Äquivalenz von Normen

Ergänzung zur Vorlesung ›Analysis II‹
Th. Bauer, Sommersemester 2001

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $A, B \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt

$$A\,\|x\|' \le \|x\| \le B\,\|x\|' \qquad \text{für alle } x \in V\ .$$

Man überlegt sich schnell, dass äquivalente Normen dieselbe Topologie auf V induzieren, d.h. dass es nicht darauf ankommt, welche der beiden Normen man zur Definition des Begriffs *Offenheit* verwendet.

Überraschenderweise gilt:

Satz. *Alle Normen auf* $\mathbb{R}^n$ *sind äquivalent.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass jede gegebene Norm $\|\cdot\|$ zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist. Wir gehen dazu in drei Schritten vor.

(1) Zunächst zeigen wir, dass es eine Konstante $B \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$\|x\| \le B \cdot \|x\|_\infty \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\ . \tag{$*$}$$

Dazu sei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ die Entwicklung von x nach den kanonischen Einheitsvektoren e_i. Es gilt dann

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \le \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty \cdot \|e_i\|\ .$$

Mit $B =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ ist daher $(*)$ erfüllt.

(2) Es sei nun $S =_{\mathrm{def}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ die Einheitssphäre bezüglich der Maximums-Norm. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

stetig ist (bezüglich der Maximums-Norm). Dies folgt aus der Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le B \cdot \|x - y\|_\infty\ ,$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$, bei der wir im letzten Schritt die Ungleichung $(*)$ aus (1) verwendet haben.

(3) Bezüglich der Maximumsnorm ist die Einheitskugel S kompakt und die Abbildung f nach (2) stetig. Daher nimmt f ein Minimum A an. Da f nur positive Werte hat, ist $A > 0$. Aus $\|x\| \ge A$ für alle $x \in S$ folgt

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \ge A \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

also

$$\|x\| \ge A \cdot \|x\|_\infty \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{$**$}$$

Durch $(*)$ und $(**)$ ist nun die Äquivalenz der beiden Normen bewiesen. $\square$