

$$\mathbb{L} \text{ ortho} \Leftrightarrow \mathbb{L} \ni \mathbb{Y} \sim \bar{\mathbb{Y}} \in \mathbb{L}$$

$$\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = \mathbb{Y}$$

$$\text{de Morgan} \begin{cases} \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}} \\ \overline{\mathbb{Y} \vee \mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}} \end{cases}$$

$$\mathbb{Y} \geq \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y} \leq \mathbb{Y} \Rightarrow \bar{\mathbb{Y}} \leq \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} \geq \bar{\mathbb{Y}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} \geq \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{Y}} \leq \mathbb{Y} \geq \bar{\mathbb{Y}} \Rightarrow \mathbb{Y} = \bar{\mathbb{Y}} \geq \bar{\mathbb{Y}} \leq \bar{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \Rightarrow \bar{\mathbb{Y}} \leq \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{Y} = \bar{\mathbb{Y}} \geq \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}} \\ \Rightarrow \overline{\mathbb{Y} \vee \mathbb{Y}} = \overline{\bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}}} = \overline{\bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{Y} \geq \mathbb{Y} \Leftrightarrow \bar{\mathbb{Y}} \leq \bar{\mathbb{Y}}$$

$$\Rightarrow : \mathbb{Y} \leq \mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y} \Rightarrow \bar{\mathbb{Y}} = \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}} \geq \bar{\mathbb{Y}}$$

$$\Leftarrow : \bar{\mathbb{Y}} \leq \bar{\mathbb{Y}} \Rightarrow \mathbb{Y} = \bar{\mathbb{Y}} \leq \bar{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y}$$

$$\bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y} \stackrel{\text{null}}{=} \bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y} \Leftrightarrow \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}} \stackrel{\text{eins}}{=} \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}} \vee \mathbb{Y}$$

$$\Rightarrow : \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \vee \mathbb{Y} = \overline{\bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y}} = \overline{\mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}} \vee \bar{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}} \vee \mathbb{Y}$$

$$\Leftarrow : \bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y} = \bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y} = \overline{\mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}}} = \overline{\mathbb{Y} \vee \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}} = \bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y} \wedge \mathbb{Y}$$

$$\mathbb{Y} \leq \mathbb{Y} \Rightarrow \bar{\mathbb{Y}} \vee \mathbb{Y} = e$$

$$\overline{\mathbb{Y} \vee \mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \wedge \bar{\mathbb{Y}} \leq \mathbb{Y} \wedge \bar{\mathbb{Y}} = o$$

$$\mathbb{Y} \sim \mathbb{Y} = \underbrace{\bar{\mathbb{Y}} \wedge \mathbb{Y}} \vee \underbrace{\bar{\mathbb{Y}} \wedge \bar{\mathbb{Y}}} \vee \overbrace{\mathbb{Y} \wedge \underbrace{\mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}}}} \leq \bar{\mathbb{Y}} \vee \mathbb{Y}$$

$$\Psi \leq \Phi \Rightarrow \Psi \sim \Phi = e$$

$$\begin{aligned}\Psi \leq \Phi \leq \Psi \vee \bar{\Psi} &\Rightarrow \Psi \wedge \underbrace{\Phi \vee \bar{\Psi}} = \Psi \\ \Phi \leq \bar{\Psi} &\Rightarrow \bar{\Psi} \wedge \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \\ \Rightarrow \Psi \sim \Phi &= \underbrace{\bar{\Psi} \wedge \Phi} \vee \underbrace{\bar{\Phi} \vee \Psi} = \underbrace{\bar{\Psi} \wedge \Phi} \vee \overline{\Psi \wedge \bar{\Phi}} = \underbrace{\bar{\Psi} \wedge \Phi} \vee \overline{\bar{\Psi} \wedge \bar{\Phi}} = e\end{aligned}$$
$$\Psi R \Phi = \underbrace{\Psi \wedge \Phi} \vee \underbrace{\bar{\Psi} \wedge \bar{\Phi}} = \Phi R \Psi = \bar{\Psi} R \bar{\Phi}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_1}{=} e \\
& \underline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_2}{=} e \\
& \underline{\mathbb{Y}R\bar{\mathbb{Y}}} \underset{\bar{Q}_3}{=} e \\
& \underline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}R\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_4}{=} e = \underline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}R\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}} \\
& \overline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}R\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_5}{=} e \\
& \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_6}{=} e = \overline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \\
& \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_7}{=} e = \overline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \\
& \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}R\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \underset{\bar{Q}_8}{=} e \\
& \overline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \vee \underline{\mathbb{Y}R\bar{\mathbb{Y}}} \underset{\bar{Q}_9}{=} e \\
& \overline{\mathbb{Y}\curvearrowright\mathbb{Y}} \vee \underline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}} = e
\end{aligned}$$

$$Q1: \quad \mathbb{Y}R\mathbb{Y} = \underline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \vee \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \vee \bar{\mathbb{Y}} = e$$

$$\underline{QQ8}: \quad \text{LHS} = \text{RHS} \Rightarrow \text{LHS } R \text{ RHS} = e$$

$$Q9: \quad \overline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \vee \underline{\mathbb{Y}R\bar{\mathbb{Y}}} = \overline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} \vee \underline{\mathbb{Y}R\mathbb{Y}} = e$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}\curvearrowright\mathbb{Y} &= \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \vee \overline{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}} \vee \overbrace{\mathbb{Y}\wedge\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}}^{\leqslant \bar{\mathbb{Y}}\vee\mathbb{Y}} \leqslant \bar{\mathbb{Y}}\vee\mathbb{Y} \xrightarrow{\text{Lem}} \overline{\mathbb{Y}\curvearrowright\mathbb{Y}} \vee \underline{\mathbb{Y}\vee\mathbb{Y}} = e \\
&\leqslant \bar{\mathbb{Y}} \quad \leqslant \bar{\mathbb{Y}} \quad \leqslant \bar{\mathbb{Y}}\vee\mathbb{Y}
\end{aligned}$$