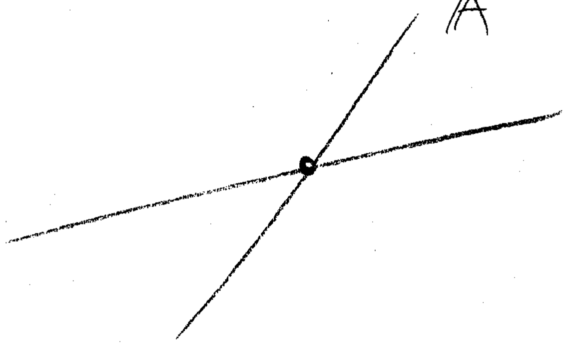
<u>Beweis</u>: $\dim W_1 + \dim W_2 \geq \dim V + 1$

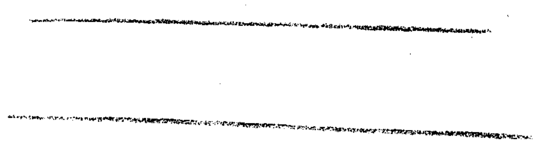
$\Longrightarrow$ $W_1 \cap W_2$ enthält eine Gerade durch 0

$\Longrightarrow$ $\underbrace{\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)}_{= \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)}$ " einen Punkt $\square$

<u>Beispiel</u>: Je zwei Geraden in $\mathbb{P}^2$ haben einen Schnittpunkt.

$\mathbb{A}^2$ $\mathbb{A}^2$





<u>Beispiel</u>

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \\ \cup \\ \mathcal{U}_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2 \end{array}$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x, y) := \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

$$(1 : x : y) \leftarrow (x, y)$$

- Seien $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^2$ Geraden, d.h.

$$L_1 = \mathbb{P}(W_1), \quad L_2 = \mathbb{P}(W_2)$$

mit $W_i \subset K^3$ 2-dim. Untervektorräume

z.B. $W_1 = \{(x_0, x_1, x_2) \in K^3 \mid x_1 = 0\}$

- $W_2 = \{ \text{---} \text{,} \text{---} \quad x_1 = x_0\}$

$$L_1 = \mathbb{P}(W_1) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in K^3 \mid x_1 = 0\}$$
$$L_2 = \mathbb{P}(W_2) = \{ \text{---} \text{,} \text{---} \quad x_1 = x_0\}$$

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathcal{U}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 0\} =: M_1$$
$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathcal{U}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 1\} =: M_2$$

<u>Also</u>: Die affinen Geraden M_i schneiden sich nicht.

<u>Aber</u>: $$L_1 \cap L_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 = 0 \,\&\, x_1 = x_0\}$$
$$= \{(0:0:1)\}$$
$$\in H_0 = \text{unendl. ferne Gerade}$$

$\square$