

5. Exkurs über komplexe Zahlen

Inhalt

	<i>Seite</i>
5. Komplexe Zahlen	2
5.1. Einige Definitionen der komplexen Zahlen	2
5.2. Erste Eigenschaften der komplexen Zahlen	5
5.3. Der Einheitskreis	8
5.4. Polarzerlegung	10
5.5. Einige Aufgaben	12
5.6. Zur Entwicklungsgeschichte der komplexen Zahlen	17
5.6.a. Cardano, Bombelli	17
5.6.b. Girard, Descartes	18
5.6.c. Leibniz, Bernoulli	19
5.6.d. Euler	20
5.6.e. Cauchy, Hamilton	22
5.6.f. Der Weg zur komplexen Zahlenebene	23
5.6.g. Gauß	25
5.6.h. Anwendungen komplexer Zahlen	27

5. Komplexe Zahlen

Auf die komplexen Zahlen waren Mathematiker der Renaissance u.a. bei dem Versuch der Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen gestoßen. Im kubischen Fall führte selbst der Weg zu reellen Lösungen über komplexe Zwischenschritte. Es dauerte Jahrhunderte, bis die komplexen Zahlen als Zahlen akzeptiert wurden, ihre wirkliche Bedeutung wurde erst im Laufe des 19. Jh. klar. Zum Nutzen der komplexen Zahlen sagte Bernhard Riemann 1851 in seiner Göttinger Inauguraldissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* [Werke p.1–48] in §20:

„Die Einführung der complexen Grössen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Grössenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Grössen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Grössen, auf welche sie sich beziehen, complexe Werthe giebt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit hervor. Die Fälle, in denen dies geschehen ist, umfassen zwar bis jetzt erst ein kleines Gebiet — ... — aber beinahe jeder Schritt, der hier gethan ist, hat nicht bloss den ohne Hülfe der complexen Grössen gewonnenen Resultaten eine einfachere, geschlossenere Gestalt gegeben, sondern auch zu neuen Entdeckungen die Bahn gebrochen, wozu die Geschichte der Untersuchungen über algebraische Functionen, Kreis- oder Exponentialfunctionen, elliptische und Abel'sche Functionen den Beleg liefert.“

Das kleine Gebiet, von dem Riemann spricht, ist inzwischen eine große Teildisziplin der Mathematik geworden, die in Vorlesungen über Funktionentheorie, über Komplexe Analysis, über Modulformen, über Algebraische Geometrie etc. beheimatet ist. In der Anfängervorlesung über reelle Analysis wird das voll innerer Harmonie strahlende Reich der komplex-analytischen Funktionen nur gestreift, so daß für ein wirkliches Verständnis der Riemannschen Äußerungen auf eine Vorlesung über Funktionentheorie verwiesen werden muß.

Dieser Exkurs beschränkt sich auf das Eindringen der komplexen Zahlen, nicht der komplexen Funktionen, in das Gebäude der Mathematik, will verschiedene Darstellungen komplexer Zahlen und einige der ersten Erfolge, die man mit komplexen Zahlen erzielte, aufzeigen, bevor mit (Euler,) Gauß, Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann etc. die Entwicklung der Theorie der komplex differenzierbaren (= analytischen oder holomorphen) Funktionen begann.

5.1. Einige Definitionen der komplexen Zahlen

Im Laufe der Zeit haben verschiedene Mathematiker verschiedene Wege zu den komplexen Zahlen gefunden. Einige dieser Zugänge werden hier in moderner Schreibweise (die naturgemäß die Gedanken der alten Mathematiker etwas verfälscht ¹⁾) wiedergegeben:

¹⁾ Goethe hat die Unart naiver historischer Betrachtung so formuliert:

Wagner:

*Verzeiht! es ist ein groß Ergetzen,
Sich in den Geist der Zeiten zu versetzen,
Zu schauen, wie vor uns ein weiser Mann gedacht,
Und wie wirs dann zuletzt so herrlich weit gebracht.*

Faust:

*O ja, bis an die Sterne weit!
Mein Freund, die Zeiten der Vergangenheit
Sind uns ein Buch mit sieben Siegeln.
Was ihr den Geist der Zeiten heißt,
Das ist im Grund der Herren eigner Geist,
In dem die Zeiten sich bespiegeln.*

1. Naive Definition von BOMBELLI 1572:

Komplexe Zahlen sind Ausdrücke der Form $x + iy$ mit reellen Zahlen x und y und einer **imaginären Einheit** i , kurz

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \quad .$$

Man rechnet mit ihnen wie mit gewöhnlichen Zahlen mit der Zusatzregel

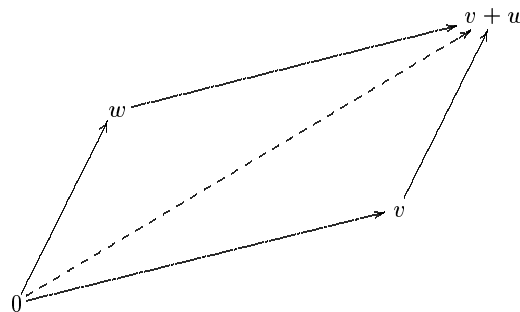
$$i \cdot i = -1 \quad ,$$

also z.B.

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i - 3 \cdot 4 - 8i = -11 - 2i \quad .$$

2. Geometrische Definition nach WESSEL 1796:

Komplexe Zahlen sind Vektoren in der reellen Ebene, die nach der üblichen Vektoraddition (Parallelogrammregel) addiert werden,

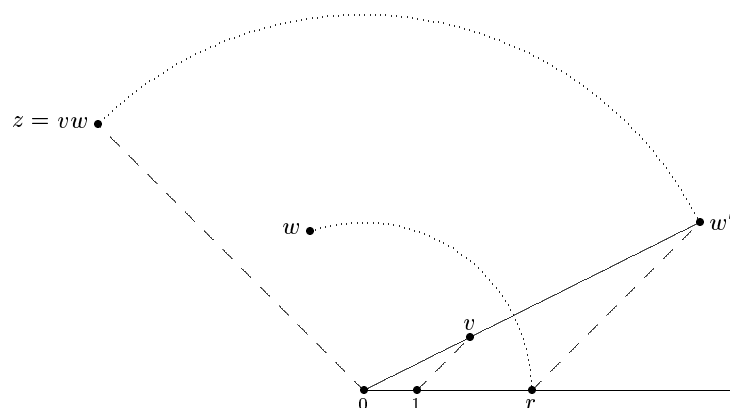


Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ geht durch genau eine Drehstreckung α_v aus der Eins $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hervor. Das Produkt mit v ist Anwendung der Drehstreckung α_v :

$$v \cdot w = \alpha_v(w) \quad ,$$

d.h. die Dreiecke $01v$ und $0wvw$ sind gleichsinnig ähnlich.

KONSTRUKTION: Schneide den Kreis um 0 durch w mit der positiven reellen Achse in r , schneide die Parallele der Geraden $1v$ durch r mit dem Strahl $[0, w] \rightarrow [0, w']$, Drehe die Strecke $[0, w']$ um den Nullpunkt um den Winkel $\sphericalangle(1, w)$ zur Strecke $[0, z]$, dann ist $z = vw$ das gesuchte Produkt.



Der mit solchen Operationen versehene Raum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ heißt die **komplexe Ebene**.

3. Linear-algebraische Definition frei nach ARGAND 1806 [= abstrahierende Vereinfachung der geometrischen Definition von Wessel]:

Komplexe Zahlen sind den Nullpunkt der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ festhaltende, orientierungserhaltende **Ähnlichkeitsabbildungen** des $\mathbb{R}^2$, beschrieben durch Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

BEMERKUNGEN:

1. In der Tat beschreiben diese Matrizen die Multiplikation $u \mapsto z \cdot u$ mit der komplexen Zahl $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, beschreiben also die reguläre Darstellung der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathbb{C}$ bezüglich der Basis $1, i$, für $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist

$$z \cdot 1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z \cdot i = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

2. Mit der Identifizierung $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wird

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x + iy$$

und Addition bzw. Multiplikation der Matrizen geht in die Addition bzw. Multiplikation der Zahlen $x + iy$ nach Bombelli über wegen $i^2 = -1$.

4. Algebraische Definition von HAMILTON 1833 [= Präzisierung der naiven Definition von Bombelli]:

Komplexe Zahlen sind reelle **Zahlenpaare** (x, y) , die man nach den Rechenregeln

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

addiert und multipliziert.

BEMERKUNGEN:

1. Dann ist $0 = (0, 0)$ das Nullelement, $1 = (1, 0)$ das Einselement, und die **imaginäre Einheit** $i = (0, 1)$ hat das Quadrat -1 .
 2. Identifiziert man $r \in \mathbb{R}$ mit $(r, 0)$, so ist das Paar (x, y) gleich $x \cdot 1 + y \cdot i$.
5. Zweite algebraische Definition von CAUCHY 1847:

Komplexe Zahlen sind **Restklassen** reeller Polynome nach den Vielfachen des Polynoms $T^2 + 1$, kurz

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1) = \{x + yT + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

BEMERKUNGEN:

1. Diese Restklassenbildung bedeutet, daß zwei Polynome äquivalent sind, d.h. in $\mathbb{C}$ identifiziert werden, wenn ihre Differenz durch $T^2 + 1$ teilbar ist.
2. Die Restklasse von T ist die **imaginäre Einheit**, denn es gilt

$$T^2 \equiv -1 \pmod{(T^2 + 1)}.$$

3. Jede Äquivalenzklasse hat dann genau einen Vertreter $x + yT$ von einem Grad < 2 , die Summe zweier Klassen ist wieder eine Klasse, nämlich

$$(x_1 + y_1 T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]) + (x_2 + y_2 T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]$$

und das Produkt der Polynome zweier Klassen liegt in genau einer Klasse, nämlich

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]) \cdot (x_2 + y_2 T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]) \\ \subseteq x_1 x_2 + y_1 y_2 T^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T] \\ = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)T + (T^2 + 1)\mathbb{R}[T]. \end{aligned}$$

4. Die Identifikation $x + yT = (x, y)$ führt Cauchys Definition auf Hamiltons zurück.

5.2. Erste Eigenschaften der komplexen Zahlen

Das erste Ziel aller in 5.1 gegebenen Definitionen ist der folgende

SATZ 1: Die komplexen Zahlen bilden einen Körper $\mathbb{C}$.

Die Umkehrung der Addition und Multiplikation wird in Hamiltons Darstellung 5.1.3 gegeben durch

$$\begin{aligned} -(x, y) &= (-x, -y) \\ \frac{1}{(x, y)} &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Die multiplikative Gruppe dieses Körpers bezeichnen wir mit $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis: Bei den elementarsten Definitionen 5.1.1/5.1.4 von Bombelli/Hamilton folgt der Beweis durch stures Nachrechnen der Rechengesetze eines Körpers. In der Definition 5.1.5 folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $(T^2 + 1)\mathbb{R}[T]$ ein maximales Ideal im reellen Polynomring $\mathbb{R}[T]$ ist. Mit elementaren Kenntnissen aus der Linearen Algebra ist die Argandsche Definition 5.1.4 am einfachsten zu behandeln: Die Abgeschlossenheit der Menge der Ähnlichkeitsmatrizen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation macht $\mathbb{C}$ zu einem Teilring des Matrizenringes $M_2(\mathbb{R})$, die Formel für das Inverse kontrolliert man nach, oder argumentiert geometrisch, daß das Inverse einer bijektiven Ähnlichkeit wieder eine Ähnlichkeit ist. ■

ZUSÄTZE:

- a) Die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist eine Isomorphie, d.h. Addition und Multiplikation gemäß

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{und} \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0)$$

respektierende, Einbettung des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir werden im folgenden $\mathbb{R}$ stets als Teilkörper von $\mathbb{C}$ betrachten („reelle Achse in der komplexen Ebene“) und schreiben $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

- b) Diese Einbettung ermöglicht die folgende AXIOMATISCHE DEFINITION des Körpers der komplexen Zahlen, die durch die Cauchys Definition 5.1.5 konstruktiv realisiert wird:

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist (bis auf Isomorphie) die einzige quadratische Körpererweiterung des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.²⁾

In der Tat ist jede reelle quadratische Gleichung $x^2 + 2bx + c = 0$ im Oberkörper $\mathbb{C}$ lösbar durch $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$.

- c) Die Körpererweiterung $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ hat genau einen nichttrivialen Automorphismus, die **komplexe Konjugation**³⁾ (geometrisch: Spiegelung an der reellen Achse)

$$z = (x, y) \mapsto \bar{z} = (x, -y)$$

mit den Rechenregeln

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\bar{z}} = z \\ \bar{z} &= z \iff z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

²⁾ Der „Fundamentalsatz der Algebra“ [Fußnote ⁴⁸⁾ in 5.6.g] sagt, daß der Körper $\mathbb{C}$ die einzige echte endlichdimensionale Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ ist.

³⁾ In Bombellis *Algebra* (1572) heißt dieser Begriff **Residuo**, die Bezeichnung **conjugué** stammt von Cauchy: *Cours d'Analyse* (1821), chap.VII §1

Beweis: Die Zerlegung $T^2 + 1 = (T + i)(T - i)$ zeigt, daß ein nichttrivialer Automorphismus $z \mapsto \bar{z}$ der $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ die beiden Nullstellen $\pm i$ des Polynoms $T^2 + 1$ vertauschen muß. Ein solcher Automorphismus hat also die Gestalt

$$\overline{x + iy} = x - iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Daß diese Abbildung tatsächlich die angegebenen Eigenschaften hat, rechnet man leicht nach. Man kann sich dieses Nachrechnen auch sparen, wenn man bemerkt, daß die Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ für Ähnlichkeitsmatrizen dem Übergang

$$A \mapsto {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entspricht.⁴⁾ ■

- d) Im Gegensatz zum Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen nicht angeordnet werden, d.h. es gibt keine totale Ordnung $>$ auf $\mathbb{C}$ mit

$$a > 0, b > 0 \implies a + b > 0, a \cdot b > 0 \quad .$$

Daher sind im folgenden in Ungleichungen auftretende Zahlen stets als reell anzusehen.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Anordnung $>$ auf $\mathbb{C}$. Aus $i > 0$ folgte $i^2 = -1 > 0$, aus $-i > 0$ folgte ebenso $(-i)^2 = -1 > 0$. Da auch $1 = 1^2 > 0$ ist, folgt der Widerspruch

$$1 > 0 \quad \text{und} \quad -1 > 0, \quad \text{also} \quad 0 = 1 + (-1) > 0 \quad . \quad \blacksquare$$

DEFINITION 1: Die reellen Komponenten einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir folgendermaßen:

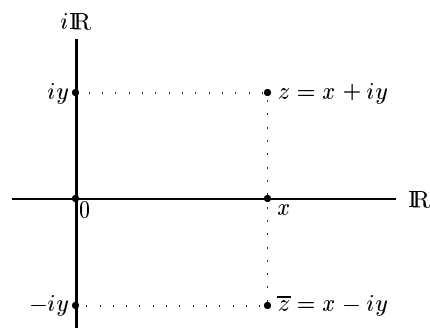
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re} z \quad \text{heißt der \textbf{Realteil} von } z \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \operatorname{Im} z \quad \text{heißt der \textbf{Imaginärteil} von } z \quad . \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$z \mapsto \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad z \mapsto \operatorname{Im} z$$

sind reell-lineare Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$. Verschwindender Imaginärteil $\operatorname{Im} z = 0$ bedeutet für eine komplexe Zahl z , daß $z \in \mathbb{R}$ reell ist; diese Zahlen bilden die **reelle Achse**. Eine komplexe Zahl z mit verschwindendem Realteil $\operatorname{Re} z = 0$, also von der Gestalt $z = iy$, heißt **rein imaginär**; diese Zahlen bilden die **imaginäre Achse** $i\mathbb{R}$. Dies sind genau diejenigen komplexen Zahlen, deren Quadrat eine nichtnegative reelle Zahl ist:

$$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} ; z^2 \leq 0\} \quad .$$

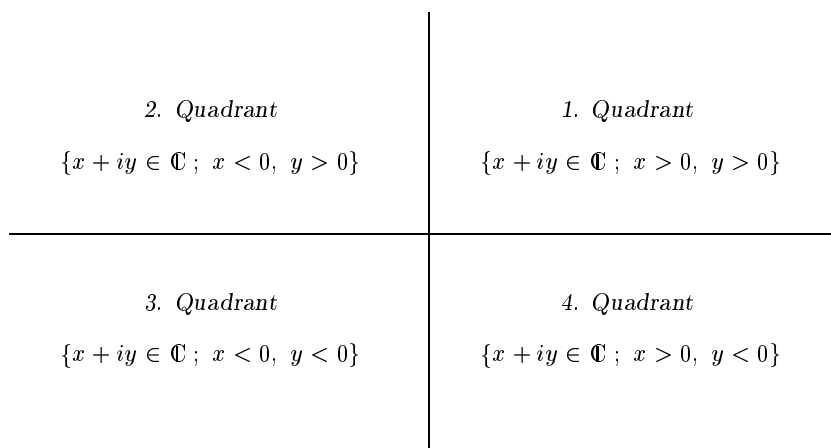


⁴⁾ Transponieren ist bei Ähnlichkeitsmatrizen A dasselbe wie Konjugation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, natürlich gilt das nicht für beliebige Matrizen A .

Die Menge der komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil heißt die **obere Halbebene**

$$\mathfrak{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} ; y > 0\} \quad .$$

Die konjugierte Menge $-\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) < 0\}$ ⁵⁾ heißt entsprechend die **untere Halbebene**, die Menge $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ die **rechte** und $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) < 0\}$ die **linke Halbebene**. Die Durchschnitte dieser Halbebenen liefern die üblichen **Quadranten** der z -Ebene:



DEFINITION 2:

- a) Als **Norm** $N(z)$ einer komplexen Zahl z bezeichnen wir⁶⁾ das Produkt mit der komplex-konjugierten Zahl

$$N(z) = z \cdot \bar{z} \quad ,$$

also

$$N(x + iy) = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Die Norm $N(z)$ ist eine nichtnegative reelle Zahl, die nur für $z = 0$ verschwindet. Insbesondere gilt für das Inverse (vgl. Satz 1)

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)} \quad .$$

Beispiel:

$$(1 + i)^{-1} = \frac{1 - i}{2} \quad .$$

Die Norm ist **multiplikativ**:

$$N(z_1 \cdot z_2) = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = N(z_1) \cdot N(z_2) \quad .$$

In der Definition 5.1.3 ist die Norm genau die Determinante der Matrix, die Multiplikativität der Norm folgt also auch aus der Produktformel für Determinanten.

- b) Die nichtnegative Quadratwurzel aus der Norm von z heißt der **(absolute) Betrag**⁷⁾ $|z|$ der komplexen Zahl z :

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

⁵⁾ Die Bezeichnung $\bar{\mathfrak{H}}$ vermeiden wir, da sie auch die abgeschlossene obere Halbebene bedeuten kann.

⁶⁾ nach Gauß 1831

⁷⁾ Der Name **Absolutbetrag** und die Schreibweise $|z|$ wurden von Weierstraß eingeführt, bei Argand (1806) und in Cauchys *Cours d'Analyse* (1821), chap.VII §2 heißt dieser Begriff **Modul** und wird mit $\operatorname{mod} z$ bezeichnet.

Offenbar gilt

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \quad , \quad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z| \quad . \quad (1)$$

Der Betrag von z ist, geometrisch interpretiert, der **euklidische Abstand** des Punktes z vom Nullpunkt 0 in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Er setzt den üblichen Betrag der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen fort und hat die folgenden Eigenschaften des reellen Betrages:

$$|z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \iff z = 0 \quad (\text{definit})$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{subadditiv})$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (\text{multiplikativ}).$$

Eines Beweises bedarf nur noch die zweite Ungleichung, die die **subadditive** oder **Dreiecksungleichung** heißt: Sie ist für $z_1 + z_2 = 0$ trivial und folgt für $z_1 + z_2 \neq 0$ aus (1) folgendermaßen:

$$1 = \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = \operatorname{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \operatorname{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \leq \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \quad .$$

Gleichheit in der Dreiecksungleichung tritt, wie der Beweis zeigt, nur auf, wenn z_1 und z_2 auf demselben Strahl von 0 aus liegen:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = \lambda z_1 \text{ für ein } \lambda \geq 0 \quad . \quad (2)$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt insbesondere die Ungleichung

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad . \quad (3)$$

In den Ungleichungen (1) und (3) treten Gleichheiten nur für reelle oder rein imaginäre z auf.

Aus den Betragsregeln für die Addition und Multiplikation folgen für die Subtraktion und die Division die Regeln

$$\begin{aligned} ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2| \quad \text{für } z_2 \neq 0 \quad . \end{aligned}$$

5.3. Der Einheitskreis

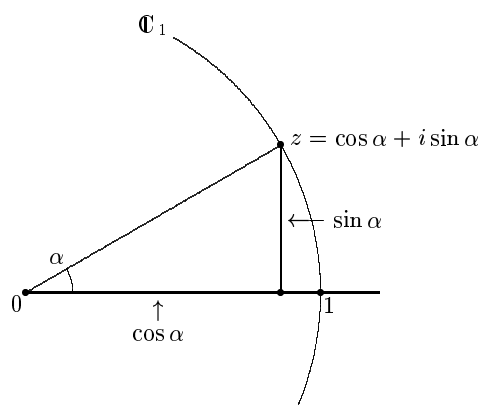
Die folgenden Ausführungen benutzen einige Hilfsmittel aus der Analysis, nämlich die Winkelfunktionen. Der Einheitskreis ist aber eine so grundlegende Figur im Bereich der komplexen Zahlen, daß er hier trotz der analytischen oder geometrischen Anleihen behandelt werden muß.

Die komplexen Zahlen vom Betrag 1 bilden den **Einheitskreis**, den wir mit

$$\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$$

bezeichnen. In Argands Definition ist $\mathbb{C}_1$ gerade die Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt, also der Matrizen

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \cos \alpha + i \sin \alpha \end{aligned}$$



mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Aus den Additionstheoremen der Sinus- und Cosinusfunktion

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

oder besser aus der Funktionalgleichung $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$ der Exponentialfunktion, die durch Eulers Gleichung

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

hier auftritt und die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen impliziert, folgt:

SATZ 2: *Die Zuordnung*

$$\alpha \mapsto z = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

ist ein Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}_1$ mit dem Kern

$$2\pi\mathbb{Z} = \{\alpha \in \mathbb{R}; \cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R}; \cos \alpha = 1\} \quad ,$$

so daß sich ein Isomorphismus

$$\mathbb{C}_1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (4)$$

ergibt.

Auf dem Einheitskreis liegen z.B. die **Einheitswurzeln**, d.h. die Lösungen von Gleichungen der Gestalt $z^n = 1$. Sie bilden eine multiplikative Untergruppe μ_∞ , die dicht liegt in $\mathbb{C}_1$; dies sieht man durch Einschränkung der Isomorphie (4) auf den Torsionsteil:

$$\mu_\infty \simeq 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z} \quad .$$

Das „Innere“ des Einheitskreises bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{E} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

und nennen $\mathfrak{E}$ die **Einheitskreisscheibe**.

FOLGERUNG (**Formeln von Moivre**⁸⁾): *Aus der Homomorphie der Abbildung $\alpha \mapsto \cos \alpha + i \sin \alpha$ folgen die Formeln*

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad (n \in \mathbb{Z})$$

⁸⁾ Der Hugenotte Abraham de Moivre deutet diese Formeln 1707 in einer Note in den Philosophical Transactions an Beispielen an, später (1724, 1730) gibt er ein mit der Formel äquivalentes Lösungsverfahren zum Ziehen n -ter Wurzeln in $\mathbb{C}$ an. In seinen *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* (London 1731) formuliert Moivre so: Ist $x = \cos \alpha$ und $y = \cos n\alpha$, so gilt

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[n]{y + \sqrt{y^2 - 1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{y + \sqrt{y^2 - 1}}}$$

Tatsächlich waren diese Formeln schon F. Viète vor 1600 bekannt. Die heutige Gestalt stammt aus Eulers *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausanne 1748, §132.

Durch Betrachten von Real- und Imaginärteil dieser Formeln erhält man Darstellungen von $\cos n\alpha$ und von $\sin n\alpha$ als ganzzahlige Polynome in $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, z.B.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \cos 4\alpha &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 \\ \cos 5\alpha &= 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha \\ \cos 6\alpha &= 32 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \sin 4\alpha &= 4 \cos \alpha \cdot (\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha) = 4 \sin \alpha \cdot (2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha) \\ \sin 5\alpha &= 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha \\ \sin 6\alpha &= 2 \cos \alpha \cdot (3 \sin \alpha - 16 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot (3 \cos \alpha - 16 \cos^3 \alpha + 16 \cos^5 \alpha)\end{aligned}$$

wobei noch die Relation $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, d.h. $\cos \alpha + i \sin \alpha \in \mathbb{C}_1$, benutzt wurde.

BEMERKUNG: Man bemerke, daß die Herleitung derartiger ‚reeller Formeln‘ durch den Umweg über das Komplexe durchsichtiger und einfacher ist als ein ganz im Reellen verlaufender direkter Induktionsbeweis über die Additionstheoreme von Sinus und Cosinus.

Ein anderes derartiges Beispiel liefert die Berechnung der Summe

$$S = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha \quad (\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Denn S ist der Realteil der geometrischen Reihe

$$\tilde{S} = \sum_{\nu=0}^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^\nu = \frac{\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha - 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1}.$$

Mit $\cos 2\alpha - 1 = -2 \sin^2 \alpha$ und $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{-2 \sin^2 \frac{n+1}{2} \alpha + 2i \sin \frac{n+1}{2} \alpha \cos \frac{n+1}{2} \alpha}{-2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2i \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{n+1}{2} \alpha + i \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos \frac{n}{2} \alpha + i \sin \frac{n}{2} \alpha \right).\end{aligned}$$

Betrachtung von Real- und Imaginärteil dieser Gleichung liefert die Formeln

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{n}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{n}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (6)$$

5.4. Polarzerlegung

SATZ 3: Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat die Darstellung (**Polarzerlegung**)

$$\begin{aligned}z \in \mathbb{C}^\times &\implies z = \rho \cdot z_1 & (\rho > 0, \quad z_1 \in \mathbb{C}_1) \\ & & = \rho \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) & (\rho, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0),\end{aligned}$$

in der $\rho = |z|$ und damit auch z_1 wohlbestimmt sind. Die nur modulo ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmte Größe α heißt das **Argument** $\arg z$ der komplexen Zahl z . Die Abbildung

$$\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto \arg z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

kehrt, auf $\mathbb{C}_1$ eingeschränkt, den Homomorphismus aus Satz 2 um.

BEISPIELE:

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \bmod 2\pi \quad , \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \quad .$$

BEMERKUNGEN:

1. Geometrisch bedeutet die Darstellung

$$z = \rho \cdot z_1 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

die Zerlegung einer orientierungserhaltenden Ähnlichkeit $w \mapsto zw$ in eine Drehung $w \mapsto z_1 w$ um das Argument und eine Streckung $w \mapsto \rho w$ um den Betrag, weshalb die Gruppe $\mathbb{C}^\times$ der orientierungserhaltenden Ähnlichkeiten des $\mathbb{R}^2$ auch die Gruppe der **Drehstreckungen** genannt wird.

2. Der Betrag ist multiplikativ, das Argument ist additiv modulo 2π , d.h. die Polarzerlegung liefert einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{C}_1 \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad ,$$

in Worten:

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z| \quad \text{und} \quad \arg(wz) \equiv \arg w + \arg z \bmod 2\pi \quad .$$

Also gilt für die Division mit $z \neq 0$:

$$\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|} \quad \text{und} \quad \arg \frac{w}{z} \equiv \arg w - \arg z \bmod 2\pi \quad .$$

Diese geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen durch **Polarkoordinaten** (ρ, α) in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ folgt auch aus der Matrizenzerlegung in 1.

3. Auf der **geschlitzten**, d.h. der negativen reellen Achse beraubten **Ebene**

$$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] = \{x + iy \in \mathbb{C} ; y = 0 \Rightarrow x > 0\}$$

kann man das Argument einer komplexen Zahl stetig normieren: Bezeichnet $\arctan$ den **Hauptzweig** der Arcustangensfunktion⁹⁾, also

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2} \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

so kann man das Argument einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $x > 0$ als

$$\operatorname{Arg} z := \arctan \frac{y}{x} \quad (x > 0)$$

⁹⁾ darunter versteht man die Umkehrfunktion der auf das Intervall $] -\pi/2, \pi/2[$ eingeschränkten, dort streng monotonen Tangensfunktion

schreiben. Man nennt $\operatorname{Arg} z$ den **Hauptwert** des Argumentes auf der rechten Halbebene, und kann diesen noch auf die längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^-$ fortsetzen durch die Definition

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x + iy) := \begin{cases} 0 & \text{falls } y = 0, x > 0 \\ \pi/2 + \operatorname{Arg}(z/i) & \text{falls } y > 0 \\ -\pi/2 + \operatorname{Arg}(zi) & \text{falls } y < 0 \end{cases}.$$

Dann wird $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^- \rightarrow]-\pi, \pi[$ eine stetige Funktion, die aber an der negativen reellen Achse von unten kommend den Wert $-\pi$, von oben kommend den Wert π anstrebt. Also ist Arg nicht stetig auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar, sondern macht einen Sprung der Größe $\pm 2\pi$ beim Überqueren der negativen reellen Achse. Auch die Additivität des Argumentes in 2. gilt bei dieser Normierung nur in bestimmten Grenzen:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z| < \pi &\implies \operatorname{Arg}(wz) = \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \\ \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \geq \pi &\implies \operatorname{Arg}(wz) = \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z - \pi \\ \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \leq -\pi &\implies \operatorname{Arg}(wz) = \operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z + \pi \end{aligned}.$$

5.5. Einige Aufgaben

1. a) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}_1$ vom Betrag 1 hat die Gestalt

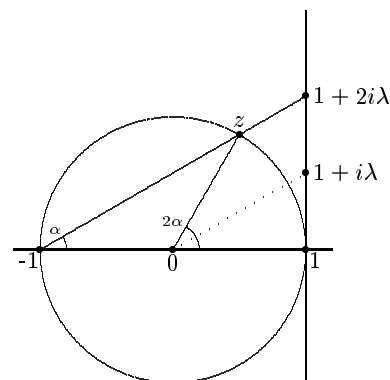
$$z = w/\overline{w} \quad \text{mit } w \in \mathbb{C}^\times.$$

Ist $z \neq -1$, kann man z.B. $w = z + 1$ setzen. Eine eindeutige Darstellung aller $z \in \mathbb{C}_1$ außer $z = -1$ erhält man durch

$$z = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Der Wert $z = -1$ entspricht dem Wert $\lambda = \infty$, d.h. die vorstehende Formel liefert eine Bijektion zwischen dem Einheitskreis $\mathbb{C}_1$ und der projektiven reellen Geraden

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$



- b) Die rationalen Parameter $\lambda \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ entsprechen den Punkten $\xi + i\eta \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ mit $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Daher werden die **pythagoreischen Tripel** (x, y, z) , d.h. die möglichen ganzzahligen Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke, d.h. die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (x, y, z \in \mathbb{N})$$

folgendermaßen parametrisiert, wobei die Homogenität der Gleichung zunächst die triviale Bemerkung gestattet, daß mit (x, y, z) auch (ux, uy, uz) für jedes $u \in \mathbb{N}$ ein pythagoreisches Tripel ist. Mit $\lambda = \frac{m}{n}$ erhält man nach Kürzen gemeinsamer Teiler die **primitiven** pythagoreischen Tripel in der Gestalt

$$\{x, y\} = \{m^2 - n^2, 2mn\}, \quad z = m^2 + n^2,$$

wobei $m > n$ teilerfremde natürliche Zahlen sind, von denen eine gerade und eine ungerade ist.

2. Seien $z_0, z_1, \dots, z_n$ komplexe Zahlen mit

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 \quad \text{und} \quad |z_\nu| \leq 1 \quad \text{für } 0 \leq \nu \leq n$$

- a) Dann gibt es eine Permutation π von $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ mit

$$|z_{\pi(0)} + z_{\pi(1)} + z_{\pi(2)} + \dots + z_{\pi(k)}| \leq 1 \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Lösung: Es genügt, zwei Zahlen unter den z_ν zu finden, deren Summe im Einheitskreis liegt, dann kann man Induktion machen. Gäbe es nun keine zwei solche z_ν und wäre etwa $z_0 > 0$, so müßten alle z_ν in dem von den dritten Einheitswurzeln begrenzten Kreissektor $\{|z| \leq 1; |\operatorname{Arg} z| < 2\pi/3\}$ liegen, weil in dem restliche Drittelkreis nur Zahlen liegen, deren Summe mit z_0 einen Betrag ≤ 1 hat. Da nicht alle z_ν Realteil ≥ 0 haben (sonst wäre ihre Summe nicht 0), sei etwa $\operatorname{Re} z_1 < 0$ und o.E. $\operatorname{Im} z_1 > 0$, also $\pi/2 < \operatorname{Arg} z_1 < 2\pi/3$. Führt man mit z_1 dieselbe Überlegung wie mit z_0 durch, so kann man auch ausschließen, daß die Zahlen z_ν ein Argument zwischen $-\pi/3$ und $-2\pi/3$ haben. Damit haben wir aber bereits einen ganzen Halbkreis ausgeschlossen, und damit auch, daß die Summe der z_ν gleich 0 ist, ein Widerspruch.

b) Aus a) folgere: Es gibt eine Permutation π von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$|z_0 + z_{\pi(1)} + z_{\pi(2)} + \dots + z_{\pi(k)}| \leq 2 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Kann man in dieser Behauptung die Schranke 2 durch $\sqrt{2}$ ersetzen?

c) Aus b) folgere: Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplexe Zahlen mit

$$\left| \sum_{\nu=1}^n z_\nu \right| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |z_\nu| \leq \varepsilon \quad \text{für } 1 \leq \nu \leq n,$$

so gibt es eine Permutation $\pi \in S_n$ mit

$$\left| \sum_{\nu=1}^k z_{\pi(\nu)} \right| \leq 3\varepsilon \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

3. Skizziere die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}$, die einer der folgenden Bedingungen genügen. Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$, und $a \in \mathbb{C}$:

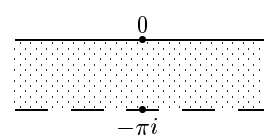
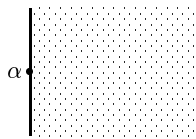
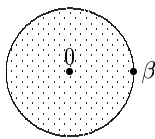
- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| a) $ z \leq \beta$ | b) $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha$ | c) $0 \leq \operatorname{Re}(iz) < \pi$ |
| d) $\operatorname{Re}(z^2) = \alpha$ | e) $\operatorname{Im}(z^2) = \alpha$ | f) $ z + \operatorname{Re} z \leq 1$ |
| g) $ z - a \leq z - \bar{a} $ | h) $ z - a \leq z + \bar{a} $ | i) $ z - a \leq 1 - \bar{a}z $ |
| j) $ z + i + z - i < 4$ | k) $ z + i = \beta z $ | l) $ z^2 - z \leq 1$ |
| m) $ z^2 - 1 = \beta$ | | |

Lösung:

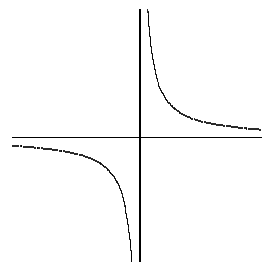
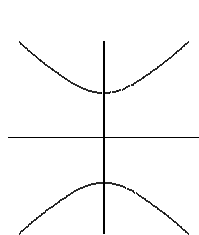
a) ist eine Kreisscheibe um 0 mit Radius β .

b) ist eine rechte Halbebene.

c) ist ein Horizontalstreifen unterhalb der reellen Achse, die zur Menge gehört.

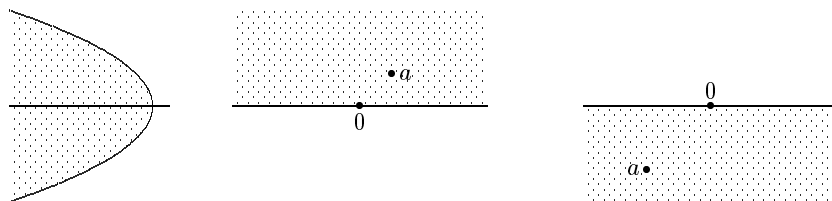


d) ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Achsen $\mathbb{R}$ und $i\mathbb{R}$. e) ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $\mathbb{R}$ und $i\mathbb{R}$; die Hyperbeln in d) und e) bilden bei variierendem α Scharen sich orthogonal schneidender Trajektorien.



f) ist das Innere einer Parabel: $y^2 \leq 1 - 2x$.

g) ist für $\operatorname{Im} a > 0$ bzw. $\operatorname{Im} a < 0$ die obere bzw. untere Halbebene, für $a \in \mathbb{R}$ die ganze Ebene.



h) ist für $a \notin i\mathbb{R}$ die rechte oder linke Halbebene, für $a \in i\mathbb{R}$ die ganze Ebene.

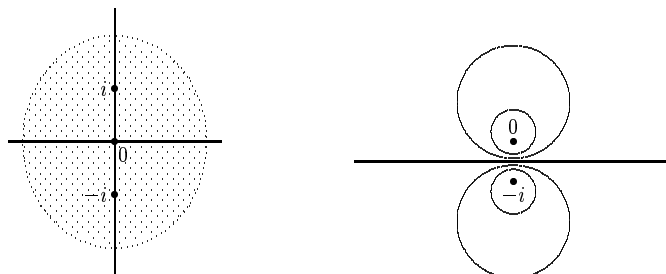


i) ist für $|a| < 1$ das Innere, für $|a| > 1$ das Äußere des Einheitskreises, für $|a| = 1$ die ganze Ebene.



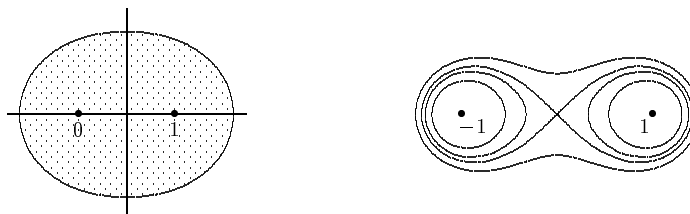
j) ist das Innere der Ellipse mit den Brennpunkten $\pm i$ und großer Halbachse 2.

k) ist ein Kreis des Apollonios zu den Punkten $0, -i$.



l) ist das Innere einer konvexen Cassinischen Kurve mit den Brennpunkten 0 und 1.

m) ist eine allgemeine Cassinische Kurve mit den Brennpunkten ± 1 ; die Kurve ist konvex für $\beta \geq \sqrt{2}$, einzügig mit zwei Einbuchtungen für $1 < \beta < \sqrt{2}$, eine Lemniskate (liegende Acht) für $\beta = 1$ und zerfällt in zwei Ovale für $0 < \beta < 1$.



4. Sei $\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene.

a) Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_1$ gelte $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Zeige, daß z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.

Algebraische Lösung: Es ist $\prod_{\nu=1}^3 (z - z_\nu) = z^3 - a$ mit $a \in \mathbb{C}_1$, weil aus $\sum_\nu z_\nu = 0$ auch $\sum_\nu z_\nu^{-1} = 0$ folgt. Die drei dritten Wurzeln von a bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Geometrische Lösung: Offenbar ist $0, z_1, z_1 + z_2 = -z_3$ ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge 1. Drehung dieses Dreiecks um das Zentrum 0 um Vielfache von $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ liefert ein regelmäßiges Sechseck mit Zentrum 0 und Ecken $z_1, -z_3, z_2, -z_1, z_3, -z_2$; Überspringen jeder zweiten Ecke liefert das regelmäßige Dreieck z_1, z_2, z_3 .

- b) Für $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_1$ gelte $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Zeige, daß z_1, z_2, z_3, z_4 die Eckpunkte eines Rechtecks sind.

Algebraische Lösung: Wie in a) ist $\prod_{\nu=1}^4 (z - z_\nu) = z^4 - 2az^2 + b$ mit $b \in \mathbb{C}_1$. Die Wurzeln $\pm \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b}}$ aus $\mathbb{C}_1$ bilden ein (für $a^2 = b$ entartendes) Rechteck.

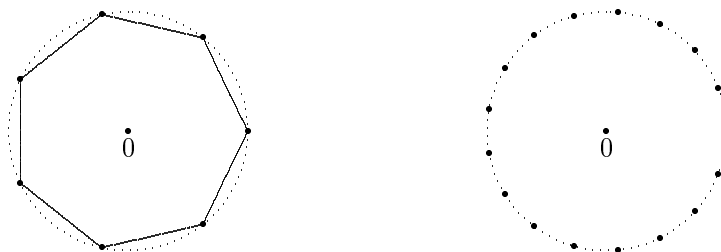
Geometrische Lösung: Aus $z_1 = z_2$ folgt nach (2), daß $z_3 = z_4 = -z_1$ ist; hier liegt ein „ausgeartetes Rechteck“ vor. Seien nun die z_ν verschieden und nach eventuellem Umnummerieren $z_1 \neq -z_2$. Dann ist $0, z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + z_3 = -z_4$ ein gleichseitiges Viereck der Kantenlänge 1, also ein Rhombus. Da ein Rhombus ein Parallelogramm ist, sind die Gegenseiten gleich, also $z_1 = -z_3, z_2 = -z_4$. Ferner stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht, also ist $z_1 + z_2 \perp z_2 + z_3$, d.h. $z_1 - z_4 \perp z_1 - z_2$. Das bedeutet, daß z_1, z_2, z_3, z_4 die Ecken eines Rechtecks sind.

5. a) Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen $\zeta_0, \zeta_{\frac{1}{n}}, \zeta_{\frac{2}{n}}, \dots, \zeta_{\frac{n-1}{n}}$, nämlich

$$\zeta_{\frac{\nu}{n}} = \cos \frac{2\pi\nu}{n} + i \sin \frac{2\pi\nu}{n} \quad (0 \leq \nu < n)$$

Diese Größen heißen die **n -ten Einheitswurzeln**, sie bilden wegen $\zeta_{\frac{\nu}{n}} = (\zeta_{\frac{1}{n}})^\nu$ eine zyklische Gruppe. Sie sind die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Einheitskreis; daher heißt die Gleichung $z^n = 1$ auch **Kreisteilungsgleichung**.

BEISPIEL: Das von den 7. bzw. 17. Einheitswurzeln gebildete regelmäßige 7-Eck bzw. 17-Eck:



- b) Die ersten Einheitswurzeln sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 1 & , & & \zeta_{\frac{1}{2}} &= -1 \\ \zeta_{\frac{1}{3}} &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} & , & & \zeta_{\frac{2}{3}} &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \\ \zeta_{\frac{1}{4}} &= i & , & & \zeta_{\frac{3}{4}} &= -i \\ \zeta_{\frac{1}{5}} &= \overline{\zeta_{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) + \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \\ \zeta_{\frac{2}{5}} &= \overline{\zeta_{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}) + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ \zeta_{\frac{1}{6}} &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} & , & & \zeta_{\frac{5}{6}} &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \\ \zeta_{\frac{1}{8}} &= -\zeta_{\frac{7}{8}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} & , & & \zeta_{\frac{3}{8}} &= -\zeta_{\frac{5}{8}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- c) Für die siebente Einheitswurzel $\zeta = \zeta_{\frac{1}{7}}$ kann es keinen Quadratwurzel Ausdruck wie in b) geben. Denn aus $0 = \frac{\zeta^7 - 1}{\zeta - 1} \cdot \zeta^{-3} = \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-3}$ folgt für $u = 2 \cos \frac{2\pi}{7} = \zeta + \zeta^{-1}$ die über $\mathbb{Z}$ irreduzible kubische Gleichung

$$u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$$

In der Algebra zeigt man, daß u dann kein Quadratwurzel Ausdruck sein kann, und daher ζ auch nicht. Das ist der Grund dafür, daß man das regelmäßige Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

- d) Bestimme alle 12-ten Einheitswurzeln als Quadratwurzel Ausdrücke!
e) Für $n > 2$ gilt

$$\frac{1 + \zeta_{\frac{1}{n}}}{|1 + \zeta_{\frac{1}{n}}|} = \zeta_{\frac{1}{2n}}$$

Beispiel:

$$\zeta_{\frac{1}{16}} = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right)$$

- f) Bestimme $\zeta_{\frac{1}{17}}$ als einen Quadratwurzel Ausdruck¹⁰⁾! Hinweis:

$$\cos \frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

- g) Die Zahl $z = \frac{2-i}{2+i}$ hat den Betrag 1, ist aber keine Einheitswurzel.
h) Für $n > 1$ ist die Summe aller n -ten Einheitswurzeln gleich 0, das Produkt gleich $(-1)^n$.
i) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ mit n Elementen.

¹⁰⁾ Am 1. Juni 1796 konnte man in dem damals in Jena erscheinenden *Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung* Nr. 66, p. 554, unter der Rubrik „Neue Entdeckungen“ die erste Veröffentlichung von Gauß [Werke 10.1, p.3] lesen, die Ankündigung der geometrischen Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks:

Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construiren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß *außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z.B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construction fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. Gauß, a. Braunschweig.

Stud. der Mathematik zu Göttingen.

Es verdient angemerkt zu werden, daß Hr. Gauß jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit ebenso glücklichem Erfolge der Philosophie und der classischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat.

Den 18. April 96

E. A. W. Zimmermann, Prof.

5.6. Zur Entwicklungsgeschichte der komplexen Zahlen

Die Einbürgerung der komplexen Zahlen in die Mathematik und die Erkenntnis des Wesens dieser Zahlen ist ein eindrucksvoller Prozeß in der Mathematikgeschichte, der volle drei Jahrhunderte dauerte, bis Gauß, Abel, Jacobi, Cauchy u.a. diesen Prozeß in der ersten Hälfte des 19. Jh. mit dem Aufbau der Funktionentheorie, d.h. der Theorie der komplex-differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen, beendeten.

LITERATUR:

Hankel, Hermann: *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867

Cartan, Élie: *Nombres Complexes*, Exposé d'après l'article allemand de E. Study (Bonn), Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française I 5., Gauthiers-Villars, Paris & Teubner, Leipzig 1908, 329–468 = Œuvres II.1, 107–247

Gericke, Helmuth: *Geschichte des Zahlbegriffs*, BI-Hochschultaschenbuch Band 172/172a, Mannheim 1970

Remmert, Reinhold: *Komplexe Zahlen* = Kap.3 von Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Grundwissen Mathematik 1, Springer, Berlin 1983, ²1988, ³1992

Pieper, Herbert: *Die komplexen Zahlen: Theorie – Praxis – Geschichte*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984, ²1988, ³1999 (bei Harri Deutsch, Frankfurt)

5.6.a. Cardano, Bombelli

Komplexe Zahlen tauchen erstmals in der Renaissance auf. Der philosophische, medizinische und mathematische Schriften produzierende Humanist, Astrologe, Traumdeuter, Arzt und Professor der Medizin Girolamo [Hieronymus] Cardano aus Pavia betrachtet in seinem Buch *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus* (Nürnberg 1545, Basel ²1570), Kapitel 37 (*De Regula falsum ponendi*)¹¹⁾ Ausdrücke der Form $5 \pm \sqrt{-15}$ als Lösung der Gleichung

$$x(10 - x) = 40 \quad \text{ („Teile 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist“)}$$

nachdem er zunächst feststellte, daß die Aufgabe unmöglich sei:

„Manifestum est, quod casus seu quaestio est impossibilis, sic tamen operabimur. ...“¹²⁾

Zu solchen Ausdrücken sagt er:

„Quia superficies est remota a natura numeri et lineae, proximus tamen huic quantitati, quae vere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m. nec in aliis operationem exercere licet, nec venari quid sit. ... Hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum, ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.“¹³⁾

Zuvor hatte Cardano bei der Behandlung quadratischer Gleichungen in Kapitel 5 das Auftreten solcher ‚Spitzfindigkeiten‘ als Beweis der Unlösbarkeit der Gleichung interpretiert:

¹¹⁾ in Cardanus: *Opera omnia* (10 Bände), ed. C. Sponius, Lyon 1663, Band IV, 221–302. In Band IV finden sich die wesentlichsten mathematischen Schriften Cardanos. Eine englische Übersetzung *The Great Art or the Rules of Algebra* gab T.R. Witmer, MIT Press, Cambridge (Mass.) 1968, heraus.

¹²⁾ „Zwar ist offenbar, daß diese Aufgabe oder Frage unmöglich ist, doch werden wir so rechnen.“

¹³⁾ „Da dieses Rechteck [mit den Seiten x und $10 - x$] so entfernt von der Natur einer Zahl oder einer Strecke ist, kommt man ihm nur mit einem solchen Ausdruck näher, der wahrhaft sophistisch ist, da man mit ihm nicht so wie mit einem ‚Minus‘ noch wie mit anderen Operatoren rechnen darf, noch erraten kann, was er bedeutet. ... So weit geht die arithmetische Spitzfindigkeit, von der dieser äußerste Fall, wie schon gesagt, so spitzfindig ist, daß er nutzlos ist.“

„Semper autem pro regula universali in hoc tractatu toto est observandum, quod cum ea quae praecipuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit nec esse potuit.“¹⁴⁾

Diese Regel läßt sich aber bei den kubischen Gleichungen mit drei reellen Wurzeln (später **casus irreducibilis** der Cardanischen Formel genannt) nicht mehr aufrecht erhalten. Die in der *Ars magna* in einer rudimentären Formelsprache erstmals erscheinende „Cardanische“ Lösungsformel (sie wurde um 1515 von Scipione del Ferro gefunden)

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{d}} \quad \text{mit} \quad d = q^2 - p^3$$

für die kubische Gleichung $x^3 = 3px + 2q$ führt z.B. bei $p = 10$, $q = 18$, also bei der Gleichung $x^3 - 30x - 36 = (x - 6)(x^2 + 6x + 6) = 0$, auf so merkwürdige Gleichungen wie

$$6 = \sqrt[3]{18 + 26\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{18 - 26\sqrt{-1}} \quad ,$$

die Cardano erst in der Auflage von 1570 in einem Extrateil *De Regula Aliza* [Opera IV, 377–434] betrachtet.

Der Ingenieur Rafael Bombelli aus Bologna rechnet in seiner schon in 4.4.a erwähnten *L'Algebra, parte maggiore dell' Aritmetica divisa in tre libri* (Bologna 1572, ²1579) bereits munter mit Gleichungen dieser Art, die letztlich wieder auf reelle Größen führen, und zeigt z.B. als Zwischenschritt zur Lösung der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ mit der Lösung $x = 4$ bzw. der Gleichung $x^3 = 51x + 104$ mit der Lösung $x = 8$

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[3]{52 \pm \sqrt{-2209}} = 4 \pm \sqrt{-1} \quad .$$

Er bezeichnet die imaginäre Einheit i mit **di meno**, führt die Rechenoperationen mit komplexen Zahlen genau ein¹⁵⁾ und stellt auch fest, daß eine komplexe Zahl stets gemeinsam mit ihrer Konjugierten aufträte (er startet ja mit reellen Gleichungen).

Cardano hat sich in einer späteren Schrift *Sermo de plus et minus* (posthum 1663 in Opera IV, 435–439, publiziert) ohne neue Einsicht mit Bombellis Rechenregeln und seiner Lösung der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ auseinandergesetzt, wobei er wie Bombelli $\pm i$ als zusammengesetztes Vorzeichen ansieht, und sich wundert, daß es in der Gleichung $(a + bi)^2 = c + di$ vorkommen kann (z.B. bei $a = 2$, $b = 1$), daß $a > b$, aber $c < d$ ist.

Der schon mehrfach erwähnte, ungemein vielseitige Simon Stevin aus Brügge, Buchhalter, Techniker, Ingenieur, Mathematiker und Physiker, lehnt es 1585¹⁶⁾ ab, sich mit komplexen Zahlen und insbesondere diesem **casus irreducibilis** der Cardanischen Formel zu befassen, da der komplexe Ausdruck nicht helfe, einer reellen Wurzel näher zu kommen.

5.6.b. Girard, Descartes

Als eigenständige Größen, die nicht nur für Zwischenrechnungen gut sind, werden diese ‚Zahlen‘¹⁷⁾ in der *L' invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam 1629¹⁸⁾, von dem Hugenotten, Ingenieur und Privatgelehrten¹⁹⁾ Albert Girard aus Lothringen propagiert. In diesem Werk wird auch zum ersten Mal der

¹⁴⁾ „In diesem ganzen Werk ist als allgemeine Regel zu beachten, daß immer dann, wenn das, was vorgeschrieben ist, nicht ausgeführt werden kann, das, was vorgelegt war, nicht existierte und nicht existieren konnte.“

¹⁵⁾ libro I, p. 169 stehen die ‚Vorzeichenregeln‘

$$\begin{array}{llll} (+)(+i) = +i & , & (-)(+i) = -i & , & (+)(-i) = -i & , & (-)(-i) = +i \\ (+i)(+i) = - & , & (-i)(+i) = + & , & (+i)(-i) = + & , & (-i)(-i) = - \end{array}$$

¹⁶⁾ in seiner *L'arithmétique* (Leiden 1585, ²1625), p.305. Neuausgabe Amsterdam 1958.

¹⁷⁾ Girard verwendet die Bezeichnungen ‚verborgene‘ (**enveloppées**) oder ‚unmögliche‘ (**impossibles**) oder ‚unsinnige‘ (**ineptes**) Wurzeln.

¹⁸⁾ Neuausgabe durch D. Bierens de Haan, Muré, Leiden 1884; eine Diskussion des Werkes findet man in H. Bosmans: *La théorie des équations dans ‚L' invention nouvelle en l'algèbre‘ d'Albert Girard*, Mathesis **41** (1926), 59–67, 100–109, 145–155.

¹⁹⁾ Er hinterließ seiner armen Witwe mit 11 Kindern kein Erbe außer seinem mathematischen Ansehen.

Fundamentalsatz der Algebra ausgesprochen: „*Toutes les équations d’algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre.*“ Weiter schreibt Girard sinngemäß:

„Aber man unterlasse es nicht, diejenigen Lösungen [der Polynomgleichung] zu entwickeln, die unmöglich existieren können Wenn z.B. $x^4 = 4x - 3$ ist, so sind die vier Wurzeln

$$1, \quad 1, \quad -1 + \sqrt{-2}, \quad -1 - \sqrt{-2}$$

Nun könnte man sagen: Wozu dienen die Lösungen, die unmöglich sind? Ich antworte: Zu drei Dingen: Erstens zur Gültigkeit der allgemeinen Regel, zweitens dazu, daß man weiß, daß es keine weiteren Lösungen gibt, und drittens dazu, daß man Lösungen ähnlicher Gleichungen finden kann.“

Die Bezeichnung **imaginaire** für diese (und verwandte) neuen Größen prägte 1637 der Jurist, Soldat, Edelmann, Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker René Descartes aus La Haye (Touraine) in seinem Werk *La géométrie*²⁰⁾, wo man auch die heutige Schreibweise mathematischer Gleichungen zum ersten Mal (fast) voll ausgebildet vorfindet. ‚Imaginär‘ bedeutet dabei für Descartes eine Art ‚Uneigentlichkeit‘, imaginäre Zahlen sind Wurzeln von Polynomgleichungen, die nur in der Vorstellung existieren und denen keinerlei Größe zukommt. Er schreibt:²¹⁾

„Endlich bemerken wir, dass sowohl die wahren wie die falschen [negativen] Wurzeln einer Gleichung nicht immer real, sondern manchmal nur imaginär sind, d.h. man kann sich zwar allemale bei jeder beliebigen [polynomialen] Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angegeben habe, vorstellen, aber manchmal giebt es keine Größen, die den so vorgestellten entsprechen.“

5.6.c. Leibniz, Bernoulli

Der Universalgelehrte (Jurist, Diplomat, Philosoph, Historiker, Naturforscher, Techniker, Mathematiker) Gottfried Wilhelm Leibniz aus Leipzig studierte die Geometrie des Descartes, die Invention nouvelle von Girard und die Algebra des Bombelli, und behauptete als erster, daß man bei der Lösung einer kubischen Gleichung mit drei reellen Wurzeln durch Formeln Cardanischer Bauart²²⁾ den Durchgang durch das Komplexe nicht vermeiden können [Brief an Oldenburg und Collins, Oktober 1676, und an Varignon von 1702], Von ihm stammt eine ähnliche Gleichung²³⁾

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6} \quad .$$

Sein Reden über imaginäre Größen in einem Aufsatz über die Integration rationaler Funktionen [*Specimen novum Analyseos pro Scientia infiniti circa Summas et Quadraturas*, Acta Eruditorum, Leipzig 1702] zeigt deutlich die damals herrschende Unklarheit über diesen Begriff. Leibniz schreibt dort:²⁴⁾

²⁰⁾ erschien als Anhang zu seinem philosophischen Werk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, Maire, Leyden 1637, dessen Methode im Anhang an drei Beispielen *Météores*, *La dioptrique*, *La géométrie* demonstriert wird.

²¹⁾ nach der deutschen Übersetzung *Descartes: Die Geometrie* von Ludwig Schlesinger, Berlin 1894, Leipzig 1923, Nachdruck bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt 1969. Eine Faksimile-Ausgabe mit englischer Übersetzung von D. E. Smith & L. M. Latham erschien bei Open Court, Chicago 1925; Nachdruck bei Dover, New York 1954.

²²⁾ François Viète hatte bereits 1593 solche Gleichungen rein reell gelöst, indem er statt der Hilfe der dritten Wurzeln, d.h. Reduktion auf reine Gleichungen, die Winkeldreiteilung zu Hilfe nahm, d.h. den Fall $n = 3$ der Moivreschen Formeln.

²³⁾ an Christiaan Huygens gesandtes Manuskript von 1675. Huygens findet dieses Ergebnis in seiner Antwort vom 30.9.1675 überraschend, aber letztlich unbegreiflich, vgl. G.W. Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe* III.1, Akademie Verlag Berlin 1976, p.284 = *Mathematische Schriften* II, Halle 1850, p.12.

²⁴⁾ G. W. Leibniz: *Mathematische Schriften*, 7 Bände, herausgegeben durch Carl Immanuel Gerhardt, Berlin-Halle 1849–1863 [Nachdruck Georg Olms, Hildesheim 1962], Band V (Halle 1858), p.357

„Verum enim vero tenacior est varietatis suae pulcherrimae Natura, rerum aeternarum varietatum parens, vel potius Divina Mens, quam ut omnia sub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus.“²⁵⁾

Und in einem undatierten Manuskript [*Mathesis Universalis*, Math. Schriften VII, p.73] heißt es

„Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu **imaginariae**, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas; etsi enim ipsae per se aliquid impossibile significant, tamen non tantum ostendunt fontem impossibilitatis, et quomodo quaestio corrigi potuerit, ne esset impossibilis, sed etiam interventu ipsarum exprimi possunt quantitates reales. ...

Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt rerum seu in concretis“²⁶⁾

Im Briefwechsel²⁷⁾ mit Johann Bernoulli plädiert Leibniz auch dafür, Logarithmen negativer Zahlen als imaginäre Zahlen zu betrachten, während Johann Bernoulli die Formel $\log(a) = \log(-a)$ vertritt und diese (im Grunde schon beim Kenntnisstand von Bernoulli absurde) Behauptung noch am 9.1.1728 in einem Brief an Euler ‚beweist‘. Bernoullis Begründungen wie

$$2 \cdot \log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$d \log(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{dz}{z} = d \log z \implies \log(z) = \log(-z)$$

stehen im Widerspruch zu anderen Rechnungen, die ebenfalls auf Johann Bernoulli zurückgehen wie

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{1+it} + \int_0^\infty \frac{dt}{1-it} \right] = \frac{1}{2i} \log \frac{1+it}{1-it} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2i} \log(-1) \stackrel{!}{=} 0 \quad .$$

Doch weder Bernoulli noch Leibniz, der formal (aber mit kaum einem seiner Argumente) im Recht war, sahen die Quelle des Problems, weil sie nicht auf die Idee kamen, daß der komplexe Logarithmus vieldeutig sein könnte. Geklärt wurde diese Kontroverse 1747 durch Euler, der die unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus im Komplexen erkennt²⁸⁾. Dies konnte allerdings d'Alembert²⁹⁾ nicht davon abhalten, weiterhin den Standpunkt von Bernoulli zu verfechten.

5.6.d. Euler

Der erste, der den komplexen Zahlen durch unbefangenen häufigen Gebrauch ein Heimatrecht in der Mathematik verschafft, ist Leonhard Euler aus Basel, der bedeutendste und fruchtbarste Mathematiker

²⁵⁾ „Die Natur, die die ewigen Spielarten der Dinge hervorbringt, oder vielmehr der göttliche Geist, ist nämlich eifersüchtiger auf die herrliche Vielfalt, als daß er zuließe, daß alles unter einer einzigen Gattung zusammengedrängt würde. Daher fand er eine feine und wunderbare Zuflucht in jenem Wunder der Analysis, jenem Monstrum der idealen Welt, fast einem Zwitterwesen zwischen Sein und Nicht-Sein, das wir die imaginäre Wurzel nennen.“

²⁶⁾ „Aus dem Wurzelziehen entspringen die unmöglichen oder **imaginären** Größen, deren Natur wunderbar, deren Nützlichkeit aber nicht bestreitbar ist; wenn auch diese Größen selbst nichts Wirkliches bedeuten, zeigen sie sich nicht nur als einen Quell der Unmöglichkeit, so daß man eine mit ihnen durchgeführte Untersuchung nachträglich korrigieren könnte, daß sie nicht unmöglich wäre, sondern mit ihrer Hilfe kann man auch reale Größen darstellen. ...

Diese Ausdrücke haben etwas Wunderbares, weil sie in den Rechnungen nichts Absurdes oder Widersprüchliches hervorbringen und dennoch in der Natur der Dinge oder im Konkreten nichts darzustellen vermögen.“

²⁷⁾ Zwölf Briefe vom März 1712 bis Juli 1713, vgl. Leibniz: *Mathematische Schriften* III, Halle 1856, pp.881–918

²⁸⁾ Euler hat dieses Thema in zwei Abhandlungen variiert. Die erste ist erst 1862 publiziert worden, die zweite erschien 1751.

²⁹⁾ Jean-Baptiste le Rond d'Alembert: *Sur les logarithmes des quantités négatives* in *Opusculs mathématiques I*, Paris 1761, 6. Mémoire, p.198.

seines Jahrhunderts³⁰⁾. Er stellt bereits 1728 die transzendente Beziehung

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

ohne strengen Beweis auf; in seiner *Introductio in analysin infinitorum*³¹⁾ werden dann in Kapitel VIII („Von den transzendenten Zahlgrößen, welche aus dem Kreise entspringen“) die „Eulerschen Formeln“

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

abgeleitet.³²⁾ Ein Jahr später zeigt Euler³³⁾, daß die Menge der Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ nicht nur gegenüber den Körperoperationen, sondern auch gegen das Lösen algebraischer Gleichungen³⁴⁾ und gegen viele transzendente Operationen (Winkelfunktionen, Potenz, Logarithmus) abgeschlossen ist, und er schließt mit dem für das Verständnis der Bezeichnung ‚imaginär‘ vor Gauß charakteristischen Satz:

„... nous pourrions soutenir sans balancer, que généralement toutes les quantités imaginaires, quelques compliquées qu'elles puissent être, sont toujours réductibles à la forme

$$M + N\sqrt{-1}$$

[Wir können ohne zu schwanken behaupten, daß allgemein alle imaginären Größen, wie kompliziert sie auch sein mögen, stets auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ gebracht werden können.]“

In seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* (russisch 1768, deutsch 1770 in Petersburg) hat Euler jedoch große Mühe, die imaginären Zahlen, mit denen er seit Jahrzehnten meisterhaft gerechnet hat, zu erklären, d.h. zu sagen, was sie sind. In Cap. I.13, Abschnitt 143 heißt es:

„Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeinlich **Imaginäre Zahlen**, oder **eingebildete Zahlen** genennt werden, weil sie bloß allein in der Einbildung statt finden.“

³⁰⁾ Euler hat auch in der der Petersburger Akademie am 5.5.1777 vorgelegten Abhandlung *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet*, Institutiones calculi integralis 4 (1794), 183–194 [= Opera Omnia (1) 19, p. 130] die Bezeichnung i (= Anfangsbuchstabe von imaginär) für die/eine Quadratwurzel von -1 geprägt:

„... formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo“

Eulers Arbeit wurde allerdings erst 1794 gedruckt; zur Verbreitung der Bezeichnung hat sicher beigetragen, daß Gauß sie seit 1801 (*Disquisitiones Arithmeticae*, Art. 337) systematisch benutzt.

³¹⁾ = Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 2 Bände [nämlich Einleitung in die Analysis bzw. Einleitung in die Analytische Geometrie], 1744 geschrieben, publiziert bei Marcus-Michael Bousquet & Socios, Lausanne 1748 [= Opera Omnia (1) 8 & 9]; weitere Auflagen 1783 und 1797, französische Übersetzungen in Straßburg 1786 und Paris 1796/97, 1835, deutsche Übersetzungen von Joh. Andr. Chr. Michelsen, Berlin (Carl Matzdorff) 1788 und (G. Reimer) 1835/36, sowie [erster Band] von H. Maser, Berlin (J. Springer) 1885 [Reprint 1983]. Dies ist der erste Teil der großen Eulerschen Trilogie zur Infinitesimalrechnung, die das beherrschende Analysis-Lehrbuch seiner Zeit wurde; es folgten 1755 eine Differentialrechnung und 1768–1770 eine dreibändige Integralrechnung.

³²⁾ Die äquivalente Formel $ix = \log(\cos x + i \sin x)$ findet sich schon ohne Beweis bei Roger Cotes: *Logometria*, Philosophical Transactions 1714 (1717)

³³⁾ in seiner in einer lateinischen Fassung bereits am 10.11.1746 der Berliner Akademie vorgelegten Arbeit *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 5 (1749) 1751, 222–288 [= Opera Omnia (1) 6, 78–147]

³⁴⁾ von diesem Eulerschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra sagte Frobenius 1907 bei dem Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Leonhard Eulers [Gesammelte Abhandlungen III, p.733]: „Für die Existenz der Wurzel einer Gleichung führte er jenen am meisten algebraischen Beweis, der darauf fußt, daß jede reelle Gleichung unpaaren Grades eine reelle Wurzel besitzt. Ich halte es für unrecht, diesen Beweis ausschließlich *Gauss* zuzuschreiben, der doch nur die letzte Feile daran gelegt hat.“

In Abschnitt 145 wiederholt er dies etwas positiver:

... sie existieren in unserer Vorstellung und wir haben einen ausreichenden Begriff von ihnen.

Und in Abschnitt 151 heißt es weiter:

„Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch gantz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man so gleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmöglichen Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst ohnmöglich sey. ...“

Damit ist Euler kaum weiter gediehen als Isaac Newton ein Jahrhundert früher in seinen Vorlesungen über Algebra³⁵⁾ von 1673-1683, der die komplexen Zahlen *numeri impossibiles* (unmögliche Zahlen) nennt und ihr Auftreten als Indiz für die Unlösbarkeit eines Problems bezeichnet.

5.6.e. Cauchy, Hamilton

So scheint die Ontologie der komplexen Zahlen von Cardano bis Euler keine Fortschritte gemacht zu haben. Auch noch Augustin-Louis Cauchy hat in seinem richtungsweisenden *Cours d'Analyse* von 1821³⁶⁾ große Schwierigkeiten mit der Natur der komplexen Zahlen, obwohl dort, mit den heutigen Augen gesehen, schon alles klar steht. Er redet von imaginären Größen als symbolischen Ausdrücken ohne Sinn (*expressions symboliques, qui ne représentent rien de réel*) und von Gleichungen zwischen imaginären Größen als „symbolischen Gleichungen, die in gewöhnlichem Sinne aufgefaßt unrichtig oder bedeutungslos sind, aus denen man aber richtige Resultate folgern kann“. In chap.VII §1 steht aber ganz deutlich die grundlegende Tatsache: „*Toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles*“. Die Operationen zwischen komplexen Zahlen werden dann (wie schon bei Bombelli) als Operationen zwischen reellen Zahlenpaaren hingeschrieben. Aber obwohl Cauchy dieses alles sieht, geht er nicht den letzten Schritt und gibt den komplexen Zahlen eine eigene Existenz als reelle Zahlenpaare, sondern faßt sie als eine abkürzende Schreibweise (deren Natur unklar ist) für dahinterliegende ‚wirkliche‘ Beziehungen zwischen reellen Zahlen auf.

Den Schluß, diesen formalen Ausdrücken als solchen eine Existenz in der Mathematik zuzusprechen, macht erst Hamilton in einer am 4.11.1833 und 1.6.1835 in der Akademie zu Dublin vorgetragenen Abhandlung³⁷⁾, deren Ideen sich später in seiner Grundlegung der Quaternionen wiederholen.

Erst im Jahre 1847³⁸⁾ gibt Cauchy den komplexen Zahlen eine eigenständige Existenz mit einer neuen Definition, die sich an den von Gauß entwickelten Kongruenzbegriff³⁹⁾ anschließt: Komplexe Zahlen sind Restklassen von reellen Polynomen $f(X)$ modulo dem Polynom $X^2 + 1$. Diese Idee wird später von Kronecker verallgemeinert zur formalen Lösung beliebiger algebraischer Gleichungen.

³⁵⁾ publiziert in der *Arithmetica Universalis*, Cambridge 1707, London ²1722 = Papers **5** (Cambridge 1972), 54–532.

³⁶⁾ genauer: *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; 1^{re} Partie: Analyse Algébrique*, Paris 1821, [= Œuvres complètes (2) **3**, 1–331] (ein zweiter Teil dieses Cours d'Analyse ist nie erschienen). Deutsche Übersetzungen von B. Huzler: *Lehrbuch der algebraischen Analysis*, Gebrüder Bornträger, Königsberg 1828; und von Carl Itzigsohn: *Algebraische Analysis*, Springer, Berlin 1885.

³⁷⁾ Sir William Rowan Hamilton: *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*, Transactions of the Royal Irish Academy **17** (1837), 293–422 = Mathematical Papers III, 3–96

³⁸⁾ A.L. Cauchy: *Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences*, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris **24** (1847), 1120 = Œuvres complètes (1) **10**, 312–323; diese Theorie ist auch aufgenommen in Cauchys *Exercices d'Analyse et de physique mathématique 4*, Paris 1847, [= Œuvres complètes (2) **14**, speziell p.93 ff]

³⁹⁾ C.F. Gauß: *Disquisitiones arithmeticae*, Fleischer, Leipzig 1801 [= Werke **1**], Art. 1 ff

5.6.f. Der Weg zur komplexen Zahlenebene

Die erste geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen findet sich implizit bereits 1591 in der Algebra des Juristen (zu seinen Auftraggebern zählten die schottische Königin Maria Stuart und die französischen Könige Henri II, III und IV) François Viète⁴⁰⁾, wo er in Prop. XLVI des Abschnittes *Genesis Triangulorum* die Aufgabe löst, aus zwei rechtwinkligen Dreiecken (nach gewissen Spielregeln) ein drittes zu machen. Orientiert man die Dreiecke an der reellen und imaginären Achse der Zahlenebene, so stellen sie zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 mit Real- und Imaginärteil als Katheten dar; Viète's zwei vorgeschlagene Lösungen entsprechen genau den Multiplikationen

$$z_1 \cdot z_2 \quad \text{bzw.} \quad z_1 \cdot \bar{z}_2$$

der den Dreiecken zugeordneten komplexen Zahlen. Doch ist diese Interpretation wohl nur eine retrospektive Idee, obschon Viète die Konstruktion hier und in den *Zetetica* auch zur Untersuchung von Summen von zwei Quadraten benutzt.

Der erste gezielte tastende Versuch einer geometrischen Deutung der komplexen Zahlen⁴¹⁾ stammt von dem (ehemaligen) Theologen John Wallis, dessen mathematische Neigungen bei der Entzifferung von Feindbotschaften im Bürgerkrieg Cromwells sichtbar wurden, und der fast ohne mathematische Vorbildung und mathematische Leistungen 32jährig zum Professor für Geometrie in Oxford berufen wurde (der Vorgänger wurde als Royalist des Amtes enthoben). Wallis hatte diesen Lehrstuhl über 50 Jahre inne, und wurde in wenigen Jahren der erste große Mathematiker Englands und einer der führenden Mathematiker seiner Zeit. In den Kapiteln 66–68 seines *Treatise of Algebra, both Historical and Practical*, London: Playford 1685⁴²⁾, ist Wallis bemüht, die komplexen Zahlen gleichberechtigt mit den anderen Zahlen zu behandeln. Er schlägt zwei geometrische Interpretationen vor: Zum einen soll i die Länge eines Quadrats mit Inhalt -1 (eine verlorene Fläche) sein, denn so wie man negative Strecken durch Rückwärtsgehen interpretieren kann, kann man auch bei dem Land, das dem Meer abgerungen bzw. vom Meer überflutet wird, von Gewinn bzw. Verlust sprechen. Der andere Vorschlag realisiert die Zahlen $\sqrt{-a}$ als Strecken, die eine andere Richtung in der Ebene haben als reelle Strecken, wobei für Zahlen der Gestalt $b + \sqrt{-a}$ bei Wallis bereits eine Vektoraddition auftritt.

Vielleicht hat sich Euler schon im Jahre 1749 komplexe Zahlen als Punkte einer Ebene vorgestellt: In seiner Arbeit über die Logarithmen negativer Zahlen⁴³⁾ sagt er zur Bestimmung der Größe x in der

⁴⁰⁾ F. Vieta: *In artem Analyticon Isagoge*, Tours 1591 = Opera (Leiden 1646), 1–12. deutsch: *Einführung in die Neue Algebra*, übersetzt und erläutert von Karin Reich und Helmuth Gericke (Historiae Scientiarum Elementa 5), München: Werner Fritsch 1973.

In diesem epochalen Werk, das Vieta den Titel „Vater der Algebra“ eintrug, wird erstmals systematisch versucht, die heute alltägliche algebraische (= symbolische) Formelsprache einzuführen; noch vieles ist unvollkommen, erst Descartes kommt 1637 in seiner *Géométrie* unserem heutigen Kalkül nahe. Hier zeigt Vieta auch Vertrautheit mit modernen Marketing-Methoden, wenn er in der Einleitung schreibt:

Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder Almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht. So gelobten sie Hekatomben und rüsteten zu Opfern für Apollo und die Musen, für den Fall, daß einer auch nur das eine oder andere der Probleme lösen würde, von deren Art ich zehn oder zwanzig ohne weiteres darlege, da es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden. ...⁴

⁴¹⁾ siehe Gustaf Eneström: *Die geometrische Darstellung imaginärer Grössen bei Wallis*, Bibliotheca mathematica (3) 7 (1906/07), 263–269

⁴²⁾ die einzige größere Publikation von Wallis in der Landessprache; eine erweiterte lateinische Fassung erschien in *Opera mathematica II: De Algebra tractatus Historicus et Practicus. Anno 1685. Anglice editus; Nunc auctus Latine*. Oxford 1693

⁴³⁾ L. Euler: *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin 5 (1749/1751), 139–179 [= Opera Omnia (1) 17, p. 230] ; deutsch als *Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibniz und Bernoulli über die Logarithmen*

Gleichung $\log x = \sqrt{-1}g$, also $x = \exp(\sqrt{-1}g) = e^{ig}$, mit einer reellen Zahl g , die kein Vielfaches von π ist:

„Mais, . . . , le nombre x sera imaginaire et, pour le trouver, on n'a qu'à prendre un arc de cercle $= g$, le rayon étant $= 1$ et ayant cherché son sinus et cosinus, le nombre cherché sera

$$x = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g$$

[Frei übersetzt: Um die Lösung x der Gleichung $\log x = \sqrt{-1}g$ zu finden, nehme man auf dem Einheitskreis einen Bogen der Länge g , bestimme den zugehörigen Sinus und Cosinus, und bilde $x = \cos g + i \sin g$.]⁴⁴

Auch in seinen Untersuchungen zur Hydrodynamik (um 1755) springt Euler bei der Betrachtung der ebenen Potentialströmung zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) einer komplexen Zahl $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ hin und her, allerdings ohne auf eine geometrische Interpretation Bezug zu nehmen.

Die erste einwandfreie geometrische Interpretation der komplexen Zahlen als Vektoren der reellen Ebene hat 1796 der norwegische Pastorensohn Caspar Wessel, seit 1764 als Feldmesser für die Dänische Akademie der Wissenschaften tätig (z.B. Vermessung der Grafschaft Oldenburg), entwickelt⁴⁵. Dort heißt es über das Rechnen mit Strecken im Raum:⁴⁵⁾

§1. Die Addition zweier gerichteter Strecken geschieht in der folgenden Weise: Man setzt sie zusammen, indem man die eine von dem Punkt ausgehen läßt, an dem die andere endet; dann verbindet man durch eine neue Strecke die beiden Enden der so entstandenen gebrochenen Linie. Diese neue Strecke heißt die Summe der gegebenen Strecken. . . . Wenn die zusammengesetzten Strecken gleiche Richtung haben, stimmt diese Definition vollständig mit der gewöhnlichen überein.

§4. Das Produkt zweier Strecken muß aus dem einen Faktor so gebildet werden, wie der andere Faktor aus der positiv oder absolut genommenen Strecke, die gleich 1 gesetzt wurde. Das heißt:⁴⁶⁾

- 1°. Die Faktoren müssen eine solche Richtung haben, daß sie in die gleiche Ebene wie die positive Einheitsstrecke gebracht werden können.
- 2°. In bezug auf die Länge muß das Produkt sich zu dem einen Faktor verhalten wie der andere zur Einheit.
- 3°. Die Richtung des Produkts muß, wenn man die Einheit, die Faktoren und das Produkt von demselben Anfangspunkt aus anträgt, in der Ebene der Einheit und der Faktoren liegen; und sie muß von dem einen Faktor ebensoviel Grad und in demselben Sinne abweichen wie der andere Faktor von der Einheit, derart, daß der Richtungswinkel des Produkts oder seine Abweichung von der Richtung der positiven Einheit gleich der Summe der Richtungswinkel der Faktoren ist.

§5. Bezeichnen wir die positive Einheitsstrecke mit $+1$, eine andere Einheit, die auf der ersten senkrecht steht, mit $+\varepsilon$, so ist der Richtungswinkel von $+1$ gleich 0° , der von -1 gleich 180° , der von $+\varepsilon$ gleich 90° und der von $-\varepsilon$ gleich -90° oder 270° . Und nach der Regel, daß der Richtungswinkel des Produkts gleich der Summe der Richtungswinkel der Faktoren ist, hat man

$$\begin{aligned} (+1) \cdot (+1) &= +1, & (+1) \cdot (-1) &= -1, & (-1) \cdot (-1) &= +1, & (+1) \cdot (+\varepsilon) &= +\varepsilon, & (+1) \cdot (-\varepsilon) &= -\varepsilon \\ (-1) \cdot (+\varepsilon) &= -\varepsilon, & (-1) \cdot (-\varepsilon) &= +\varepsilon, & (+\varepsilon) \cdot (+\varepsilon) &= -1, & (+\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) &= +1, & (-\varepsilon) \cdot (-\varepsilon) &= -1 \end{aligned}$$

negativer und imaginärer Zahlen in Leonhard Euler: *Zur Theorie komplexer Funktionen. Gesammelte Arbeiten*, Nr.II, Ausgewählt, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von A.P. Juschkewitsch, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr.261, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1983

⁴⁴⁾ Seine Arbeit *Om Direktionens analytiske Betegning, ett forsög, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygons Oplösning* wurde am 10.3.1797 von Etatsrat Tetens der Dänischen Akademie vorgelegt und in der *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* **5**₃ (1799), 469–518, publiziert. Sie blieb ein Jahrhundert unbeachtet, wurde dann im *Arch. for Math. og Naturv.* **18** (Kristiania 1896) *med en forteale av Sophus Lie* reproduziert und ins Französische übersetzt: *Essai sur la représentation analytique de la direction* (ed. H.G. Zeuthen), L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhagen 1897. Englische Übersetzung des Hauptteils in David Eugene Smith: *A Source Book in Mathematics*, New York–London 1929 [Nachdruck in zwei Bänden: Dover, New York 1959], p.55–66.

⁴⁵⁾ Übersetzung von Gericke: *Geschichte des Zahlbegriffs*, p.74ff

⁴⁶⁾ Forderung 1° und der erste Halbsatz von 3° betreffen Strecken im Raum und entfallen, wenn man nur Strecken in einer Ebene betrachtet.

In den folgenden Abschnitten kommt Wessel auf die Eulersche Darstellung der Einheitsstrecken als $\cos v + \varepsilon \cdot \sin v$, auf die Polarkoordinatendarstellung und auf die algebraische Darstellung der Rechenoperationen für Vektoren der Gestalt $a + \varepsilon b$. Zu bemerken ist, daß Wessel nicht die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen (etwa gar, um dadurch ihre Existenz zu rechtfertigen) als Ziel im Auge hat, sondern daß er umgekehrt den Kalkül der komplexen Zahlen in geometrischer Form aufbaut als Hilfsmittel für geometrische Fragestellungen wie Polygonkonstruktionen.

Eine andere Darstellung, die die komplexen Zahlen geometrisch interpretiert (z.B. i als Drehung um 90°), gibt 1806 in Paris der schweizerische Buchhalter Jean-Robert Argand in seinem *Essay sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*⁴⁷⁾. Zunächst unbeachtet, rief das Argandsche Werk in den Jahren 1813/1815 eine lebhafte Diskussion in Gergonnes *Annales des Mathématiques* hervor, und bis 1830 wurde die Fragestellung in Publikationen von (recht unbekannten) Autoren kontrovers erörtert. Doch noch Cauchy benutzt die komplexen Zahlen in seinem *Cours d'Analyse* 1821 als bloße symbolische Ausdrücke ohne geometrische Interpretation.

5.6.g. Gauß

Erst die Autorität von Carl Friedrich Gauß hat den komplexen Zahlen jeden Hauch von Mystik genommen. Er kennt die Interpretation komplexer Zahlen als Punkte der Zahlenebene etwa seit 1796, er benutzt sie implizit 1797 zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra⁴⁸⁾ in seiner Dissertation *Demonstratio nova theorematum omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Helmstedt 1799), wo er in einer Fußnote [Werke **3**, p.6] schreibt:⁴⁹⁾

„... Sollen imaginäre Grössen überhaupt in der Analysis beibehalten werden (was aus mehreren Gründen, welche freilich hinlänglich sicher gestellt werden müssen, richtiger erscheint, als sie zu verwerfen), dann müssen sie nothwendiger Weise für ebenso möglich wie die reellen Grössen gelten; deshalb möchte ich reelle und imaginäre unter der gemeinsamen Bezeichnung von **möglichen Grössen** umfassen; **unmöglich** würde ich dagegen eine Grösse nennen, welche Bedingungen zu genügen hätte, denen auch nach Zulassung imaginärer Grössen nicht genügt werden kann; so also, dass dieser **Ausdruck** dasselbe bedeutet, als wenn man sagt, dass eine solche Grösse im ganzen Grössenbereich nicht bestehe. Ich möchte aber nicht zulassen, dass man hieraus eine ganz besondere Grössenart bilde. Wenn Jemand sagt, ein geradliniges, gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck sei unmöglich, so wird dem Niemand widersprechen. Will man dagegen ein solches unmögliches Dreieck als eine neue Dreiecksart betrachten und andere Dreieckseigenschaften auf dieses anwenden, so wird Jeder dies lächerlich finden! Das heisst mit Worten spielen oder vielmehr Missbrauch treiben. — ... — Übrigens will ich nicht in Abrede stellen, dass das, was ich hier gegen den Missbrauch unmöglicher Grössen gesagt habe, in gewissem Sinne auch imaginären Grössen entgegengehalten werden kann. Doch behalte ich mir die Rechtfertigung dieser Einführung sowie eine eingehende Auseinandersetzung dieser ganzen Sache für eine andere Gelegenheit vor.“

In dem Brief an Bessel von 1811 beschreibt Gauß sehr deutlich seine geometrischen Vorstellungen von der komplexen Zahlenebene. Doch erst 1831 legt Gauß seine Vorstellungen öffentlich vor in der Abhandlung *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Secunda* [Werke **2**, p.93–149]. Gauß prägt dort den

⁴⁷⁾ zweite Ausgabe von J. Hoüel, Paris 1874

⁴⁸⁾ Dieser Satz („Jedes Polynom n -ten Grades hat n komplexe Nullstellen“ bzw. „Jedes reelle irreduzible Polynom hat höchstens den Grad 2“) wurde von Girard 1629, Descartes 1637 und Newton 1707 ausgesprochen, von Leibniz 1702 sowie Nikolaus Bernoulli und Goldbach 1742 bezweifelt, von d'Alembert 1746 (1748), Euler 1746 (1751), Foncenex 1759, Lagrange 1772 und Fuss 1781 mit substantiellen Beweisversuchen versehen, die Gauß in seiner Dissertation kritisiert. Sein eigener erster Beweis, dem er später drei andere Beweise folgen läßt, ist allerdings auch nicht ohne Lücken, die er erst im vierten Beweis schließt. Der dritte Beweis (1816) von Gauß für diesen Satz benutzt übrigens komplexe Integrale. Für Details vgl. S.S. Petrova: *Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre*, *Historia mathematica* **1** (1974), 255–261.

⁴⁹⁾ in der deutschen Übersetzung von Eugen Netto: *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Funktionen ersten oder zweiten Grades*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr.14, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig 1890, ²1904, ³1913

Ausdruck **komplexe Zahl** und schreibt [Werke 2, p.102], nachdem er ausdrücklich die reellen Zahlen als eine Unterart der komplexen Zahlen bezeichnet hat:

„Campus numerorum complexorum $a + bi$ continet

I. numeros reales, ubi $b = 0$, et, inter hos, pro indole ipsius a

- 1) cifram
- 2) numeros positivos
- 3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, ubi b cifrae inaequalis. Hic iterum distinguuntur

- 1) numeri imaginarii absque parte reali, i.e. ubi $a = 0$
- 2) numeri imaginarii cum parte reali, ubi neque b neque $a = 0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginarii mixti vocari possunt.“

In der Selbstanzeige dieses Werkes in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 23. April 1831 schreibt Gauß [Werke 2, p.174ff]:

„Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter sein als eine solche Meinung. Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, . . . So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordneten Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u.s.w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunkts erforderlich ist; so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Ebene befindlich angesehen, und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen voneinander angenommen werde, so dass wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zweifache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl i , so wie der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der andern Seite auf $-i$ u.s.f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen . . . einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig läßt.

Von der andern Seite wird hiedurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neuern Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der absoluten ganzen Zahlen hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, zu den rationalen die irrationalen, zu den positiven die negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dies Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, dass die Beschaffenheit der gesuchten Grösse kein Entgegengesetztes zulässt. Allein so wenig man in der **Allgemeinen** Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, eben so wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen; die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen andern Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren: allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, **unmöglich** genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbare Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse reeller Grössen steuert, verschmähen zu wollen.“

Nach weiteren Ausführungen zur Veranschaulichung der (ganzen) komplexen Zahlen, also des Gitters $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ in der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, beendet Gauß seine Anzeige mit den Worten:

„Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1, -1, \sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa direkte, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.“

Rückblickend sagt Gauß später⁵⁰⁾

Bei allem dem sind die imaginären Grössen, so lange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als viel mehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Grössen auf gleiche Linie gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der imaginären Grössen in ihr wahres Licht gesetzt, und nachgewiesen ist, daß diese, eben so gut wie die negativen, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben. Die vollständige Erkenntnis der Natur einer analytischen Function muss auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schliessen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente.

Die deutsche Bundespost gab 1977 anlässlich der 200. Wiederkehr des Gaußschen Geburtstages eine Briefmarke mit der Gaußschen Zahlenebene heraus.

5.6.h. Anwendungen komplexer Zahlen

Übrigens wurden die komplexen Zahlen schon früh, d.h. bevor sich die Mathematiker ihrer Natur sicher waren, in Untersuchungen über physikalische und andere Probleme benutzt; so in d'Alemberts Untersuchung über die allgemeine Ursache der Winde (1746); dann in den grundlegenden Arbeiten zur Hydrodynamik von d'Alembert⁵¹⁾ und von Euler⁵²⁾, in denen bereits die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen vorkommen; weiter in Lamberts (1768) astronomischen Untersuchungen, in Eulers⁵³⁾ und Lagranges⁵⁴⁾ Theorien der geographischen Karten, in Poissons (1813) Betrachtungen der Verteilung der elektrischen Ladung auf der Oberfläche leitender Körper, in A. Fresnels Theorie der Totalreflexion

⁵⁰⁾ im nachgelassenen Manuskript *Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Functionen einer Veränderlichen Grösse entwickelt werden*, Werke **10**₁ (Leipzig 1917), S.404-405.

⁵¹⁾ J. B. d'Alembert: *Essai sur une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, David l'ainé, Paris 1752

⁵²⁾ z.B. *Principia motus fluidorum*, 1752, gedruckt 1761, und *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*, Histoire de l'académie des sciences de Berlin, Mémoire **12** (1755) = Opera omnia (2) **12**. Zur Würdigung der Eulerschen Arbeiten vgl. C. Truesdell: *Rational fluid mechanics 1687-1765* in Euler: Opera Omnia (2) **12** (1954), VII-CXXV.

⁵³⁾ vor allem die der Petersburger Akademie am 4.9.1775 vorgelegte Arbeit *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, Acta academiae scientiarum Petropolitanae (1777) 1778, 107-132 [= Opera Omnia (1) **28**, 246-275], von A. Wangerin als *Über die Abbildung von einer Kugelfläche in einer Ebene* herausgegeben in *L. Euler: Drei Abhandlungen über Kartenprojektion*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr.93, Leipzig 1898; wieder abgedruckt in *L. Euler: Zur Theorie komplexer Funktionen*, herausgegeben von A. P. Juschkewitsch, Ostwalds Klassiker Nr.261, Leipzig 1983.

⁵⁴⁾ Joseph Louis Lagrange: *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1779) 1781, 161-210 [= Œuvres **4**, 635-692], deutsch von A. Wangerin herausgegeben in *Über Kartenprojektion, Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauss (1822)*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr.55, Leipzig 1894. Die Leistungen von Gauß in der Geodäsie sind übrigens auf dem 1989 von der Deutschen Bundesbank ausgegebenen 10-Mark-Schein gewürdigt.

(1823, publiziert 1831). 1893 führte Steinmetz die komplexen Zahlen in die Elektrotechnik ein. Grundgleichungen der Quantenmechanik werden heute in der Gestalt

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} \quad , \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H\Psi$$

geschrieben.

Daß die komplexen Zahlen nicht nur in der Analysis, sondern auch in der Geometrie mit großem Nutzen eingesetzt werden können (letztlich wegen der Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra), hat als erster in voller Klarheit Poncelet erkannt, der in seinem in russischer Kriegsgefangenschaft (1812–1814) begonnenen, 1822 erschienenen Hauptwerk⁵⁵⁾ die projektive Geometrie der Ebene $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ und des Raumes $\mathbb{P}_3\mathbb{C}$ ins Leben rief, und damit die klassische Geometrie gleich um zwei zentrale Neuerungen bereicherte: Zum einen um die Gleichberechtigung der unendlich-fernen Punkte (die seit ihrer Schaffung in der Theorie der Perspektive in der Renaissance ein unstetes Dasein führten), d.h. um den projektiven Standpunkt, der viele Fallunterscheidungen der klassischen Geometrie überwindet, zum anderen um die Gleichberechtigung der imaginären Punkte, die weitere Fallunterscheidungen aufhebt: So fallen die klassischen Kegelschnittstypen Ellipse, Parabel, Hyperbel in der projektiven Ebene zusammen, in der komplexen projektiven Ebene fällt auch noch der ‚nullteilige‘ Kegelschnitt mit ihnen zusammen; so lassen sich Kreise einfach charakterisieren als diejenigen Kegelschnitte der euklidischen Ebene, die durch die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte $(0 : 1 : \pm i)$ gehen; so wird Newtons Klassifikation der ebenen kubischen Kurven⁵⁶⁾ mit 72 Typen (J. Stirling⁵⁷⁾ trug 1717 noch zusätzlich einige vergessene Typen nach) in $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ auf 3 irreduzible und 4 reduzible Typen reduziert; etc.

⁵⁵⁾ Jean Victor Poncelet: *Traité des propriétés projectives des figures*, Metz–Paris 1822, 2.ed. in 2 Bänden, Paris 1865/1866.

⁵⁶⁾ I. Newton: *Enumeratio linearum tertii ordinis*, geschrieben um 1667/1668, publiziert London 1704 als Anhang zu seiner *Opticks*

⁵⁷⁾ James Stirling: *Lineae tertii ordinis Neutonianaе, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione linearum tertii ordinis*, Oxford 1717